Cahier de Vacances de Mathématiques

de la Terminale S à la Prépa ECS

Le but de ce cahier est de vous aider à revoir et améliorer les bases des techniques de calcul. Acquérir de bons réflexes de calcul sur les fractions, les puissances ou la factorisation par exemple permet d'aborder sereinement l'année de prépa ECS. Pour cela, il faut se contraindre à faire des gammes d'exercices pour être plus efficace et plus sûr dans les calculs.
En fin de cahier, il y a en "Annexes" quelques rappels utiles.

Ce travail estival sera bénéfique dès le début de l'année : en gagnant du temps sur les calculs "classiques" on peut traîter plus de questions, avoir plus de temps de réflexion pour traîter les questions nouvelles, donc balayer davantage les sujets d'examen. En gagnant en sécurité dans les calculs, on évite de nombreux points perdus.

Par ailleurs, en prépa, il y a beaucoup de répétitions de calculs standards. Un entraînement sérieux est donc très efficace pour les concours.

Une évaluation en début d'année me permettra rapidement de voir si votre travail a été réel, honnête et efficace.

Je vous souhaite bon courage et vous accueillerai avec plaisir en septembre. En cas de difficulté, vous pouvez me contacter à l'adresse mail ci-dessous

Jacques Bauer
jac.bauer@sfr.fr

I Calcul sur les fractions

▶ 1

Réduire les expressions ci-dessous. On cherchera si possible une forme factorisée. Pour les calculs littéraux on ne se préoccupera pas des questions d'existence.

1) $A_1 = \dfrac{1}{8} \times 9 \times \dfrac{4}{27}$ $\qquad B_1 = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{a} \times \dfrac{b}{c}$

2) $A_2 = \dfrac{\dfrac{4}{a} \times \dfrac{c}{b}}{ac \times \dfrac{2}{b}}$ $\qquad B_2 = \dfrac{1}{9} \times \dfrac{2}{\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)^3} - \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)^2}$

3) $A_3 = n^3(n+1) - \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ $\qquad B_3 = \dfrac{n^2(n+1)}{2} - \dfrac{n(n+1)(2n+3)}{6}$

4) $A_4 = \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{x+1}{x^2-4}$ $\qquad B_4 = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3x}{x^2-1}$

5) $A_5 = \dfrac{1}{1-a^2} - \dfrac{1}{(1-a)^2}$ $\qquad B_5 = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{2}{n+2} + \dfrac{1}{n+3}$

6) $A_6 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$ $\qquad B_6 = \dfrac{\dfrac{1}{a-b} - \dfrac{1}{a+b}}{\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{a+b}}$

7) $A_7 = \dfrac{a+5}{4-a^2} - \dfrac{2}{1+a}$ $\qquad B_7 = \dfrac{(a+b)(2a-b)}{(1-a)^2} - \left(\dfrac{a+b}{1-a}\right)^2$

8) $A_8 = \dfrac{3n+1}{2^n} - \dfrac{2n-5}{2^{n+1}}$ $\qquad B_8 = \dfrac{4n-1}{3^{n+2}} + \dfrac{7n+5}{3^{n+1}}$

II Calcul sur les puissances

☞ Revoir les propriétés sur les puissances en Annexes (à la fin du cahier)

☞ **On essaie le plus souvent de se ramener à la forme $a \times b^n$**

☞ **On se ramène presque toujours à des exposants positifs**

☞ **On simplifie les racines carrées** *(qui sont des puissances :* $\sqrt{x} = x^{1/2}$*)*

☞ **Généralement on ne garde pas de racine carrée au dénominateur**

Exemples :

▷ $2^{n+1} - 5 \times 2^n - 6 \times 2^{n-1} = 2 \times 2^n - 5 \times 2^n - 6 \times \frac{1}{2} \times 2^n$ (car $2^{-1} = \frac{1}{2}$)
$= (2-5-3) \times 2^n = -6 \times 2^n$

▷ $\dfrac{3 \times 4^{n-1}}{5^{n+1}} = 3 \times \dfrac{\frac{1}{4} \times 4^n}{5 \times 5^n} = \dfrac{3}{20} \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

▷ $\dfrac{3}{2^n} + 5 \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-n} = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 5 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$ (*on ne peut aller plus loin !*)

▷ $\sqrt{150} = \sqrt{25 \times 6} = \sqrt{25} \times \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$

▷ $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}$ (car $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$)

▶ 2 À vous !

