Chapitre 0

Révisions : Suites, fonctions, polynômes

Consignes.

On reprend dans ce chapitre les principaux résultats du programme d'ECG sur les suites réelles, les fonctions réelles d'une variable réelle et les polynômes. Rien de nouveau donc, mais il est essentiel de s'assurer que tous les résultats de ce chapitre sont connus, et de combler vos lacunes éventuelles dès maintenant. Ce travail est à faire avec le plus grand sérieux durant les vacances d'été. C'est votre dernière occasion de vous mettre à jour sur ces notions. ***Ce chapitre fera l'objet de la première interrogation de cours le jour de la rentrée.***

Tous les documents de cours sont disponibles sur le site `mathieu-mansuy.fr/ecg2/`.

Mathieu Mansuy

Professeur en ECG deuxième année spécialité mathématiques approfondies au Lycée Louis Pergaud (Besançon)

Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`

E-mail : `mathieu.mansuy@ac-besancon.fr`

1 Suites réelles

Compétences attendues.

- ✓ Savoir identifier et déterminer l'expression explicite d'une suite géométrique, arithmétique, arithmético-géométrique et d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients réels.
- ✓ Savoir justifier la convergence ou la divergence d'une suite par monotonie ou théorèmes de comparaison.
- ✓ Savoir montrer que deux suites sont adjacentes, donc convergentes vers la même limite.
- ✓ Déterminer la limite d'une suite par comparaison, manipulation d'équivalents.

À vous de vous assurer, à l'issue de chaque chapitre, que ces compétences sont bien acquises !

1.1 Exemples de suites réelles

Résultat important à bien regarder !

Propriété 1 (Suites arithmétiques, suites géométriques)

- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite *arithmétique* lorsqu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

Expression explicite : pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$.

- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite *géométrique* lorsqu'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

Expression explicite : pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, $u_n = q^{n-n_0}u_{n_0}$.

Définition.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmético-géométrique* lorsqu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 1$, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b. \tag{1}$$

Méthode. Expression explicite d'une suite arithmético-géométrique.

Pour obtenir l'expression explicite d'une suite arithmético-géométrique (u_n), on procèdera comme suit :

(i) on cherche le point fixe, c'est-à-dire le réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\alpha = a\alpha + b. \tag{2}$$

(ii) En faisant (1) – (2), *on obtient :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_{n+1} - \alpha) = a(u_n - \alpha).$$

On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \alpha$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.

(iii) On donne l'expression explicite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on en déduit celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = -u_n + 4. \qquad (1)$$

Déterminer l'expression explicite de (u_n).

Rédaction.
Toujours commencer par bien identifier le « type » de suite auquel on a affaire, et donc le résultat de cours qu'il faudra utiliser.

On est ici dans le cas d'une suite arithmético-géométrique. On en cherche le point fixe :

$$\alpha = -\alpha + 4 \qquad (2) \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = 2.$$

En faisant à présent $(1) - (2)$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(u_{n+1} - \alpha) = -(u_n - \alpha) \qquad \Leftrightarrow \qquad v_{n+1} = -v_n$$

en posant $v_n = u_n - \alpha$. Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison (-1). On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = (-1)^n v_0 = (-1)^n(1-2) = (-1)^{n+1}$$

et donc l'expression explicite de (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + \alpha = (-1)^{n+1} + 2.$$

Propriété 2 (Relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients réels)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait une *relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients réels* s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Expression explicite : On résout l'équation caractéristique $x^2 = ax + b$.

- S'il y a deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2, alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$.
- S'il y a une unique solution réelle x_0, alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\alpha + \beta n)x_0^n$.

Pour déterminer α et β, on utilise deux termes de la suite (habituellement u_0 et u_1).

Exercice. Étude de la *suite de Fibonacci*.
Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Déterminer une expression explicite de F_n en fonction de n.

Remarquons tout d'abord qu'il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On résout son équation caractéristique :

$$x^2 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0.$$

Posons $P(x) = x^2 - x - 1$. P admet deux racines réelles distinctes $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. D'après le théorème précédent, on peut donc affirmer l'existence de $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$$

Les cas $n = 0$ et $n = 1$ conduisent à résoudre le système (E) : $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda x_1 + \mu x_2 = 1 \end{cases}$.

Or :

$$(E) \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda(x_1 - x_2) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

D'où finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$

1.2 Convergence des suites réelles

Définition.

- On dit que (u_n) *converge vers* $\ell \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux, ce qui s'écrit en termes quantifiés :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0 \ \Rightarrow \ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

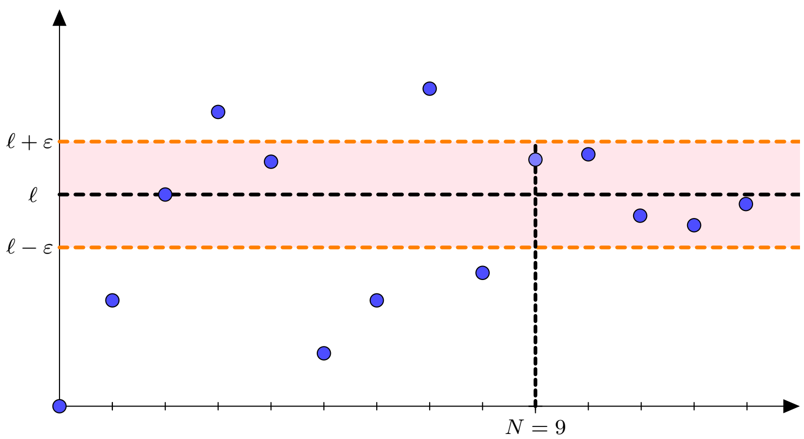
Plus difficile, pour aller plus loin.

- On dit que (u_n) *tend vers* $+\infty$ si pour tout réel a, les u_n sont strictement plus grand que a pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux, ce qui s'écrit en termes quantifiés :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0 \ \Rightarrow \ u_n > a.$$

- On dit que (u_n) *tend vers* $-\infty$ si pour tout réel b, les u_n sont strictement plus petit que b pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux, ce qui s'écrit en termes quantifiés :

$$\forall b \in \mathbb{R}, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0 \ \Rightarrow \ u_n < b.$$



Convergence de la suite (u_n) vers ℓ : pour tout $n \geq N$, u_n est dans la « bande » $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

Le saviez-vous ?

La notion de limite est restée très intuitive durant de nombreux siècles. On en trouve les premières traces dans les arguments du philosophe Zénon d'Élée (5ème siècle avant J.-C.). Il fallut cependant attendre la fin du 18ème pour qu'une première tentative de définition soit proposée par l'encyclopédiste Jean D'Alembert (1717 - 1783), mais elle était fort imprécise. Au début du 19ème siècle, Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857), dans son *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique*, en donne une définition satisfaisante. Cependant, il manquait à tous ces savants une construction précise de l'ensemble des nombres réels. Ceci fut l'œuvre, entre autres, de Karl Weierstrass (1815 - 1897), ce qui lui permit d'introduire la définition précédente, que nous utilisons de nos jours.

Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857).

Propriété 3 (de convergence à partir des suites extraites paires et impaires)

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent **vers la même limite** $\ell \in \mathbb{R}$, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Propriété 4 (*de passage à la limite dans les inégalités*)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers des limites finies ℓ et ℓ' respectivement. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq \ell'$.

Mise en garde.

Les inégalités strictes deviennent larges en passant à la limite. Par exemple, on a $\dfrac{1}{n+1} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \not> 0$.

Théorème 5 (*de la limite monotone*)

- Toute suite **croissante** et **majorée** converge.
  Toute suite **croissante** et **non majorée** diverge vers $+\infty$.
- Toute suite **décroissante** et **minorée** converge.
  Toute suite **décroissante** et **non minorée** diverge vers $-\infty$.

Théorème 6 (*d'encadrement* ou *des gendarmes*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites vérifiant :

(1) $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang ;

(2) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Mise en garde.

Il ne faut pas confondre le théorème des gendarmes et le théorème de passage à la limite dans les inégalités, dont les hypothèses et les conséquences sont très différentes.

- Pour appliquer le théorème de passage à la limite dans les inégalités, il faut savoir au préalable que **toutes** les suites convergent.
- Le théorème des gendarmes est d'une autre nature et démontre deux choses : la **convergence** de la suite encadrée et la valeur de sa limite.

Propriété 7

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

- Si $\begin{cases} u_n \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\begin{cases} u_n \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Définition.

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si :

(1) (u_n) est croissante ; (2) (v_n) est décroissante ; (3) $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Théorème 8 *(des suites adjacentes)*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Alors **elles convergent vers la même limite** $\ell \in \mathbb{R}$, et on a de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

1.3 Relations de comparaison des suites

Dans toute cette section, on suppose que les suites considérées ne s'annulent pas (de sorte que le quotient de deux suites est toujours bien défini).

Négligeabilité

Définition.

On dit que (u_n) *est négligeable devant* (v_n) si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 0. On écrit alors $u_n = o(v_n)$ (notation due au mathématicien Edmund Landau (1877 - 1938)).

Méthode. Comment montrer que $u_n = o(v_n)$?

Pour montrer que $u_n = o(v_n)$, on reviendra à la définition en vérifiant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

Remarques.

- $u_n = o(v_n)$ si, et seulement si, il existe une suite (ε_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \varepsilon_n v_n$.
- $u_n = o(1)$ si, et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{1} = 0$, ce qui équivaut à $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Théorème 9 (*des croissances comparées*)

Soit $(\alpha, \beta, q) \in \mathbb{R}^3$ avec $\alpha, \beta > 0$, et $q > 1$.

$$\ln(n)^\beta = o\left(n^\alpha\right), \quad n^\alpha = o\left(q^n\right), \quad q^n = o(n!), \quad n! = o(n^n).$$

Preuve. Seule la dernière n'a peut-être pas été prouvée en première année. L'idée est de remarquer que $n! = \underbrace{1 \times 2 \times \cdots \times n}_{n \text{ termes}}$ et que $n^n = \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{n \text{ termes}}$, et que donc :

$$\frac{n!}{n^n} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underbrace{\frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n}\frac{n}{n}}_{\leq 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Remarque. En notant $u_n \ll v_n$ au lieu de $u_n = o(v_n)$, le résultat précédent se récrit :

$$\ln(n)^\beta \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n.$$

Exercice. Montrer que $\dfrac{\ln(n)}{n^3} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Étudions si le quotient tend bien vers 0 :

$$\frac{\frac{\ln(n)}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées. Ainsi $\dfrac{\ln(n)}{n^3} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Mise en garde.

