Révisions de lycée

Bonjour à tous et toutes ! J'espère que vous passez de bonnes vacances.

J'aimerais que vous vous remettiez dans le bain les semaines qui précédent la retrée, voilà donc un DM à cet effet. Afin de m'assurer que vous avez joué le jeu de bien le travailler, il y aura une interro sur certaines questions du DM la semaine de la rentrée.

Si vous bloquez sur certaines questions, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à l'adresse mickael.postic@ac-besancon.fr.

Bon courage !

1 Quelques calculs pour s'échauffer !

Exercice 1 1. Développer et réduire : $(x+3)(2x-7)(3x-2)-(2x+6)(3x^2-7x+7)$

2. Factoriser et réduire :

   a) $(2x+7)(x-1)+(3x-2)(x-1)$
   b) $(2x+1)(x-1)-3x+3$
   c) $4x^2-49$
   d) $(4x-16)(x-2)-3x^2+12x$
   e) $4x^2-20x+25$
   f) $9x^2-12x+4+(2-3x)(4x+1)$

3. Résoudre les équations :
   a) $(x+3)(2x-7)-(x+3)(x-2)=x-5$
   b) $(x+3)(3x+7)=2x^2+12x+18-x-1$

Exercice 2 Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$\text{Niveau débutant : } \frac{5^{n+1}(7n+1)}{7^{n+1}}-\frac{5^n(5n+2)}{7^n}$$

$$\text{Niveau confirmé : } \frac{11^{2n+1}(11n+1)}{8^{n+1}}-\frac{121^{n+1}(2n-5)}{2^{3n+4}}$$

$$\text{Niveau expert : } \frac{22^{2n+3}(7n-6)}{14^{2n+1}}-\frac{121^{n+1}(44n-32)}{49^n}$$

Exercice 3 Résoudre les inéquations suivantes :

$$(3x-1)(x+2)<9x^2-1$$

et

$$\frac{4x^2+20x+25}{49x^2-36}\geq\frac{4x+10}{7x+6}.$$

Exercice 4 Pierre a reçu un jeu de construction constitué de n cubes en bois de taille identique. Il les pose tous sur le sol, puis cherche à les ranger sous la forme d'un carré. Malheureusement, il lui manque 5 cubes pour compléter son carré avec sa première méthode. Il tente alors de faire un carré plus petit, mais se retrouve alors avec 14 cubes en trop.

Déterminez le nombre de cubes dans son jeu de construction.

2 Récurrence.

Je commence cette section par un exercice corrigé afin de fixer le type de rédaction souhaitée. J'aimerais que les exercices suivants soient rédigés de la même façon. Je rappelle que le symbole $\forall$ signifie "pour tout" et le symbole $\exists$ signifie "il existe". Ce sont des quantificateurs, nous reviendrons sur ce concept en début d'année.

Exercice 5 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Corrigé : *Initialisation :* Pour $n=1$, on a $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$ ce qui est la formule annoncée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons que $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et montrons que $1+2+\cdots+n+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

On a :

$$\begin{aligned}
1+2+\cdots+n+(n+1) &= (1+2+\cdots+n)+(n+1)\\
&= \frac{n(n+1)}{2} \text{ par hypothèse de récurrence}\\
&= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)\\
&= (n+1)\frac{n+2}{2}\\
&\boxed{= \frac{(n+1)(n+2)}{2}}
\end{aligned}$$

Conclusion : Par application du principe de récurrence, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

À vous de jouer maintenant !

Exercice 6

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. (Vous pouvez apprendre cette formule, elle est parfois utile !)
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
3. **Plus difficile.** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$$

3 Ensemble de définition de fonctions.

De la même façon, je vous donne le type de rédaction attendue en corrigeant la première question.

Exercice 7 Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes. On justifiera soigneusement la réponse.

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2-4}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2+3x+2}$
3. $f_3 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+3x-4}}$
5. $f_5 : x \mapsto \ln(\sin(x)+2)$
6. $f_6 : x \mapsto \sqrt{\ln(9x^2-25)}$

Corrigé :

1. $f_1 = g \circ h$ avec $g : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ et $h : x \mapsto x^2 - 4$ définie sur $\mathbb{R}$.
   On résout donc :
   $$h(x) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$$
   et on a donc $\boxed{f_1 \text{ définie sur }]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[.}$

A vous de faire la suite !

4 Système d'équations.

Exercice 8 Résoudre les systèmes suivants :

1. $$\begin{cases} 3x + y - 8 &= 0 \\ 2x - 2y &= 24 \end{cases}$$
2. $$\begin{cases} -3x + y + z + \dfrac{3}{4} &= 0 \\ 2x + 3y - z + 3 &= 1 \\ 2x + 5y + 2z &= 3 \end{cases}$$
3. $$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 2z &=& 3 \\ x + 2y + z &=& 1 \\ 2x + y + z &=& 0 \end{array} \right.$$
4. $$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2z &=& 1 \\ -y + z &=& 2 \\ x - 2y &=& 1 \end{array} \right.$$

Exercice 9 Un groupe de 15 amis décide d'aller passer ses vacances, en partant de Genève, à Rome. Pour y aller, huit d'entre eux préfèrent prendre l'avion et les autres, plus écolos, prennent le train. Collectivement, leur aller représente 374kg de CO2 émis.

Suivant l'exemple plus vertueux de leurs camarades, quatre de plus rentrent en train. Collectivement, le retour représente 202kg de CO2 émis. Combien de CO2 émet un trajet en avion (par passager) ? En train ?

Exercice 10 (Plus difficile)

Déterminer tous les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie :

1. $P(-1) = 5, P(1) = 1$ et $P(2) = 2$;
2. $P(-1) = 4$ et $P(2) = 1$.