Ramener à la forme $a \times b^n$ les expressions suivantes :

◇ $A_n = \dfrac{2^{n-1}}{5^n}$ ◇ $B_n = (2n+3)\,5^{-n-1}$ ◇ $C_n = \dfrac{1}{2^{2n+1}}$

◇ $D_n = \mathrm{e}^{1-n}$ ◇ $E_n = \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}}{\left(\dfrac{5}{3}\right)^{n+1}}$ ◇ $F_n = \dfrac{\dfrac{2}{3^{n-1}}}{\dfrac{5^n}{3^{n-2}}}$

◇ $G_n = \left(\dfrac{2}{7}\right)^{-n+2}$ ◇ $H_n = (-1)^n \times 4^{2n+1}$ ◇ $I_n = \dfrac{\mathrm{e}^7 \times \left(\mathrm{e}^{-5}\right)^3}{\mathrm{e}^{-3}}$

◇ $J_n = \dfrac{\mathrm{e}^{a+b}}{\mathrm{e}^{a-b}} \times \dfrac{\mathrm{e}^{2a-b}}{\mathrm{e}^{2a+2b}}$ ◇ $K_n = \dfrac{(a^n)^3 \times \left(b^2\right)^n}{(ab)^n}$ ◇ $L_n = 3^{n+1} - 3^n$

◇ $M_n = a^{2-n}$ ◇ $N_n = \dfrac{2}{x^{n+1}} - \dfrac{3}{x^n}$ ◇ $O_n = 2^{n+2} - 6 \times 2^{n-1}$

▶ 3

Ramener à la forme $a \times b^n + c \times d^n$ les expressions suivantes :

◇ $A_n = \dfrac{2^{n+1} + 3^{n-1}}{3^{2n-1}}$ ◇ $B_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-n} + 5^{-n+1} - \dfrac{7}{5^n}$

▶ 4

Ramener à la forme $a \times b^{k-1}$ les expressions suivantes :

◇ $A_k = \dfrac{3^k}{5^{k+1}}$ ◇ $B_k = (3k-4)\,5^{-k-1}$ ◇ $C_k = \dfrac{1}{3^{2k-1}}$

◇ $D_k = 7^{1-k}$ ◇ $E_k = \dfrac{\dfrac{1}{3^{k-1}}}{\left(\dfrac{5}{3}\right)^{k+1}}$ ◇ $F_k = \dfrac{\dfrac{2}{3^k}}{\dfrac{2^k}{3^{k-2}}}$

◇ $G_k = \left(\dfrac{2}{7}\right)^{-k-1}$ ◇ $H_k = (-1)^k \times 2^{3k+2}$ ◇ $I_k = 5^{k+2} - 5^k$

◇ $J_k = a^{2-k}$ ◇ $M_k = \dfrac{5}{x^{k+2}} + \dfrac{3}{x^k}$ ◇ $N_k = 3^{k+1} - 5 \times 3^{k-1}$

▶ 5

Ramener à la forme $a\,k \times x^{k-1} + b \times x^k$ les expressions suivantes :

◇ $A_k = (2k-7) \times 3^{-k-1}$ ◇ $B_k = \dfrac{3k+2}{5^k}$ ◇ $C_k = \dfrac{2k-5}{7^{k+1}}$

◇ $C_k = \dfrac{(k-2) \times 3^{k+1}}{5^k}$ ◇ $D_k = 3k \times 5^k + 5^{k+2}$ ◇ $E_k = \dfrac{5k-4}{2^{-k}}$

▶ 6

1) Simplifier sous la forme $a\sqrt{b}$, l'expression $A = 2\sqrt{27} - 3\sqrt{48}$

2) Simplifier sous la forme $c + a\sqrt{b}$, l'expression $B = \dfrac{1-2\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}$