La notation $o(w_n)$ ne désigne pas une suite particulière mais toute suite possédant la propriété d'être négligeable devant (w_n). Ainsi, $u_n = o(w_n)$ n'est pas une vraie égalité : si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, on n'a pas nécessairement $u_n = v_n$. Par exemple, on vient d'établir que $\dfrac{\ln(n)}{n^3} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et on montrerait en procédant de même que $\dfrac{1}{n^3} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, alors que $\dfrac{\ln(n)}{n^3} \neq \dfrac{1}{n^3}$.

Équivalence

Définition.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est équivalente à* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on note $u_n \sim v_n$, si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1. On note alors $u_n \sim v_n$.

Remarques.

- Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$. $u_n \to \ell$ si, et seulement si, $u_n \sim \ell$. Ceci n'est en revanche pas vrai si $\ell = 0$: selon notre définition, une suite n'est jamais équivalente à la suite nulle, de sorte qu'on n'écrira jamais $u_n \sim 0$!
- On a (et il est utile de retenir) que :

$$u_n \sim v_n \quad\Longleftrightarrow\quad u_n - v_n = o(v_n) \quad (\text{ou encore } u_n = v_n + o(v_n))$$

puisque :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n - v_n}{v_n}\right) = 0 \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n).$$

- Si $u_n \sim v_n$, alors (u_n) et (v_n) sont de même signe à partir d'un certain rang. En effet, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, alors $\frac{u_n}{v_n} > 0$ à partir d'un certain rang et u_n et v_n sont bien de même signe à partir de ce rang.

Propriété 10 (Opérations sur les équivalents)

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) quatre suites telles que $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$. Alors :

- $u_n \times v_n \sim w_n \times t_n$;
- $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{w_n}{t_n}$;
- pour tout $k \in \mathbb{N}$ **fixé**, $u_n^k \sim w_n^k$;
- si (u_n) et (w_n) sont à termes positifs, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ **fixé**, $u_n^\alpha \sim w_n^\alpha$.

Mise en garde.

Ce sont les seules opérations autorisées pour les équivalents. Ainsi :

- on ne simplifie jamais une constante dans un équivalent : par exemple $\frac{2n+1}{3n^3+n} \sim \frac{2}{3n}$, mais $\frac{2n+1}{3n^3+n} \nsim \dfrac{1}{n}$.
- $\sim$ n'est pas compatible avec la somme : par exemple, $n+1 \sim n+2$ et $-n \sim -n$, mais $1 \nsim 2$.
- $\sim$ n'est pas compatible avec la fonction logarithme : par exemple, $1 + \frac{1}{n} \sim 1 + \frac{1}{n^2}$, mais $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \nsim \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ puisque $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \sim \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n \nrightarrow 1$.
- $\sim$ n'est pas compatible avec la fonction exponentielle : par exemple, $n+1 \sim n$, mais $e^{n+1} \nsim e^n$ puisque $\dfrac{e^{n+1}}{e^n} = e \nrightarrow 1$.

Si on souhaite un équivalent d'une somme ou d'une composée, on effectuera un développement limité.

Exercice. En utilisant des équivalents, déterminer la limite de la suite (u_n) de terme général $u_n = (2n-3)\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)$.

Commençons par noter que $2n-3 \sim 2n$ et que :

$$\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) = \ln\left(\frac{n+2+1}{n+2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n+2}\right).$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = 0$ et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ (équivalent usuel, voir section 2.4), il suit :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n+2}\right) \sim \frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n}.$$

Par produit (opération qui est bien compatible avec les équivalents !), on obtient :

$$u_n \sim (2n) \times \frac{1}{n} = 2.$$

Ainsi $u_n \sim 2$, et la suite (u_n) converge vers 2.

Mise en garde.

Beaucoup trop d'erreurs sont commises sur les relations de comparaisons, notamment sur les équivalents. Si vous avez le moindre doute sur un équivalent, faites le quotient (éventuellement au brouillon) et vérifiez qu'il tend bien vers 1 !

2 Fonctions réelles d'une variable réelle

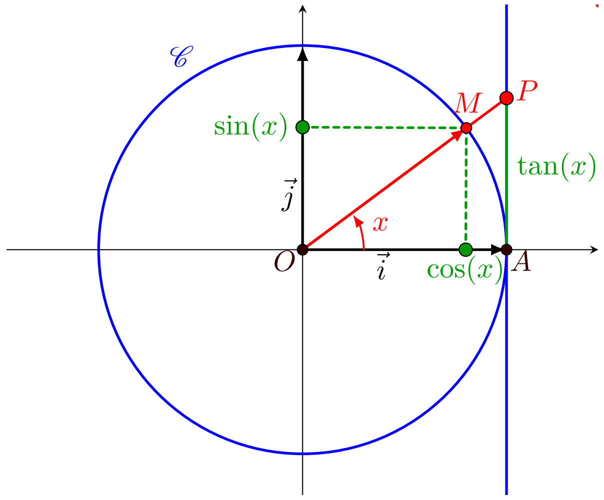
Compétences attendues.

- ✓ Étudier la continuité d'une fonction en un point, prolonger une fonction par continuité en un point.
- ✓ Déterminer la limite d'une fonction à l'aide de comparaisons et d'équivalents usuels.
- ✓ Savoir appliquer le théorème de la bijection pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation.
- ✓ Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point, le caractère $\mathscr{C}^1$.
- ✓ Savoir étudier les variations d'une fonction de la variable réelle (domaine de définition, calcul de la dérivée, tableau de variations, limites aux bornes du domaine, asymptotes éventuelles).
- ✓ Savoir calculer le développement limité d'une fonction par somme ou produit des DL usuels, et en déduire une limite ou un équivalent.
- ✓ Montrer qu'une fonction est convexe/concave en étudiant le signe de sa dérivée seconde, et en déduire des inégalités de convexité (positions relatives courbe/tangente et courbe/corde).

2.1 Fonctions trigonométriques

Définition.

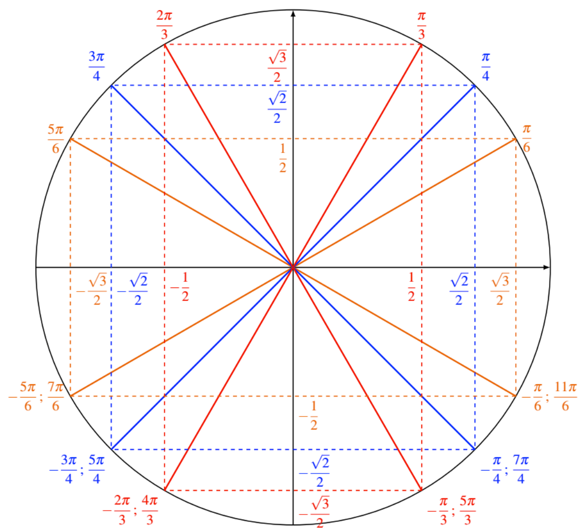
Soit $x \in \mathbb{R}$. Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle unité $\mathscr{C}$ et M le point de $\mathscr{C}$ tel que l'angle orienté de vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ ait pour mesure x.



- On appelle *cosinus du réel* x, et on note $\cos(x)$, l'abscisse du point M.
- On appelle *sinus de* x, et on note $\sin(x)$, l'ordonnée du point M.
- Lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, on appelle *tangente de* x, et on note $\tan(x)$, l'ordonnée de P, point d'intersection de la droite (OM) avec la tangente à $\mathscr{C}$ au point A. Par le théorème de Thalès dans le triangle OAP, on obtient $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Les valeurs remarquables des fonctions trigonométriques sont à connaitre.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0



Il faut également savoir retrouver les relations suivantes par une lecture efficace du cercle trigonométrique.

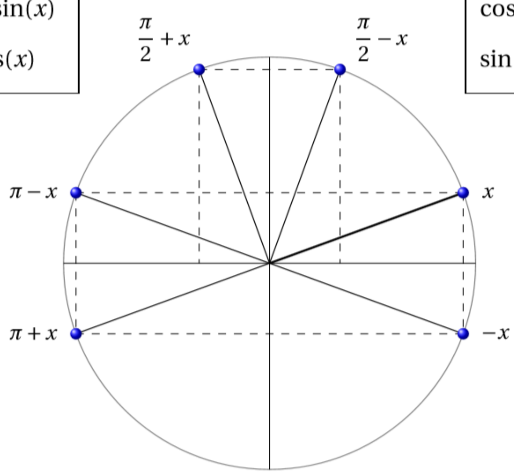
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$$

$$\cos(\pi-x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi-x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi+x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi+x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$



Propriété 11

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \in [-1, 1]$ et $\sin(x) \in [-1, 1]$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

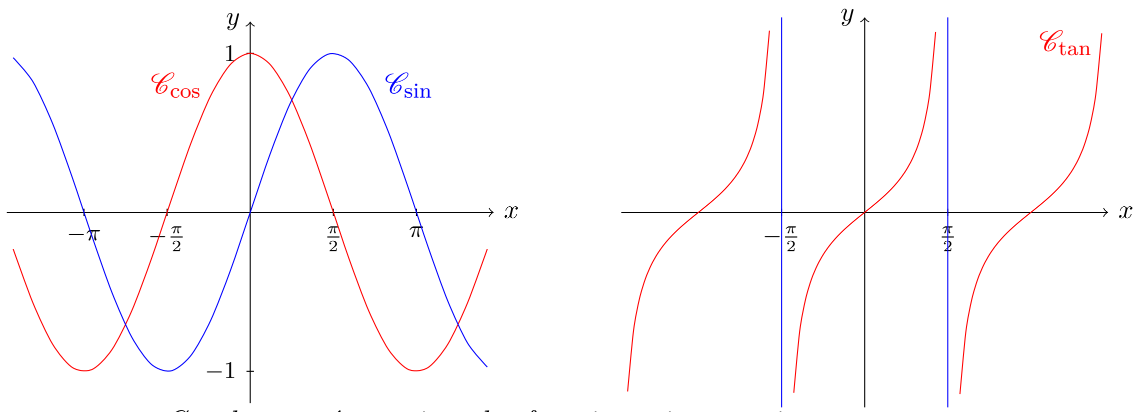
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad ; \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$

Remarque. En prenant $a = b$ dans les formules précédentes, on obtient pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \quad \text{et} \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a).$$

Propriété 12

- La fonction *cosinus* définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos(x)$ est paire et 2π-périodique.
- La fonction *sinus* définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$ est impaire et 2π-périodique.
- La fonction *tangente* définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ par $x \mapsto \tan(x)$ est impaire et π-périodique.