3) Simplifier sous la forme $c\sqrt{d} + a\sqrt{b}$, l'expression $C = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

4) Simplifier : ◇ $D = \dfrac{\sqrt{t}}{t}$ ◇ $E = \dfrac{t}{\sqrt{t}}$ ◇ $F = \dfrac{t^2}{(\sqrt{t})^3}$

III Factoriser, développer, simplifier

▶ 7

Développer et réduire les expressions suivantes :

1) $A_1 = (a-3)(b+c) - (ac+2b)$ $\quad B_1 = (b^2+a)^2 - a(2b^2+a)$

2) $A_2 = a^2c + (a-b)(b-c)(a+b)$ $\quad B_2 = (3a+2)^2 - (4a+b)(2a-1)$

3) $A_3 = -3 + a(1 + a(2 + b(-1+a)))$ $\quad B_3 = (a-b+c)^2 - (-a-b+c)^2$

4) $A_4 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3$ $\quad B_4 = (a - b\sqrt{2})^2(a + b\sqrt{2})^2$

5) $A_5 = c(1-a)(1-b) + b(1-a)(1-c) + a(1-b)(1-c)$

$B_5 = (ab+ac+bc)(a+b+c) - (a^2+b^2+c^2)(b-c)$

▶ 8

Factoriser les expressions suivantes :

1) $A_1 = (2x-1)(x+3) - 2x + 1$ $\quad B_1 = x^2 + 5x + 6$

2) $A_2 = (x-2)(x+\dfrac{3}{2}) + (2x+3)(x^2-4x+4)$ $\quad B_2 = (3x-1)^2 - (x+5)^2$

3) $A_3 = -5x^2 + 15x - 10$ $\quad B_3 = 4x^2 - 9$

4) $A_4 = x^4 - 2x^2 + 1$ $\quad B_4 = \dfrac{x^2-1}{3} + \dfrac{1+x}{2}$

5) $A_5 = (x+2)(6x-3) - (1-2x)^2$ $\quad B_5 = (5+2x)^2 - 4x - 10$

▶ 9

1) Développer $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

2) En déduire la factorisation de x^3-1 et x^3+1.

suite prochainement

IV Équations, inéquations, inégalités

☞ Revoir les propriétés des polynômes du second degré

☞ **Pour résoudre une équation sans dénominateur, on la met sous la forme $A(x) = 0$ puis on factorise $A(x)$. Le produit de facteurs obtenu sera nul si et seulement si l'un de ces facteurs est nul.**

☞ **Lorsque l'inconnue d'une équation figure au dénominateur, on cherchera à la mettre sous la forme $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$, équation qui équivaut à $A(x) = 0$ et $B(x) \neq 0$.** (*valeurs interdites*)
On est alors ramené au cas précédent.

☞ **Pour résoudre une inéquation sans dénominateur, on la met sous la forme $A(x) \geqslant 0$ (resp. > 0, $\leqslant 0$, < 0) puis on factorise $A(x)$. Un tableau de signes détaillé permet de conclure.**

☞ **Lorsque l'inconnue d'une équation figure au dénominateur, on cherchera à la mettre sous la forme $\dfrac{A(x)}{B(x)} \geqslant 0$ (resp. > 0, $\leqslant 0$, < 0), puis à factoriser $A(x)$ et $B(x)$.** On obtiendra ainsi un quotient de facteurs dont on pourra construire le tableau de signe (sans oublier de préciser les valeurs interdites)

▶ 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) a. $5x - (x-4) = 4(x+2)$

1) b. $3(x-3) - \dfrac{1}{2}x = 5\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{4}{5}\right)$

2) a. $-3x^2 + 12x + 6 = 0$

2) b. $2x^3 - x^2 + 2x = 0$

3) a. $(x+1)^2 = (x-1)^2$

3) b. $(x^2 - 4x - 2)(-2x^2 + 3x + 4) = 0$

4) a. $(4x^2 - 1)^2 = (2x-1)^2$

4) b. $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} = 0$

5) a. $\dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{5x}{x+2} - 4$

5) b. $\dfrac{x}{x-3} = \dfrac{x+2}{(x-3)^2} - 1$

▶ 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) a. $3x - \dfrac{x-1}{3} \geqslant \dfrac{1}{3} - x$

1) b. $\dfrac{x-3}{2} > 2x - \dfrac{3x+1}{2}$

2) a. $8x^2 + 8x + 2 \leqslant 0$

2) b. $-x^2 - 3x + 10 < 0$

3) a. $(2x+3)(3x-5)(7-x) < 0$

3) b. $2x(x+1) \geqslant (1-3x)(x+1)$

4) a. $\dfrac{(x-1)^2(x+5)}{x-4} \geqslant 0$

4) b. $\dfrac{x+3}{x^2-1} \geqslant \dfrac{3}{x-1}$

5) a. $\dfrac{x}{x-2} - 2 \geqslant \dfrac{-x+3}{x+1}$

5) b. $x + \dfrac{1}{x} < 4$

V Récurrence, suites

▶ 12

La suite (S_n) est définie par $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + (n+1)$.

1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2) Écrire S_1, S_2, $S_3, \dots,$ S_n sous la forme d'une somme et retrouver le résultat précédent grâce au cours sur les suites arithmétiques.

3) En déduire la valeur de $0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 2n$, sans utiliser $\cdots$.

▶ 13

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -u_n + 2$.

1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + (-1)^n$.

2) Calculer la valeur de u_n en distinguant n pair et n impair.

▶ 14

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{1}{2}$.

1) Calculer les 5 premiers termes de la suite u_n.

2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -1 + 2^{-n}$.

▶ 15

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + n - 1$.

1) Calculer les premiers termes de (u_n) pour n allant de 1 à 5.

2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - n$.

▶ 16

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$.
Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 3^n$.

▶ 17

La suite (u_n) est définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + u_n}$.

1) Calculer les premiers termes de la suite (u_n), de u_1 à u_5.

2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

▶ 18

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.
Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

▶ 19

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 3$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$.

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

2) En déduire v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

3) Retrouver ce résultat par récurrence.

▶ 20

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 1$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$.

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

2) En déduire v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

3) Retrouver ce résultat par récurrence.

▶ 21

Soit x un réel fixé, différent de 1.
La suite (S_n) est définie par $S_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + x^n$.

1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

2) Écrire S_1, S_2, $S_3, \dots,$ S_n sous la forme d'une somme et retrouver le résultat précédent grâce au cours sur les suites géométriques.

3) Donc $S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

a. En déduire, pour $0 < q < 1$, la valeur de $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

b. Idem pour $U = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{q}{3}\right)^k$, $V = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{q^k}{(1+q)^k}$, et $W = (1-q)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^{2k}$.

VI Dérivée d'une fonction

☞ Revoir les formules de dérivées en Annexes (à la fin du cahier)

☞ **Choisir la meilleure formule, celle qui donne le moins de calcul**

Exemples :

▷ Si $f(x) = \dfrac{3}{(5\sin(x)+2)^2}$, on écrira $f(x) = 3 \times (5\sin(x)+2)^{-2}$.

$f = 3u^{-2}$, donc $f' = -6u^{-3} \times u' = -\dfrac{6u'}{u^3}$. Finalement : $f'(x) = \dfrac{-30\cos(x)}{(5\sin(x)+2)^3}$

Faites le calcul avec $f = \dfrac{u}{v}$ puis avec $f = \dfrac{1}{u}$ et comparer la longueur des calculs.
Les résultats doivent être identiques après simplification.

▷ Si $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{5}$, on écrira $f(x) = \dfrac{1}{5}\ln(x)$, donc $f'(x) = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{5x}$

▶ 22

Calculer les fonctions dérivées des fonctions définies par :

1) $f_1(x) = x^3 \ln(x)$ $\qquad g_1(x) = (e^x+1)^4$

2) $f_2(x) = x\,e^{2x-1}$ $\qquad g_2(x) = \ln(3x^2+1) - 4e^{-x}$

3) $f_3(x) = \dfrac{\sin(2x)+\cos(x)}{2}$ $\qquad g_3(x) = \dfrac{3}{1+e^x}$

4) $f_4(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ $\qquad g_4(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

5) $f_5(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ $\qquad g_5(x) = e^x \ln(x)$

▶ 23

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

1) Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

2) Étudier le signe de $f'(x)$. *(Réduire au même dénominateur)*

3) En déduire les variations de f sur $]0, +\infty[$.