Courbes représentatives des fonctions sinus, cosinus et tangente.

2.2 Limite et continuité d'une fonction d'une variable

Dans toute la suite, f est une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, x_0 est un élément ou une extrémité de I.

Définition.

On dit que f *admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en x_0* si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Lorsque x_0 appartient à I, on dira que f *est continue en x_0*, et dans ce cas $\ell = f(x_0)$. Sinon on dira que f *se prolonge par continuité en x_0* en posant $f(x_0) = \ell$.

On dit que f *est continue sur I* si f est continue en tout point de I.

Remarque. Cette définition s'étend au cas où f est définie sur $I \setminus \{x_0\}$, aux limites à droite $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ et à gauche $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$. On définit de manière analogue les limites en $\pm\infty$ et les limites infinies.
On révisera si nécessaire les opérations sur les limites (somme, produit, quotient et composée).

Propriété 13 (Limites usuelles en 0)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Preuve. Il s'agit de limites de taux d'accroissements en 0. Par exemple, pour $f : x \mapsto \ln(1+x)$ qui est dérivable en 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1, \qquad \text{soit} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

On procède de même pour les deux autres limites. □

Propriété 14 (*Caractérisation séquentielle de la limite*)

On suppose que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors, pour toute suite (u_n) d'éléments de I convergeant vers x_0 :

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell.$$

En particulier, si f est continue en x_0 et si la suite (u_n) converge vers x_0, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

Méthode. Comment montrer qu'une limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ n'existe pas ?

On cherche à contredire la caractérisation séquentielle de la limite : pour cela, on cherche deux suites (u_n) et (v_n) convergeant vers x_0 et telles que $\lim f(u_n)$ et $\lim f(v_n)$ existent et sont distinctes.

Exercice. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

> On utilise la (contraposée de la) caractérisation séquentielle de la limite. Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par :
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2n\pi \quad \text{et} \quad v_n = (2n+1)\pi.$$
>
> Ces deux suites tendent vers $+\infty$, et satisfont de plus :
>
> $$f(u_n) = \cos(2n\pi) = 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad f(v_n) = \cos((2n+1)\pi) = \cos(\pi) = -1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -1.$$
>
> Puisque $-1 \neq 1$, on peut donc conclure par la proposition précédente que f n'a pas de limite en $+\infty$.

Exemple. Limites éventuelles des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.
Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue, et soit (u_n) une suite définie par :

$$u_0 \in [a,b] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (*)$$

Si (u_n) **converge** vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$, alors cette limite est nécessairement un *point fixe* de f sur $[a,b]$, c'est-à-dire :

$$\ell = f(\ell).$$

En effet puisque f est continue, on obtient en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans $(*)$ que $\ell = f(\ell)$ (par caractérisation séquentielle de la limite).

Pour aller plus loin.

Pour l'étude des suites récurrentes d'ordre 1, je vous renvoie au

☞ **Complément de cours 0. Méthodes d'étude d'une suite récurrente d'ordre 1.** disponible à l'adresse `mathieu-mansuy.fr/ecg2`.

Propriété 15 (Continuité en un point)

f est continue en $x_0 \in I$ si, et seulement si, f admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Exercice. Montrer la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Elle est continue sur $\mathbb{R}_-$ car constante, et sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions continues. On vérifie la continuité en 0 :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

Donc f est bien continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$.

Exemple. La fonction *partie entière*.
Rappelons que la *partie entière d'un réel* x, notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier inférieur ou égal à x. Ainsi :

$$\lfloor 0 \rfloor = 0 \quad , \quad \lfloor 2,5 \rfloor = 2 \quad , \quad \lfloor \pi \rfloor = 3 \quad , \quad \lfloor -\pi \rfloor = -4.$$

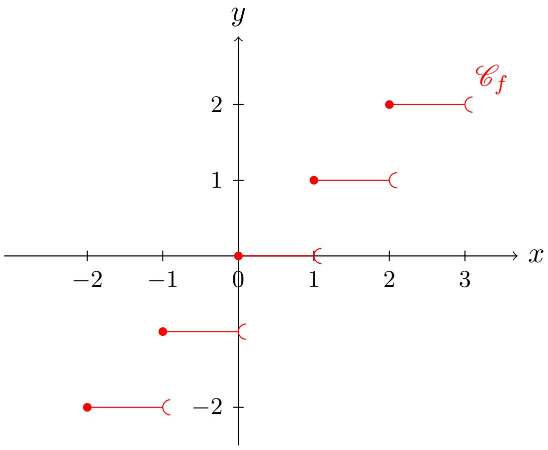
Rappelons également les inégalités définissant la partie entière de x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Astuce.

Ces inégalités sont très utiles en pratique puisqu'elles permettent dans beaucoup de situations de se défaire de la partie entière. Il faut donc parfaitement les connaitre et penser à s'y ramener.

Traçons la courbe représentative de la fonction partie entière $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \lfloor x \rfloor$.



Étudions la continuité de f en 0 :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq f(0)$, la fonction partie entière est discontinue en 0. On peut préciser en disant qu'elle est discontinue à gauche en 0, et continue à droite en 0 (puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$). Plus généralement, la fonction partie entière est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$, mais n'est continue à gauche qu'aux points de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Propriété 16 (Prolongement par continuité)

On suppose que $x_0 \in I$ et que f est définie sur $I \setminus \{x_0\}$.

f est prolongeable par continuité en x_0 si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ existent et sont finies, et que ces limites sont égales.

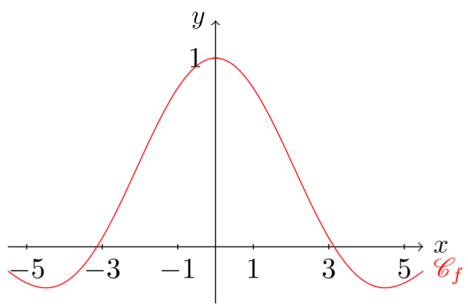
Si on note ℓ cette limite commune, alors f se prolonge par continuité en posant $f(x_0) = \ell$.

Exemple. La fonction *sinus cardinal*.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ comme quotient de fonctions continues. De plus :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

Par le résultat précédent, f est donc prolongeable par continuité en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = 1$. Cette fonction s'appelle communément le *sinus cardinal*.



Courbe représentative de la fonction sinus cardinal.

Exemple. La fonction *puissance*.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la fonction *puissance* p_α sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$p_\alpha(x) = e^{\alpha \ln(x)}, \text{ qu'on notera } x^\alpha.$$

La fonction p_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions qui le sont. De plus :

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\alpha\ln(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}.$$

Ainsi lorsque $\alpha > 0$ (resp. $\alpha = 0$), p_α peut être prolongée par continuité en 0 en posant $p_\alpha(0) = 0$ (resp. $p_\alpha(0) = 1$), ce qui se récrit $0^\alpha = 0$ (resp. $0^0 = 1$). Si $\alpha < 0$, la courbe représentative de p_α admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Notons qu'ici, il nous a suffit de regarder la limite à droite puisque p_α n'est pas définie « à gauche de 0 ».

2.3 Théorèmes d'existence de limites

Propriété 17 (*de comparaisons*)

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in I, \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

Soit x_0 un point ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).

- *Théorème des gendarmes.* Si g et h admettent une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe et vaut ℓ.
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe et vaut $+\infty$.
- Si f et h admettent ℓ et ℓ' pour limites finies respectives en x_0, alors $\ell \leq \ell'$.

Propriété 18 (*de la limite monotone*)

Soit f une fonction croissante[a] sur un intervalle I.

- Supposons que $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
  - Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b.
    Sinon f diverge vers $+\infty$.
  - Si f est minorée, alors f admet une limite finie en a.
    Sinon, f diverge vers $-\infty$.
- Soit $x_0 \in I$. La fonction f admet une limite à gauche et à droite en x_0, et :

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

[a] Le cas d'une fonction décroissante s'énonce de manière analogue.

2.4 Relations de comparaison

Dans toute cette section :

- I désignera un intervalle réel non vide et non réduit à un point, a un point ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$), $\mathscr{D}$ désignera I ou $I \setminus \{a\}$;

- toutes les fonctions considérées seront supposées continues sur $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et supposées non nulles sur $I \setminus \{a\}$ (de sorte que le quotient de deux fonctions est toujours bien défini sur $I \setminus \{a\}$).

Négligeabilité

Définition.

Soient f et $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$. On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note alors $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$.

Théorème 19 (*des croissances comparées*)

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

$$(\ln(x))^\beta \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\alpha), \quad x^\beta \underset{x \to +\infty}{=} o\left(e^{\alpha x}\right), \quad |\ln(x)|^\beta \underset{x \to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad e^{\alpha x} \underset{x \to -\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

Équivalence

Définition.

Soient f et $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$. On dit que f est *équivalente* à g au voisinage de a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$.

Remarque. Si $P : x \in \mathbb{R} \mapsto a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots + a_q x^q$ $(p \geq q)$ est une fonction polynomiale, alors :

$$P(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_p x^p \quad \text{et} \quad P(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_q x^q.$$

Propriété 20 (Équivalents classiques au voisinage de 0)

$$e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}^*$$

$$\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad 1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \tan x \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \arctan x \underset{x \to 0}{\sim} x$$

Propriété 21 (Opérations sur les équivalents)

Soient f, g , u, v quatre fonctions définies sur $\mathscr{D}$. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et si $u(x) \underset{x \to a}{\sim} v(x)$, alors :

- $f(x)u(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)v(x)$;
- $\dfrac{f(x)}{u(x)} \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{g(x)}{v(x)}$;
- $\forall p \in \mathbb{N}$, $f(x)^p \underset{x \to a}{\sim} g(x)^p$;
- pour $\alpha \in \mathbb{R}$, et si f^α et g^α sont bien définies sur $\mathscr{D}$, alors $f(x)^\alpha \underset{x \to a}{\sim} g(x)^\alpha$.

Mise en garde.

L'équivalence **n'est pas compatible avec la somme ou la composition avec les fonctions** ln **ou** exp. Si on souhaite obtenir un équivalent d'une somme ou d'une composée, on effectuera un développement limité.

2.5 Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème 22 (*des valeurs intermédiaires*)

L'image d'un intervalle par une fonction **continue** est un intervalle.

Autrement dit, si I est un intervalle et f une fonction **continue** sur I, alors pour tout $a, b \in I$ avec $a < b$, et pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = y$ admet **au moins une solution** dans $[a, b]$.

Propriété 23 (*des bornes atteintes*)

Une fonction **continue sur un segment** est bornée et atteint ses bornes.