4) Étudier les limites en f. *(en $+\infty$, utiliser* $\ln(a) - \ln(b) = \cdots$*)*

5) En déduire que, pour tout $x > 0$, on a : $\ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x+1}$.

▶ 24

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln(x)$.

1) Étudier le signe de $f(x)$ selon x. Qu'en déduit-on pour la courbe ?

2) Calculer les valeurs exactes de $f(1)$, $f(e)$, $f\left(\dfrac{1}{e}\right)$, $f(e^2)$, $f(\sqrt{e})$.

3) Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

4) Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

5) Étudier le signe de $f'(x)$. *(factoriser et résoudre une inéquation)*

6) En déduire les variations de f sur $]0, +\infty[$.

▶ 25

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)e^x$.

1) Étudier le signe de $f(x)$ selon x. Qu'en déduit-on pour la courbe ?

2) Déterminer les limites de f en 0^+, 0^-, $-\infty$ et en $+\infty$.

3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.

4) Montrer que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
(on pourra considérer le signe du trinôme $y^2 - y + 1$)

5) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

▶ 26

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel fixé et
f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x(1-x)^n$.

1) Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à $[0, 1]$.

2) Étudier le signe de $f'(x)$. *(factoriser et inéquation de degré 1)*

3) En déduire le maximum de f sur $[0, 1]$.

VII Calcul de primitives

☞ Une primitive F de la fonction f est une fonction vérifiant $F' = f$.

☞ Revoir les formules de primitives en Annexes (à la fin du cahier)

☞ **primitive d'un produit :** il faut se ramener à une des formules :

$$\alpha u' u^n, \quad \alpha u' \mathrm{e}^u, \quad \alpha u' \sin(u), \quad \alpha u' \cos(u)$$

☞ **primitive d'un quotient :** il faut se ramener à une des formules :

$$\alpha \frac{u'}{u}, \quad \alpha \frac{u'}{u^n} = \alpha u' u^{-n}, \quad \alpha \frac{u'}{\sqrt{u}} = \alpha u' u^{-1/2}$$

(*à part le premier cas, on préfère souvent les produits aux quotients*)

Exemples :

▷ Si $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+2)^2}$, on écrira $f(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x \times (x^2+2)^{-2}$.

$f = \dfrac{1}{2} u' u^{-2}$, donc $F = \dfrac{1}{2} \dfrac{u^{-1}}{-1} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{u}$. Finalement : $F(x) = \dfrac{-1}{2(x^2+2)}$

▷ Si f est définie pour $x > 1$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x \ln(x)}$,

on reconnaîtra d'abord que si $u(x) = \ln(x)$, alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$.

On écrira alors $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{\ln(x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$, donc $F(x) = \ln\big(\ln(x)\big)$.

▶ 27

1) Vérifier que la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction ln. (*il suffit de vérifier que $F' = ????$*)

2) Déterminer le réel a tel que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (a - x)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de la fonction $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$.

▶ 28

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = x^4 + 2x^3 - 4x + 7$ $\qquad g_1(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + 3\mathrm{e}^{2x}$

2) $f_2(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad g_2(x) = \dfrac{x^3}{5} - \dfrac{2}{x^3}$

3) $f_3(x) = \sin(x) - 3\cos(3x)$ $\qquad g_3(x) = \dfrac{3}{1+x}$

▶ 29

Mettre ces fonctions sous la forme $\alpha u' u^n$ et en déduire une primitive.($n \in \mathbb{Z}$)

1) $f_1(x) = 8x(x^2+7)^5$ $\qquad g_1(x) = \dfrac{1}{x}\big(\ln(x)\big)^3$

2) $f_2(x) = \sin(x)\cos(x)$ $\qquad g_2(x) = \big(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\big)\big(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\big)^2$

3) $f_3(x) = \dfrac{1}{x\big(\ln(x)\big)^2}$ $\qquad g_3(x) = \dfrac{x^3}{(x^4+1)^3}$

▶ 30

Déterminer une primitive de chacune des fonctions de la colonne de gauche. Pour cela, vous identifierez la formule à utiliser dans la colonne de droite.