En particulier, l'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est un segment et les bornes sont atteintes :

$$\exists \alpha, \beta \in [a, b], \quad f(\alpha) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \text{ et } f(\beta) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Théorème 24 (*de la bijection*)

On suppose f **continue et strictement monotone** sur un intervalle I. Alors :

- f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

  Autrement dit, pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet **une unique solution** dans I.

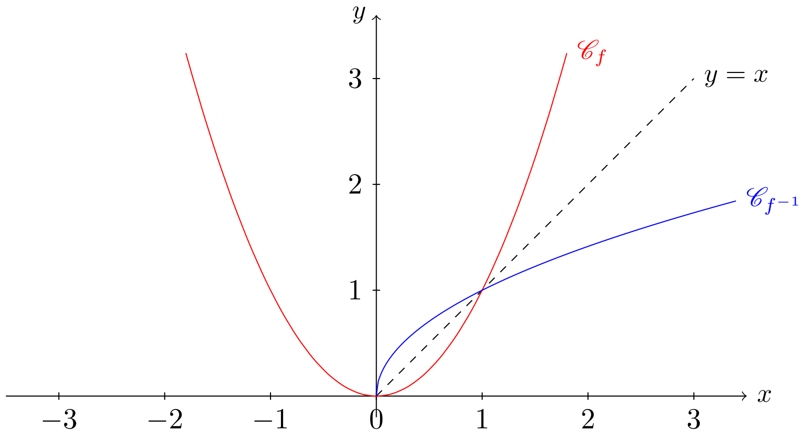
- En notant f^{-1} sa bijection réciproque de J sur I, on a :
  - pour tout $x \in I$ et $y \in J$,
    $$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$
    En particulier :
    $$f^{-1} \circ f(x) = x \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1}(y) = y.$$
  - f^{-1} est continue sur J et a même sens de variation que f ;
  - dans un repère orthonormé, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple. La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est pas bijective : elle n'est ni injective (car $f(-1) = f(1) = 1$), ni surjective (car -1 n'a pas d'antécédent par f).

Considérons la restriction de f sur $\mathbb{R}_+$: elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans l'intervalle $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. On appelle sa bijection réciproque la fonction *racine carré*, notée $f^{-1} : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$. Toujours par le théorème de la bijection, $\sqrt{\ }$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Notons enfin que la fonction racine carrée n'est autre que $p_{1/2}$ puisque $p_{1/2}(0) = 0$, et que pour tout $x > 0$:

$$f \circ p_{1/2}(x) = f(e^{\frac{1}{2}\ln(x)}) = (e^{\frac{1}{2}\ln(x)})^2 = e^{\ln(x)} = x \quad \Rightarrow \quad p_{1/2}(x) = f^{-1}(x).$$



Courbes représentatives des fonctions carré et racine carré, symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Méthode. Expression de f^{-1}.

On pourra dans certains cas obtenir une expression explicite de f^{-1}. Pour cela, on fixe $y \in J$, on résout l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in I$, et on montre qu'elle possède une unique solution $x = f^{-1}(y)$.

Exercice. On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{e^x + 1}$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J à préciser, et déterminer sa bijection réciproque.

> La fonction f est **continue** sur $\mathbb{R}$ comme composée et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est de plus dérivable sur $\mathbb{R}$ pour les mêmes raisons, de dérivée donnée par :
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0.$$
>
> Donc f est **strictement monotone** (décroissante) sur $\mathbb{R}$. De plus, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $J =]0, 1[$.
>
> Tentons de déterminer une expression explicite de f^{-1}. Soit pour cela $y \in]0, 1[$, et résolvons l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
>
> $$y = f(x) \iff y = \frac{1}{e^x + 1} \iff y(e^x + 1) = 1 \underbrace{\iff}_{y \neq 0} e^x = \frac{1}{y} - 1 = \frac{1 - y}{y} \underbrace{\iff}_{\frac{1-y}{y} > 0} x = \ln\left(\frac{1 - y}{y}\right).$$
>
> Ainsi, la bijection réciproque de f est $f^{-1} : y \in]0, 1[\mapsto \ln\left(\dfrac{1 - y}{y}\right)$.

2.6 Dérivation

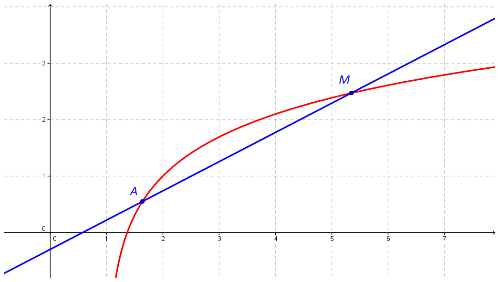
Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f *est dérivable en* a si son *taux d'accroissement* en a :

$$\tau_a(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array} \right.$$

admet une limite finie en a. Cette limite, lorsqu'elle existe, est la *dérivée* de f en a. On la notera $f'(a)$.

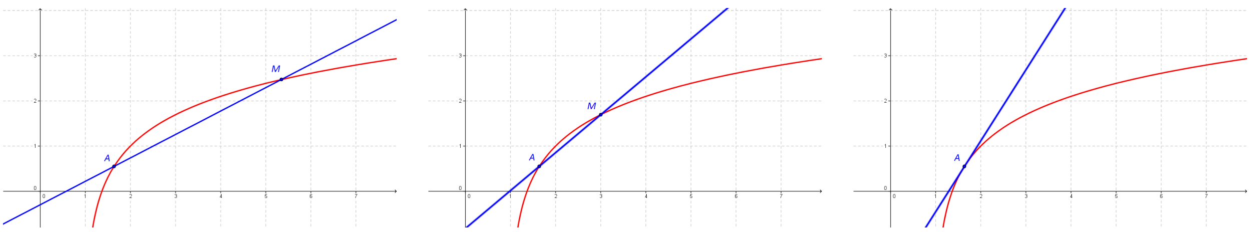
Interprétation géométrique. Fixons $a \in I$ et considérons $m \in I$, $m \neq a$. On note $A(a, f(a))$ et $M(m, f(m))$ un point distinct de A appartenant à la courbe représentative de f.



Rappelons que la droite (ou corde) (AM) a pour équation cartésienne :

$$y = \frac{f(m) - f(a)}{m - a}(x - a) + f(a).$$

Par définition, f est dérivable en a si, et seulement si, le coefficient directeur de la corde (AM) admet une limite finie quand m tend vers a.



Dans ce cas, la position limite de la droite (AM) lorsque M tend vers A est la *tangente* à $\mathscr{C}_f$ au point A. Son coefficient directeur est donc $f'(a)$, et son équation cartésienne est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.
On dit que f est *dérivable à droite* (resp. *à gauche*) en a si $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en a. Si elles existent, on note alors ces limites $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$, appelées *dérivées à droite* ou *à gauche* de la fonction f en a. On appelle alors *demi-tangentes à droite et à gauche* à la courbe les demi-droites définies respectivement par :

$$x \geq a \quad \text{et} \quad y = f'_d(a)(x - a) + f(a),$$

$$x \leq a \quad \text{et} \quad y = f'_g(a)(x - a) + f(a).$$

Remarque. Lorsque le taux d'accroissement a pour limite l'infini à gauche ou à droite, on parle de *demi-tangente verticale.*

Propriété 25

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ qui n'est pas une extrémité. On a l'équivalence :

$$f \text{ est dérivable en } a \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable à gauche en } a \\ f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f'_g(a) = f'_d(a) \end{array} \right.$$

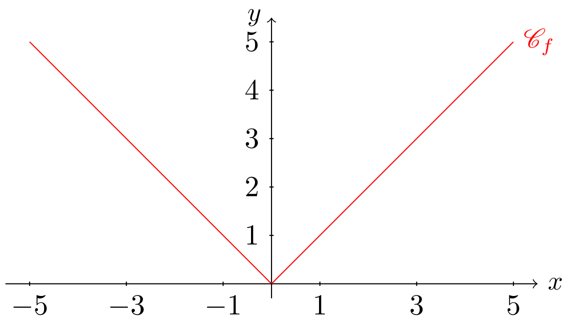
Dans ces conditions, on a $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Remarque. Si $a \in I$ est l'extrémité inférieure (resp. supérieure) de I, f est dérivable en a si, et seulement si, f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a.

Exemple. On sait que la fonction valeur absolue $f : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Étudions sa dérivabilité en 0 :

$$\frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} \to \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \to 0^+ \\ -1 & \text{si } x \to 0^- \end{array} \right.$$

La fonction valeur absolue est donc dérivable à gauche et à droite en 0, de dérivées à gauche et à droite égales à -1 et 1. Elle n'est par contre pas dérivable en 0.



Courbe représentative de la fonction valeur absolue.

Propriété 26 (La dérivabilité implique la continuité)

Si f est dérivable en a, **alors** f est continue en a.

Mise en garde.

La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en un point et non dérivable en ce point. Par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 et non dérivable en 0.

Définition.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ *est dérivable sur* I si elle est dérivable en chaque point de I. On définit alors la fonction dérivée de f, notée f', par $f' : \left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.$.
- On dit que f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.
  On note $\mathscr{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Remarque. Une fonction dérivable n'est pas nécessairement de classe $\mathscr{C}^1$ (la dérivée peut ne pas être continue).

Exemple. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. La fonction puissance $p_\alpha : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions qui le sont sur cet intervalle, et pour tout $x > 0$:

$$p_\alpha'(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln(x)} = \alpha e^{(\alpha-1)\ln(x)} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

On a vu de plus que pour $\alpha > 0$, p_α est prolongeable par continuité en 0 en posant $p_\alpha(0) = 0$. Étudions sa dérivabilité en 0. Pour tout $x > 0$:

$$\frac{p_\alpha(x) - p_\alpha(0)}{x - 0} = \frac{x^\alpha}{x} = \frac{e^{\alpha \ln(x)}}{e^{\ln(x)}} = e^{(\alpha-1)\ln(x)} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}.$$

On en déduit que :

- si $0 < \alpha < 1$, p_α n'est pas dérivable en 0, et sa courbe représentative admet une tangente verticale en 0 ;
- si $\alpha \geq 1$, p_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $p_\alpha'(0) = 0$ (resp. 1) si $\alpha > 1$ (resp. $\alpha = 1$), et même de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ car :

$$\lim_{x \to 0^+} p_\alpha'(x) = \lim_{x \to 0^+} \alpha e^{(\alpha-1)\ln(x)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases} = p_\alpha'(0).$$

Faisons la synthèse des résultats obtenus sur la fonction puissance.

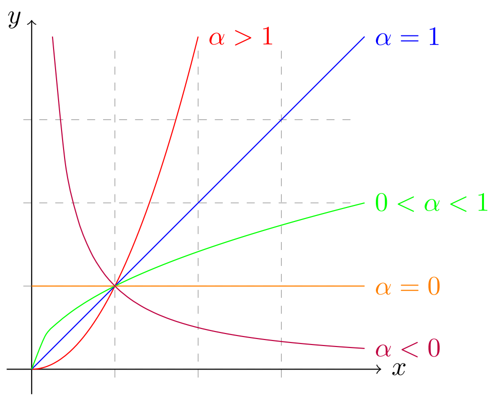
À retenir. La fonction *puissance*.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle *fonction puissance d'exposant* α la fonction p_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$p_\alpha(x) = e^{\alpha \ln(x)}, \text{ qu'on notera } x^\alpha.$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. La fonction puissance d'exposant α est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$p_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$
- Si $\alpha > 0$, la fonction p_α peut être prolongée par continuité en 0 en posant $p_\alpha(0) = 0$.
- Si $0 < \alpha < 1$, p_α n'est pas dérivable en 0, et sa courbe représentative admet une tangente verticale en 0.
- Si $\alpha > 1$, p_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $p_\alpha'(0) = 0$.

On retiendra les différentes allures de la courbe représentative de p_α selon la valeur de α.



2.7 Dérivées usuelles

$f : x \mapsto \dots$	$f' : x \mapsto \dots$	Ensemble de dérivabilité
$\alpha \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}_-^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1+\tan(x)^2 = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

2.8 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 27

Soient f et g deux fonctions dérivables (resp. $\mathscr{C}^1$).

- Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable (resp. $\mathscr{C}^1$) sur I et :
$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$
- $(f \times g)$ est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur I et : $\qquad (f \times g)' = f' \times g + f \times g'.$
- Si g ne s'annule pas sur I, $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur I et :
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}.$$
- Si f est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur I et si g est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur $J \supset f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur I et :
$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

Remarque. Le dernier point de ce théorème permet d'obtenir la dérivée de certaines composées usuelles :

$$(\ln(f))'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad (\exp(f))'(x) = f'(x)\exp(f(x)), \quad (f^\alpha)'(x) = \alpha f'(x) f^{\alpha-1}(x), \quad (\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}},$$

$$(\cos(f))'(x) = -f'(x)\sin(f(x)), \quad (\sin(f))'(x) = f'(x)\cos(f(x)), \quad (\tan(f))'(x) = f'(x)(1+\tan(f(x))^2).$$

Propriété 28 (Dérivabilité de la fonction réciproque)

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I sur un intervalle J. f^{-1} est dérivable sur J si, et seulement si, f est dérivable sur I et f' **ne s'annule pas** sur I. Et dans ce cas :

$$\forall\, y \in J, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Exemple. La fonction tangente est continue sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Elle est de plus dérivable sur cet intervalle, de dérivée :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad (\tan)'(x) = 1 + \tan(x)^2 > 0.$$

Donc tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, on a $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$. Par le théorème de la bijection, tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. On appelle *arctangente* sa bijection réciproque, notée arctan. Toujours par le théorème de la bijection, arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Puisque $\tan'$ ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ par le résultat précédent, de dérivée donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan(\arctan(x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

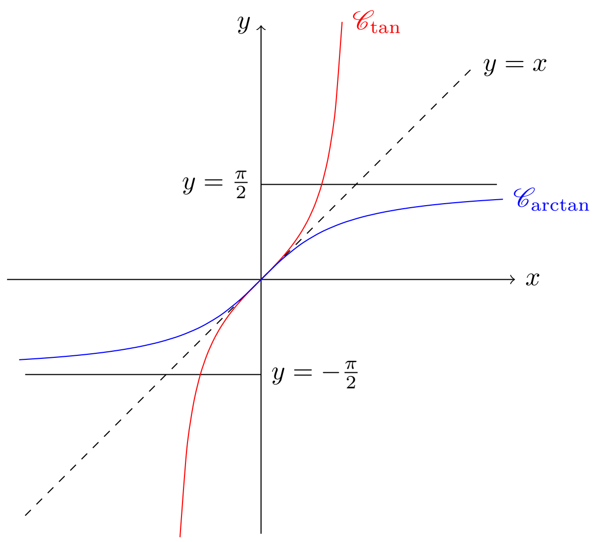
À retenir. La fonction *arctangente*.

La fonction arctangente est la bijection réciproque de la fonction tangente restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Elle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, elle est impaire, de classe $\mathscr{C}^\infty$ (on en rappelle le sens dans la suite), et satisfait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arctan(0) = 0, \quad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

En voici sa courbe représentative (obtenue à partir de celle de tangente par symétrie par rapport à la première bissectrice du plan) :



Son principal intérêt pour nous réside dans l'obtention de primitives :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan(x) + c$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad (a > 0)$$

2.9 Les grands théorèmes

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- f admet un *maximum global* (resp. *minimum global*) en a si :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(a) \qquad (\text{resp. } f(x) \geq f(a)).$$

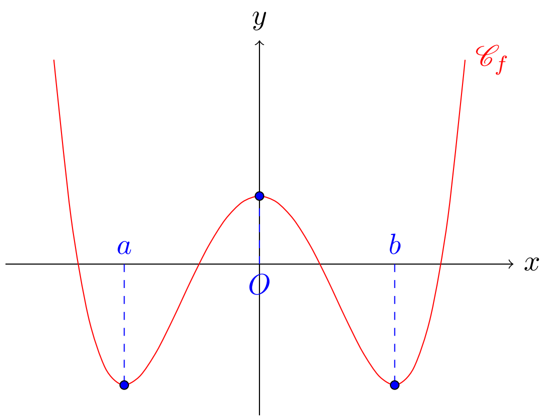
- f admet un *maximum local* (resp. *minimum local*) en a s'il existe un réel $\eta > 0$ tel que la fonction $f_{|I \cap [a-\eta, a+\eta]}$ admette un maximum (resp. minimum) en a, c'est-à-dire :

$$\forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta], \quad f(x) \leq f(a) \qquad (\text{resp. } f(x) \geq f(a)).$$

- On dit que f admet un *extremum local ou global* en a si f admet un maximum ou un minimum local ou global en a.

Exemple. La fonction f représentée ci-contre admet trois extrema locaux :

- un minimum local (et même global) atteint aux points d'abscisse a et b ;
- un maximum local (non global) au point d'abscisse O.



Définition.

On suppose que f est dérivable sur I. On dit que a est un *point critique* de f si $f'(a) = 0$.

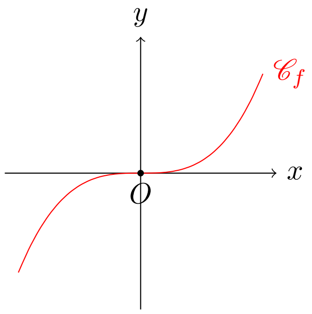
Théorème 29 (Condition nécessaire d'extrémum)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I.

Si f admet un extremum local en un point $a \in I$, **alors** a est un point critique de f.

Mise en garde.

- **La réciproque est fausse** : par exemple, la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ satisfait $f'(0) = 0$, mais f n'admet pas d'extremum local en 0.



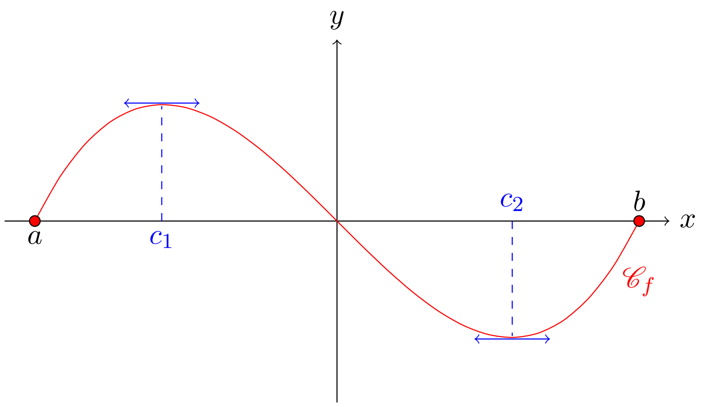
Courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^3$.

- L'hypothèse I **ouvert** est essentielle : par exemple, la fonction $f : x \in [0,1] \mapsto x$ est dérivable sur $[0,1]$, admet un minimum en 0 et un maximum en 1, mais $f'(0) = f'(1) = 1 \neq 0$.

Propriété 30 (*Théorème de Rolle* (1652 - 1719))

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **continue** sur $[a,b]$, **dérivable** sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque. L'élément $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$ n'est pas forcément unique, comme dans l'exemple suivant :



Propriété 31 (*Égalité des accroissements finis*)

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, **continue** sur $[a,b]$ et **dérivable** sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Interprétation géométrique. L'égalité des accroissements finis se récrit $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Elle signifie qu'il existe (au moins) une tangente au graphe de f sur $]a,b[$ qui soit parallèle à la corde (AB), où $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

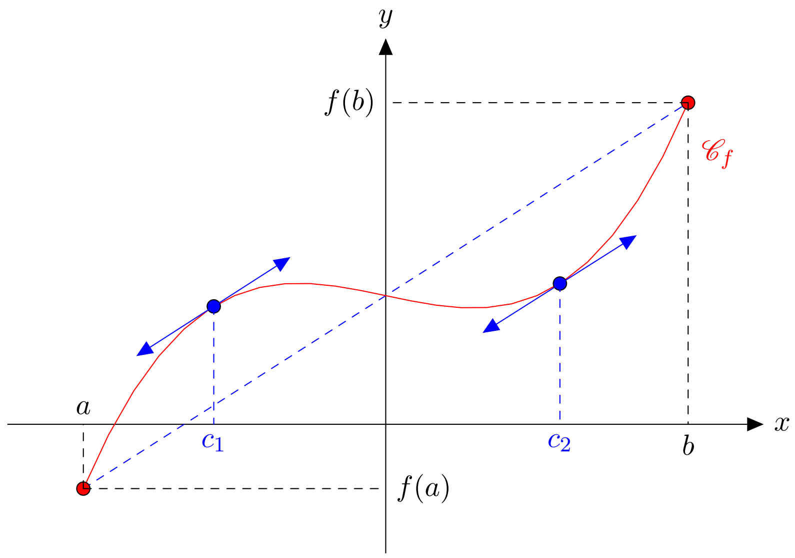


Illustration de l'égalité des accroissements finis.