(1) $f_1(x) = 3x\mathrm{e}^{x^2+1}$	**(a)** $\alpha u' \sin(u)$
(2) $f_2(x) = 3\cos(4x+1)$	**(b)** $\alpha u' \mathrm{e}^u$
(3) $f_3(x) = \dfrac{x-4}{x^2-8x+3}$	**(c)** $\alpha \dfrac{u'}{u}$
(4) $f_4(x) = \cos(x)\sin^3(x)$	**(d)** $\alpha u' \cos(u)$
(5) $f_5(x) = \dfrac{3x^2+x}{\sqrt{2x^3+x^2}}$	**(e)** $\alpha u' u^n$
(6) $f_6(x) = \mathrm{e}^{2x}\sin\big(\mathrm{e}^{2x}\big)$	**(f)** $\alpha \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$

▶ 31

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

1) $f_1(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad g_1(x) = \sin(x)\mathrm{e}^{\cos(x)}$

2) $f_2(x) = \sin(x)\cos^2(x)$ $\qquad g_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

3) $f_3(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ $\qquad g_3(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}$

4) $f_4(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3}$ $\qquad g_4(x) = \dfrac{1}{x}\ln(x)$

5) $f_5(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ $\qquad g_5(x) = \dfrac{x+3x^2}{\big(1+x^2+2x^3\big)^2}$

Annexes

I Fonction logarithme népérien

◇ La fonction ln est définie, continue et dérivable sur $\mathcal{D} =]0;+\infty[$.

◇ **Dérivée :** si, pour tout $x > 0$, $f(x) = \ln(x)$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

◇ La fonction ln est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

◇ **Valeurs essentielles :** $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

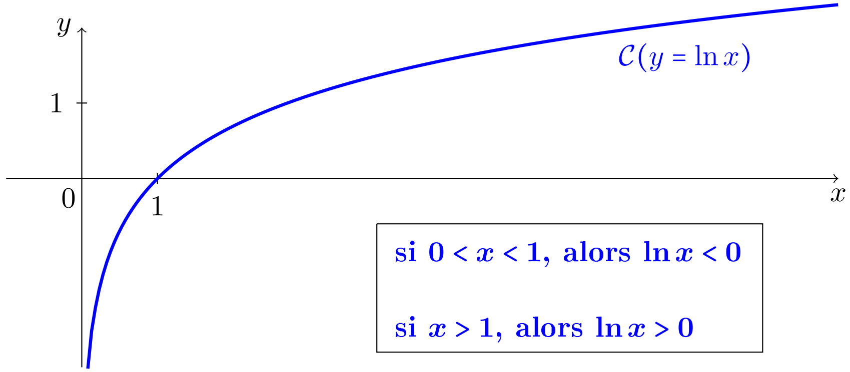
◇ Pour tout $a > 0$, tout $b > 0$ et **tout réel c**, on a :

- $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$
- $\ln(a) < \ln(b) \iff 0 < a < b$
- $\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)}$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a) = c \iff a = \mathrm{e}^c$
- $\ln(a^c) = c\ln(a)$

◇ **Limites à connaître :**

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

◇ Il faut connaître la courbe de la fonction ln et le signe de $\ln x$ selon x :



si $0 < x < 1$, alors $\ln x < 0$

si $x > 1$, alors $\ln x > 0$

II Fonction exponentielle de base e

◇ La fonction exp est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

◇ $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ et $\mathrm{e}^x > 0$ $(\mathrm{e} \approx 2.718)$.

◇ **Dérivée :** si, pour tout x, $f(x) = \mathrm{e}^x$ alors $f'(x) = \mathrm{e}^x$.