Cinématiquement, on peut interpréter ce résultat de la manière suivante : si une voiture a réalisé un trajet en roulant à une vitesse moyenne de 80 km/h, alors à un moment du trajet sa vitesse instantanée a été de 80 km/h.

Propriété 32

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est constante sur I si, et seulement si, f' est nulle sur I.
- f est croissante (resp. décroissante) sur I si, et seulement si, f' est positive (resp. négative) sur I.
- f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si, et seulement si, f' est positive (resp. négative) sur I et non identiquement nulle sur aucun intervalle ouvert $]a, b[$ inclus dans I.

  En particulier, si f' est strictement positive (resp. strictement négative), sauf éventuellement en un nombre fini de points de I où f' s'annule, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Exemple. La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x - \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 - \cos(x).$$

f' est donc positive sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 0$ si, et seulement si, $1 = \cos(x)$, soit $x \in \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. f' est donc non identiquement nulle sur aucun intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (elle ne s'annule qu'en des points « isolés » de $\mathbb{R}$). f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème 33 (*Inégalité des accroissements finis*)

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I. S'il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq k$, alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|.$$

Propriété 34 (*Passage à la limite sur la dérivée*)

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et f une fonction **continue sur** I et **de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $I \setminus \{x_0\}$. On suppose que $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ existe et est finie égale à $\ell \in \mathbb{R}$.
Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'(x_0) = \ell$.

Exercice. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- *Continuité.* f est continue sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$ comme composées et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Étudions la continuité en 0.

$$\frac{e^{x^2}-1}{x} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{x} = x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 = f(0).$$

Ainsi f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

- *Classe* $\mathscr{C}^1$*.* f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$ en tant que composées et quotient de fonctions $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas, et :

$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) = \frac{2xe^{x^2} \times x - (e^{x^2}-1)}{x^2} = 2e^{x^2} - \frac{e^{x^2}-1}{x^2}.$$

Regardons la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0 :

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2e^{x^2} - \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = 2 - 1 = 1 \in \mathbb{R}.$$

D'après le théorème de passage à la limite sur la dérivée, f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $f'(0) = 1$.

2.10 Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, $\mathscr{C}^\infty$

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On définit récursivement les dérivées successives de f par :

- $f^{(0)} = f$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ est dérivable sur I, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Si pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$ existe, on dit que f est *n fois dérivable sur I*, et on appelle $f^{(n)}$ *la dérivée n-ième de f sur I.*

Définition.

- Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *de classe $\mathscr{C}^n$ sur I* si f est n fois dérivable sur I, et $f^{(n)}$ est continue sur I. On note $\mathscr{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$.
- $f : I \to \mathbb{R}$ est *de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I* si f est $\mathscr{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques.

- $\mathscr{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I, et $\mathscr{C}^\infty(I)$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I

- f est de classe $\mathscr{C}^n$ si, et seulement si, f' est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$.
- On dispose de la suite d'inclusions strictes : $\mathscr{C}^\infty(I) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathscr{C}^n(I) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathscr{C}^1(I) \subsetneq \mathscr{C}^0(I)$.

Propriété 35 (Opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^n$)

Soient f et g des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I.

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda f + \mu g)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, et : $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
- $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)} \qquad (\textit{formule de Leibniz } {\scriptstyle (1646 - 1716)})$$

- Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
- Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, et g de classe $\mathscr{C}^n$ sur $J \supset f(I)$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

2.11 Formules de Taylor

Théorème 36 (*Formules de Taylor* (1685 - 1731))

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle I, et soit $(a, x) \in I^2$.

- *Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n.*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \mathrm{d}t.$$

- *Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n.*
  On suppose que $|f^{(n+1)}|$ est majorée par un réel M sur I. Alors on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

- *Formule de Taylor-Young à l'ordre n.*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

2.12 Développements limités

Motivation. Les équivalents sont compatibles avec le produit, le quotient, mais pas avec la somme. Nous introduisons dans cette section la notion de développement limité qui permettra notamment de lever des formes indéterminées lorsqu'on rencontrera une somme de fonctions. L'idée est d'approximer localement la fonction considérée par une fonction la plus simple possible, à savoir une fonction polynomiale, dont on fixera le degré (ou l'ordre) en fonction de la précision souhaitée de notre approximation locale.

Dans toute cette section :

- I désignera un intervalle réel non vide et non réduit à un point, a un élément ou une extrémité de I, $\mathscr{D}$ désignera I ou $I \setminus \{a\}$;
- toutes les fonctions considérées seront définies sur $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition.

- On dit que $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ admet un *développement limité en a à l'ordre $n \in \mathbb{N}$* (en abrégé $DL_n(a)$) s'il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{o((x-a)^n)}_{\textit{reste}}.$$

- On suppose que $+\infty$ est une extrémité de I. On dit que f admet un *développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de $+\infty$* (en abrégé $DL_n(+\infty)$) s'il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \underbrace{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{o\left(\frac{1}{x^n}\right)}_{\textit{reste}}.$$

Exemple. La fonction $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet un développement limité à tout ordre en 0. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que :

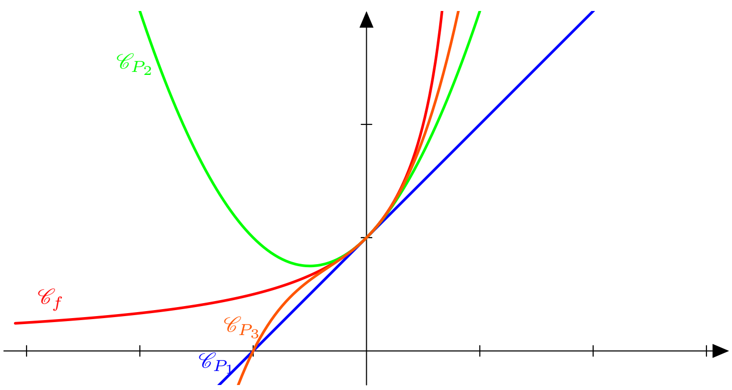
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{x-1}.$$

Comme $\dfrac{x^{n+1}}{x-1} = x^n \times \underbrace{\dfrac{x}{x-1}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0} = o(x^n)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet bien un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donné par :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

Remarque. Si f admet un $DL_n(a)$, f peut être approximée **localement** en a par sa partie régulière. Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ peut être approximée localement en 0 par les parties régulières de son développement limité en 0, par exemple à l'ordre 1 (on approxime f par sa tangente en 1), à l'ordre 2 ou 3 par :

$$P_1(x) = 1 + x \quad ; \quad P_2(x) = 1 + x + x^2 \quad ; \quad P_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3.$$



Plus l'ordre est grand, plus l'approximation de f par sa partie régulière est « bonne » au voisinage de 0. Notons également que les parties régulières ne sont de bonnes approximations de f qu'au voisinage de 0. Un développement limité n'a donc d'intérêt qu'au voisinage de a, ce qui justifie la notation $\underset{x\to a}{=}$ dans l'écriture du développement limité.

Propriété 37 (Unicité d'un développement limité)

Si f admet un développement limité d'ordre n en a, celui-ci est unique.

Propriété 38 (Dérivabilité et développement limité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- f est dérivable en a **si, et seulement si,** f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, et ce développement limité est alors nécessairement :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a).$$

- **Si** f est classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, **alors** f admet un développement limité à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ et en tout point $a \in I$. De plus :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Mise en garde.

Le deuxième point est une conséquence directe de la formule de Taylor-Young. Attention cependant, sa réciproque est fausse : une fonction peut très bien admettre un développement limité d'ordre 2 en un point et ne pas être dérivable deux fois en ce point.

Exercice. Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$ est dérivable en 0, et déterminer sa dérivée en 0.

Par le développement usuel rappelé ci-dessous :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

D'où, pour tout $x \neq 0$:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x).$$

Cette égalité étant aussi valable en $x = 0$, f admet bien un développement limité d'ordre 1 en 0. Par la propriété précédente, f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Théorème 39 (Développements limités classiques au voisinage de 0)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

Astuce.

Voici quelques méthodes pour retenir, retrouver ou contrôler ces formules de développements limités.

- Les DL des fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ s'obtiennent par la formule de Taylor-Young. On retiendra :
  - la présence des factoriels au dénominateur (qui apparaissent déjà dans la formule de Taylor-Young) ;
  - cos (resp. sin) étant une fonction paire (resp. impaire), il n'y a que des termes pairs (resp. impairs) dans son DL. Attention à ne pas oublier l'alternance des signes !

- Le DL de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ se retrouve à partir de la somme des termes d'une suite géométrique comme expliqué plus haut.

  Le DL de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ s'obtient en remplaçant x par $-x$ dans le DL de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

- Le DL de $x \mapsto \ln(1-x)$ s'obtient en primitivant[a] celui de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. On retiendra en particulier :
  - les facteurs $\dfrac{1}{k}$ dus à l'intégration de x^{k-1} ;
  - les signes $-$ dus à l'intégration de $\dfrac{1}{1-x}$ en $-\ln(1-x)$.

  On obtient le DL de $x \mapsto \ln(1+x)$ en remplaçant x par $-x$ dans le DL de $x \mapsto \ln(1-x)$.

- Le DL de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ se déduit de la formule de Taylor-Young, et est à apprendre par coeur. Il permet notamment d'obtenir les DL de $x \mapsto \sqrt{1+x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ (avec $\alpha = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$).

Lors de la recherche du $DL(a)$ d'une fonction f dérivable, on contrôlera enfin ses deux premiers termes a_0 et a_1 en notant que :

$$a_0 = f(a) \quad \text{et} \quad a_1 = f'(a).$$

[a] Aucun théorème du cours ne permet de justifier qu'on a bien droit de le faire. C'est en fait possible, mais hors programme. On y pensera simplement comme un moyen mnémotechnique pour retenir ce DL.

Méthode. Développements limités en un point quelconque.

Les développements limités usuels sont donnés en 0. Lorsqu'on souhaite obtenir le développement limité d'une fonction en $a \neq 0$, on procèdera ainsi :

- *si $a \in \mathbb{R}$: on pose $h = x - a$ et on fait le $DL_n(0)$ de $g(h) = f(a+h)$. On remplace enfin h par $x - a$ dans le développement de g.*
- *si $a = \pm\infty$: on pose $h = \dfrac{1}{x}$ et on fait le $DL_n(0)$ de $g(h) = f(\frac{1}{h})$. On remplace enfin h par $\dfrac{1}{x}$ dans le développement de g.*

Exercice. Calculer les développements limités des fonctions suivantes :

- $DL_3(2)$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$;
- $DL_2(+\infty)$ de $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$.

- On pose $h = x - 2$. On obtient alors :

$$f(x) = f(2+h) = \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{h}{2}}$$

On utilise à présent le DL en 0 de la fonction $x \to \dfrac{1}{1-x}$ calculé précédemment pour obtenir finalement :

$$f(2+h) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + o(h^3)\right)$$

et donc :

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + o((x-2)^3).$$

- On pose $u = \frac{1}{x}$. Alors $g(u) = \dfrac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2)$ et on en déduit le $DL_2(\infty)$ de f :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Propriété 40 (Opérations sur les développements limités)

On peut :

- ajouter deux développements limités en les ajoutant terme à terme ;
- multiplier deux développements limités en multipliant les parties régulières et en tronquant au plus petit des deux ordres.

Exercice. Calculer le $DL_3(0)$ des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto x\cos(x) - \sin(x)$;
- $g : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$;
- $h : x \mapsto \dfrac{e^x}{1-x}$

- À l'aide des DL usuels, et par opérations sur les DL :
$$x\cos(x) - \sin(x) = x - \frac{x^3}{2} - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = -\frac{x^3}{3} + o(x^3).$$
On notera que $f(0) = 0$, ce qui est cohérent avec ce qui a été obtenu puisque le terme constant dans le DL est nul.
- Calculons :
$$\cos(x)\sin(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$
Là aussi, $g(0) = 0$ et le terme constant dans le DL est bien nul.
- À l'aide des DL usuels :
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$
D'où par produit :
$$h(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right),$$
ce qui donne, en développant et en simplifiant :
$$\begin{aligned} h(x) &= 1 + (x + x) + \left(\frac{x^2}{2} + x^2 + x^2\right) + o(x^3) \\ &= 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$
On notera ici aussi que $h(0) = 1$ qui est bien le terme constant du DL.

Propriété 41

Supposons que f admette un développement limité à l'ordre n en a de partie régulière non nulle :
$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$
Alors, en notant p le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$: $\quad f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p$.

Astuce.

On retrouve les équivalents usuels à partir des DL. Par exemple :

- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, soit encore $\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, et donc $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$, et donc $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$.

Exemple. Avec les calculs effectués précédemment, on obtient les équivalents suivants :

$$x\cos(x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{3} \quad , \quad \cos(x)\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \text{et} \quad \frac{e^x}{1-x} \underset{x\to 0}{\sim} 1.$$

Exercice. Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3\sin(x) - x\cos(x) - 2x}{\sin^5(x)}$;
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2}$.

- **Idée.**

  Il s'agit ici d'une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». Pour lever cette indétermination, on va chercher un équivalent du numérateur puis du dénominateur et passer au quotient (ce qui est possible avec des équivalents). Seul problème au numérateur, on a une somme de termes et les équivalents ne passent pas à la somme. Il faut alors bien penser à passer par un DL pour obtenir un équivalent.

  On sait que :

  $$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

  On en déduit :

  $$3\sin(x) - x\cos(x) - 2x \sim -\frac{1}{60}x^5 \quad \text{et} \quad \sin^5(x) \sim x^5,$$

  puis :

  $$\frac{3\sin(x) - x\cos(x) - 2x}{\sin^5(x)} \sim -\frac{\frac{1}{60}x^5}{x^5} \sim -\frac{1}{60}$$

  ce qui nous donne que la limite cherchée vaut $-\frac{1}{60}$.

- On se ramène en 0 en posant $t = x - 1$ et on cherche un équivalent du numérateur :

  $$\ln(1+t) - t = \left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) - t = -\frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

  Il suit que $\ln(1+t) - t \underset{t\to 0}{\sim} -t^2/2$, et donc que $\ln(x) - x + 1 \underset{x\to 1}{\sim} -(x-1)^2/2$. D'où :

  $$\frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{-(x-1)^2}{2(x-1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)-x+1}{(x-1)^2}$ existe bien et vaut $-\dfrac{1}{2}$.

2.13 Fonctions convexes

Définition.

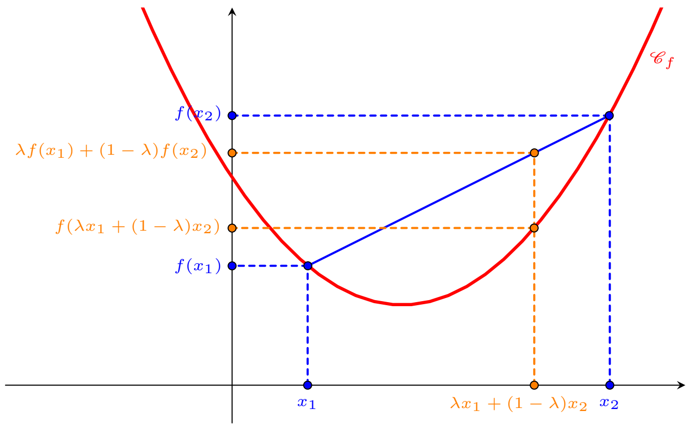
On dit qu'une fonction f est *convexe* sur un intervalle I si :

$$\forall (x_1,x_2)\in I^2, \quad \forall \lambda\in[0,1], \quad f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

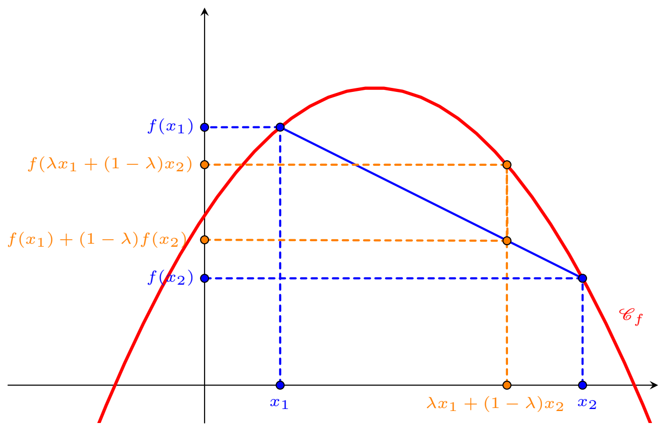
On dit que f est *concave* sur I si $-f$ est convexe sur I, c'est-à-dire si :

$$\forall (x_1,x_2)\in I^2, \quad \forall \lambda\in[0,1], \quad f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

Interprétation graphique.



f est **convexe** : pour tout $(x_1,x_2)\in I^2$, l'image de tout point du segment $[x_1,x_2]$ est **en dessous de la corde** passant par les points $(x_1,f(x_1))$ et $(x_2,f(x_2))$.



f est **concave** : pour tout $(x_1,x_2)\in I^2$, l'image de tout point du segment $[x_1,x_2]$ est **au dessus de la corde** passant par les points $(x_1,f(x_1))$ et $(x_2,f(x_2))$.

Propriété 42

On suppose que f est convexe sur I. Alors :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad \forall (x_1,\dots,x_n)\in I^n, \quad \forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in[0,1]^n,$$

$$\lambda_1+\dots+\lambda_n=1 \quad \Rightarrow \quad f(\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n)\leq \lambda_1 f(x_1)+\dots+\lambda_n f(x_n).$$

Théorème 43 (CNS de convexité pour une fonction $\mathscr{C}^2$)

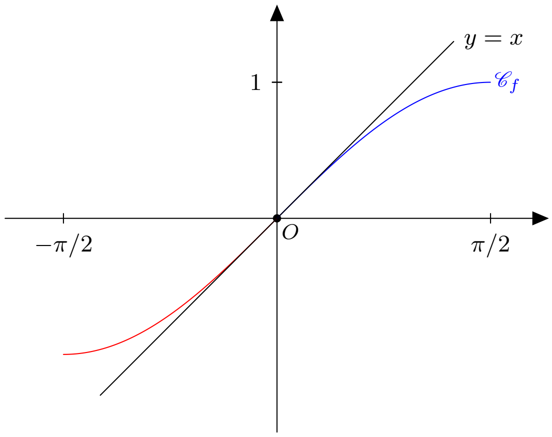
Soit $f : I\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

$$\begin{aligned} f \text{ est convexe sur } I \quad &\Leftrightarrow \quad \mathscr{C}_f \text{ est au dessus de ses tangentes sur } I\\ &\Leftrightarrow \quad f' \text{ est croissante sur } I\\ &\Leftrightarrow \quad \forall x\in I,\ f''(x)\geq 0\end{aligned}$$

Exemple. Étudions la convexité de la fonction sinus sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^2$ sur cet intervalle, et :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (\sin)''(x) = -\sin(x).$$

Notons que $-\sin(x) \leq 0$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, et $-\sin(x) \geq 0$ sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$. La fonction sin est donc concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et elle est convexe sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$. Elle change ainsi de concavité en $(0,0)$: on parle de point d'inflexion de la courbe.



La courbe représentative du sinus change de concavité en O :
elle est convexe sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ (arc représenté en rouge) et concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (arc en bleu).

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et $a \in I$. On dit que $(a, f(a))$ est un *point d'inflexion* de la courbe représentative de f si f'' s'annule au point a en changeant de signe.

Remarque. Soit $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative d'une fonction f. Supposons par exemple qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a-\varepsilon, a]$ et $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, a+\varepsilon]$. Sur $[a-\varepsilon, a]$, f est donc concave et l'arc de courbe correspondant est en dessous de la tangente en A. Et c'est l'inverse sur $[a, a+\varepsilon]$, l'arc de courbe correspondant est au dessus de la tangente en A. On retiendra donc qu'en un point d'inflexion A, la courbe de f traverse sa tangente en A.

Exercice. Montrer les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x.$$

Posons $f : x \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto \sin(x)$. On a établi que f est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Sa courbe représentative est donc au dessus de toutes ses cordes, et en dessous de toutes ses tangentes.

Astuce.

L'équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Pour obtenir l'équation cartésienne de la corde passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, on remplace la dérivée $f'(a)$ par le taux d'accroissement $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ce qui donne :

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a).$$

La tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 a pour équation :

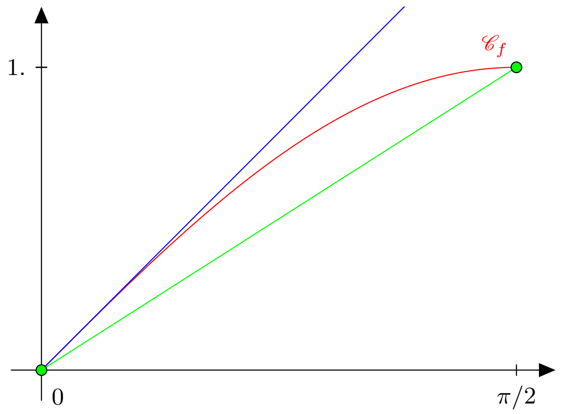
$$y = f(0) + f'(0)(x-0) = x$$

et la corde passant par les points $(0, \sin(0)) = (0,0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ a pour équation :

$$y = \frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-0}(x-0) + 0 = \frac{2}{\pi}x.$$

D'où les inégalités demandées :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x.$$



La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ du sinus est en dessous de sa tangente en 0 (en bleu) et au dessus de sa corde entre 0 et $\pi/2$ (en vert).