◇ La fonction exp est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

◇ **Valeurs essentielles :** $\mathrm{e}^0 = 1$ et $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

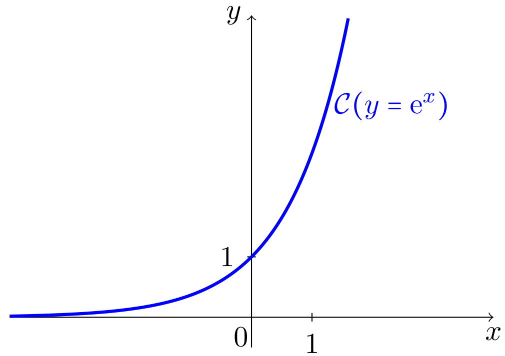
◇ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}$ et **tout $c > 0$**, on a :

- $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b$
- $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \iff a < b$
- $\boxed{\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b}$
- $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$
- $\mathrm{e}^a = c \iff a = \ln(c)$
- $(\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{ab}$

◇ **Limites à connaître :**

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$

◇ Courbe



◇ Il faut savoir que les fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y > 0,\ \text{on a :}\quad y = \mathrm{e}^x \iff \ln(y) = x.$$

III Fonctions puissance

III. 1 Définitions des puissances d'un réel x

exposant r	base x	puissance x^r
$n \in \mathbb{N}^*$	$x \in \mathbb{R}$	$x^1 = x$ et $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$
$n = 0$	$x \in \mathbb{R}$	$x^0 = 1$, en particulier : $0^0 = 1$
$-n$ entier négatif	$x \in \mathbb{R}^*$	$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ donc $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$
$\frac{1}{2}$	$x \geqslant 0$	$\sqrt{x} = x^{1/2}$
r réel quelconque	$x > 0$	$x^r = \mathrm{e}^{r\ln(x)}$ (*car* $\ln(x^r) = r\ln(x)$)

Remarque : Quand deux définitions s'appliquent, elles donnent le même résultat.

Proposition

Lorsque les calculs sont possibles (voir définition), on a les propriétés :

$$\boldsymbol{a^n a^p = a^{n+p} \quad ; \quad a^n b^n = (ab)^n \quad ; \quad (a^n)^p = a^{np}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \quad ; \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n ; \quad \ln(a^n) = n\ln(a)}$$

En particulier, **si** $\boldsymbol{a \geqslant 0}$ **et** $\boldsymbol{b \geqslant 0}$, alors

$$\boldsymbol{\sqrt{0} = 0 \; ; \; \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \; ; \; (\sqrt{a})^2 = a \quad ; \quad \text{si } b > 0, \; \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

De plus, on a :

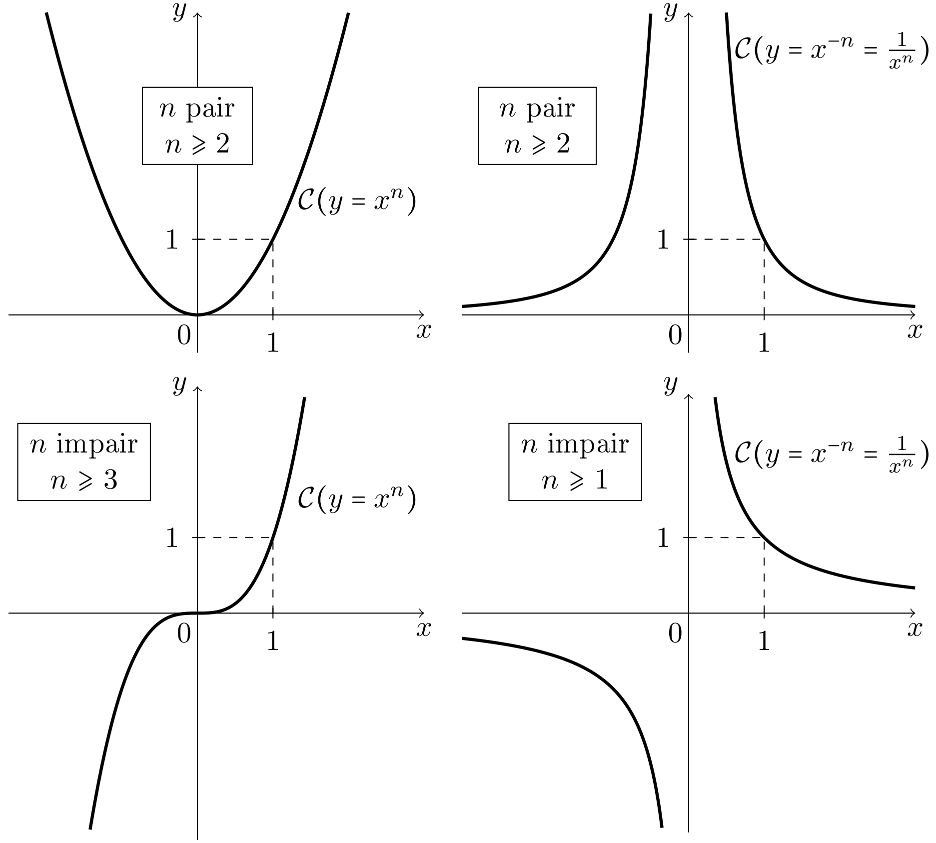
Pour tout $A \in \mathbb{R}$, $\sqrt{A^2} = |\,A\,|$

$\sqrt{A} = B \iff (A = B^2$ **et** $B \geqslant 0)$ (*Résolution d'équation*)

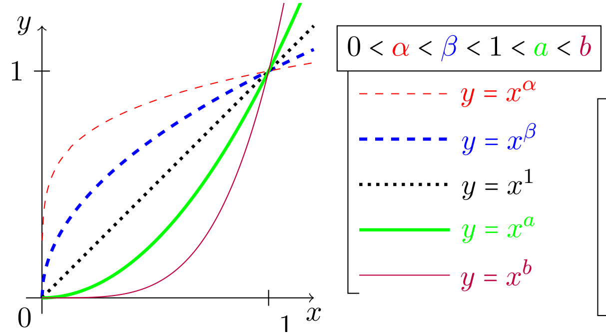
$\sqrt{a}$ existe si et ssi $a \geqslant 0$ et, dans ce cas, $\sqrt{a} \geqslant 0$.

III. 2 Courbes des fonctions puissance

▷ **Si l'exposant est un entier relatif**



▷ **Si l'exposant est un réel quelconque**



ATTENTION

Si $\boldsymbol{n \leqslant m}$, alors :

$\boldsymbol{x \geqslant 1 \implies x^n \leqslant x^m}$

mais

$\boldsymbol{0 \leqslant x \leqslant 1 \implies x^n \geqslant x^m}$

IV Calcul de dérivées

Fonction	Dérivée
$f = \alpha u + \beta v$	$f' = \alpha u' + \beta v'$
$f = u\,v$	$f' = u'v + u\,v'$
$f = \dfrac{u}{v}$	$f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$f = \dfrac{1}{u}$	$f' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$f = u^n$	$f' = nu^{n-1} \times u'$

Fonction	Dérivée
$f = \sqrt{u}$	$f' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$
$f = \ln(u)$	$f' = \dfrac{1}{u} \times u' = \dfrac{u'}{u}$
$f = \mathrm{e}^u$	$f' = \mathrm{e}^u \times u'$
$f = \sin(u)$	$f' = \cos(u) \times u'$
$f = \cos(u)$	$f' = -\sin(u) \times u'$

V Calcul de primitives

Si U et V sont respectivement des primitives des fonctions u et v sur un même intervalle I et si α et β sont 2 constantes réelles, alors on a :

fonction f	une primitive F
$f = \alpha\, u + \beta\, v$	$F = \alpha\, U + \beta\, V$
$f = \alpha\, u' \times u^n$, $\boxed{n \neq -1}$	$F = \alpha\, \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$f = \alpha\, \dfrac{u'}{u}$ $(n = -1)$	$F = \alpha \ln\left(\lvert u \rvert\right)$
$f = \alpha\, \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\alpha\sqrt{u}$
$f = \alpha\, u' \times \mathrm{e}^u$	$F = \alpha\, \mathrm{e}^u$
$f = \alpha\, u' \times \sin(u)$	$F = -\alpha\, \cos(u)$
$f = \alpha\, u' \times \cos(u)$	$F = \alpha\, \sin(u)$

VI Récurrence, suites