3 Polynômes

Compétences attendues.

- ✓ Connaitre les règles de calcul du degré d'une expression.
- ✓ Savoir le théorème de division euclidienne, et obtenir le quotient et le reste en pratique.
- ✓ Savoir déterminer l'ordre de multiplicité d'une racine.
- ✓ Factoriser un polynôme (recherche de racines évidentes et de leurs multiplicités, puis division euclidienne pour mettre en facteur).

3.1 Définition et premières propriétés

Définition.

On dit qu'une fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une *fonction polynomiale* ou un *polynôme à coefficients dans* $\mathbb{R}$ s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Propriété 44 (Opérations sur les polynômes)

La somme, le produit, la composée de deux polynômes sont des polynômes.

Remarque. Si $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q : x \mapsto \sum_{k=0}^{p} b_k x^k$, alors :

$$(P \times Q) : x \mapsto \sum_{k=0}^{p+q} c_k x^k \quad \text{avec} \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Notation.

L'ensemble des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[x]$. On notera $0_{\mathbb{R}[x]}$ le polynôme $x \mapsto 0$, appelé *polynôme nul*.

Propriété 45 (Unicité de l'écriture d'un polynôme)

- Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme. Alors :

$$P = 0_{\mathbb{R}[x]} \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

- Tout polynôme $P \neq 0_{\mathbb{R}[x]}$ s'écrit de manière unique $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$. La suite $(a_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est appelée *suite des coefficients de* P.

3.2 Degré d'un polynôme

Définition.

Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme non nul.

- On appelle *degré* de P, et on note $\deg(P)$, le plus grand entier N tel que $a_N \neq 0$.
- Le coefficient a_N est alors appelé le *coefficient dominant* de P. Si $a_N = 1$, on dit que P est un *polynôme unitaire*.

On conviendra que le polynôme nul est de degré $-\infty$.

Propriété 46 (du degré d'un polynôme)

Soient P et Q deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
  Si de plus $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$. En particulier, $\deg(\lambda \cdot P) = \deg(P)$.
- Si $\deg(Q) \geq 1$, $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.
- Si $\deg(P) \geq 1$, $\deg(P') = \deg(P) - 1$. Si P est constant, $P' = 0$.

Notation.
Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré au plus n est noté $\mathbb{R}_n[x]$.

Propriété 47 (Intégrité)

Soient P et Q deux polynômes. Alors :

$$P \times Q = 0_{\mathbb{R}[x]} \quad \Leftrightarrow \quad P = 0_{\mathbb{R}[x]} \text{ ou } Q = 0_{\mathbb{R}[x]}.$$

3.3 Polynôme dérivé

Définition.

Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme de degré n.

Si $n \geq 1$, on appelle *dérivée* du polynôme P le polynôme noté P', tel que :

$$P' : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} x^i.$$

Si $n \leq 0$, on posera $P' = 0_{\mathbb{R}[x]}$.

On définit les *polynômes dérivés successifs* de P, par $P^{(0)} = P$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)} = \left(P^{(k-1)}\right)'$.

Propriété 48 (*Formule de Taylor* (1685 - 1731) *pour les polynômes*)

Soit P un polynôme de degré n. Pour tout $a, x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

3.4 Arithmétique dans $\mathbb{R}[x]$

Définition.

Soient A, B deux polynômes. On dit que B *divise* A ou que A est un *multiple* de B, et on note $B|A$, s'il existe un polynôme Q tel que $A = B \times Q$.

Théorème 49 (*de la division euclidienne*)

Soient A, B deux polynômes, avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$\begin{cases} A = BQ + R, \\ \deg(R) < \deg(B). \end{cases}$$

Q et R sont appelés le *quotient* et le *reste* de la *division euclidienne* de A par B.

Remarque. Soient A, B deux polynômes, avec $B \neq 0$. Alors B divise A si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

3.5 Racines

Définition.

Soient $P \in \mathbb{R}[x]$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est une *racine* de P si $P(a) = 0$.

Propriété 50 (Caractérisation d'une racine)

Soient P un polynôme de degré n et $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$a \text{ est une racine de } P \quad \Leftrightarrow \quad (x-a) \text{ divise } P.$$

Théorème 51 (Nombre de racines distinctes)

- Tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes.
- Un polynôme de degré au plus n admettant au moins $n+1$ racines distinctes est le polynôme nul.

Théorème 52 (Ordre de multiplicité d'une racine)

Soient $P \in \mathbb{R}[x]$, $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On a l'équivalence entre :

(1) $\exists Q \in \mathbb{R}[x],\ P = (x-a)^r Q$ et $Q(a) \neq 0$;

(2) $(x-a)^r$ divise P et $(x-a)^{r+1}$ ne divise pas P ;

(3) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(r-1)}(a) = 0$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$.

Si l'une de ces conditions est satisfaite, on dit que *a est racine de P de multiplicité r exactement*.

Théorème 53 (Nombre de racines comptées avec multiplicité)

- Tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines comptées avec leurs ordres de multiplicité.
- Un polynôme de degré n admettant au moins $n+1$ racines comptées avec leurs ordres de multiplicité est le polynôme nul.

3.6 Factorisation d'un polynôme

Propriété 54 (Relation coefficients-racines pour un polynôme de degré 2)

Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$). On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ le *discriminant* de P. Supposons $\Delta \geq 0$, et notons x_1 et x_2 les racines, distinctes ou non, de P. On dispose des égalités suivantes :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Théorème 55 (Factorisation d'un polynôme à coefficients réels)

Tout polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ peut s'écrire comme produit de polynômes à coefficients réels de degré 1 et de polynômes à coefficients réels de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Exemples. $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ et $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.

Exercice. Factoriser $P : x \mapsto x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 25x^2 + 16x - 4$ dans $\mathbb{R}[x]$.

Idée.

P est de degré ≥ 3, pas de forme remarquable, on n'a donc aucune chance de factoriser ce polynôme ... à moins de trouver une racine évidente !

On cherche si 0, 1, -1, 2 ou -2 sont racines de P. On remarque que c'est bien le cas pour 1. On cherche sa multiplicité :

$$P(1) = P'(1) = P''(1) = 0 \text{ et } P^{(3)}(1) = 6 \neq 0.$$

Donc 1 est racine de P de multiplicité 3 exactement.
On sait alors que $(x-1)^3$ divise le polynôme P, c'est-à-dire qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P(x) = (x-1)^3 Q(x)$, avec $\deg(Q) = 2$ (en considérant les degrés). Si on souhaite obtenir le polynôme Q afin de factoriser P, on peut alors :

- soit poser $Q : x \mapsto ax^2 + bx + c$ et développer $P(x) = (x-1)^3 Q$. On obtient alors Q en identifiant les coefficients ;
- soit faire la division euclidienne de P par $(x-1)^3$. Le reste est alors nul, et le quotient est Q : c'est cette méthode qu'on privilégiera car elle est en général bien plus rapide.

En posant la division euclidienne, on obtient $P(x) = (x-1)^3(x^2 - 4x + 4) = (x-1)^3(x-2)^2$.

Le saviez-vous ?

Penchons nous sur le problème de la résolution d'une équation polynomiale du type $P(x) = 0$. Nous l'avons vu, elle est intimement liée au degré d du polynôme P, puisque cette équation admet au plus d solutions distinctes. Le cas $d = 2$ est résolu depuis bien longtemps, puisque les Babyloniens connaissaient déjà les formules que vous avez apprises au lycée. La question s'est alors posée de généraliser ces résultats pour $d \geq 3$. Plus précisément, existe-t-il des formules analogues pour des équations polynomiales de degré supérieur, permettant d'exprimer les solutions uniquement avec les coefficients de P et les opérations « + », « $\times$ » et « $\sqrt[n]{\ }$ » avec $n \geq 2$? Si c'est effectivement le cas, l'équation est dite *résoluble par radicaux.*

Il a fallu attendre le $16^{\text{ème}}$ siècle pour que de telles formules soient obtenues pour les équations polynomiales de degré 3. La solution nous vient d'Italie, où les mathématiciens Tartaglia et Scipione del Ferro découvrent à peu près en même temps ce qu'on appelle aujourd'hui la méthode de Cardan. Cardan, quant à lui, a plus ou moins volé le travail de Tartaglia et l'a publié en son nom. Quelques années plus tard, un certain Ferrari, élève de Cardan, résout quant à lui les équations de degré 4. Ces formules étant cependant bien compliquées, on ne les enseigne pas dans nos classes.

Le cas des équations polynomiales de degré $d \geq 5$ sera traité 200 ans plus tard. En 1824, dans un texte qui restera incompris quelques années, le mathématicien norvégien Niels Henrik Abel (1802-1829) montre qu'aucune formule générale de résolution des équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 5 n'est possible. Il est donc inutile de s'évertuer à chercher de telles formules, elles n'existent pas !

Le Français Évariste Galois (1811-1832), sans connaître les résultats d'Abel, obtient un résultat plus précis : pour n'importe quelle équation polynomiale donnée, il propose un critère pour déterminer si oui ou non, cette équation est résoluble par radicaux. Ce résultat donne ainsi une réponse complète au problème de la résolubilité d'une équation polynomiale.

Provoqué dans un duel lié à une histoire d'amour malheureuse, Galois meurt à l'âge de 20 ans. À la veille de ce duel, il dresse dans une lettre le bilan de ses recherches et demande à ce que Jacobi ou Gauss donnent leur avis « sur l'importance de (ses) théorèmes ». Le mathématicien français Joseph Liouville (1809-1882) publiera ses oeuvres scientifiques quatorze ans plus tard à titre posthume, ce qui donnera à Galois une renommée internationale. Ses idées ont eu une portée considérable, aboutissant à l'introduction de notions fondamentales, et sont toujours fécondes aujourd'hui[a].

[a]Pour en connaitre davantage sur la vie d'Evariste Galois, je vous conseille cette vidéo.

Évariste Galois (1811 - 1832).