Chapitre 1

Calcul matriciel

Compétences attendues.

- ✓ Résoudre un système linéaire par méthode du pivot de Gauss.
- ✓ Déterminer le rang (du système linéaire associé à) une matrice.
- ✓ Déterminer un polynôme annulateur d'une matrice.
- ✓ Déterminer si une matrice A est inversible, et si c'est le cas, calculer A^{-1} à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, d'inverses à gauche/droite, d'un polynôme annulateur, pour les matrices 2×2, ...
- ✓ Calculer les puissances d'une matrice A en utilisant la formule du binôme, un polynôme annulateur, ou que A est semblable à une matrice diagonale.

Mathieu Mansuy
Professeur en ECG deuxième année spécialité mathématiques approfondies au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`
E-mail : `mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Ensemble des matrices

Dans tout le chapitre, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, n, p, q et r des entiers ≥ 1.

1.1 Définition, opérations usuelles

Définition.

On appelle *matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans* $\mathbb{R}$ un tableau de $n \times p$ éléments de $\mathbb{R}$.
L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Dans le cas où $n = p$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Notation.

- Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on notera $a_{i,j}$ ou $[A]_{i,j}$ le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de A.
- On note $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la *matrice identité*, et $0_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la *matrice nulle*.

Définition.

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les matrices $A + B$ et $\lambda \cdot A$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad [A+B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j} \quad \text{et} \quad [\lambda \cdot A]_{i,j} = \lambda \times [A]_{i,j}.$$

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,\boldsymbol{p}}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{\boldsymbol{p},q}(\mathbb{R})$. On définit la matrice $C = A \times B$ de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad [C]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k} \times [B]_{k,j}$$

Remarque. Pour pouvoir effectuer le produit de A par B, il faut impérativement que le nombre de colonnes de A soit égale au nombre de lignes de B.

Propriété 1 (du produit matriciel)

Soient A, B, C des matrices. Dans le cas où les produits matriciels sont bien définis, on a :

- *Associativité :* $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.
- *Distributivité :* $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot (A \times B) = (\lambda \cdot A) \times B = A \times (\lambda \cdot B)$.
- $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad I_n \times A = A \times I_n = A \quad \text{et} \quad 0_n \times A = A \times 0_n = 0_n$.

Mise en garde.

- Le produit matriciel **n'est pas commutatif**, comme le montre l'exemple suivant :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Notons cependant que la matrice I_n, et plus généralement les matrices $\lambda \cdot I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, commutent avec toutes les matrices.
- On peut avoir $A \times B = 0_{n,q}$ avec $A \neq 0_{n,p}$ et $B \neq 0_{p,q}$, comme dans l'exemple suivant :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2 Transposée

Définition.

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle *matrice transposée de A* la matrice notée ${}^tA$ de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par :
$$\forall\, (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad [\,{}^tA]_{i,j} = a_{j,i}.$$
Autrement dit, ${}^tA$ est obtenue à partir de A par échange de ses lignes et de ses colonnes.

Exemple. $${}^t\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Propriété 2 (de la transposition)

- $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad {}^t({}^tA) = A.$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall (A,B) \in (\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2, \quad {}^t(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) = \lambda \cdot {}^tA + \mu \cdot {}^tB.$
- $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R}), \quad {}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA.$

2 Systèmes linéaires

2.1 Définitions

Définition.

- On appelle *système linéaire à n équations et p inconnues* un système de la forme :
$$(\mathscr{S}) : \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array} \right.$$
Les $x_j \in \mathbb{R}$ sont les *inconnues* du système, les $a_{i,j}$ sont les *coefficients* du système, et les b_i forment le *second membre* du système.
- Lorsque les b_i sont tous nuls, on dit que le système $(\mathscr{S})$ est *homogène*.

  Dans le cas général, on appelle *système homogène associé à $(\mathscr{S})$* le système $(\mathscr{S}_0)$ obtenu en remplaçant le second membre $(b_1, \ldots, b_n)$ par $(0, \ldots, 0)$.

Définition.

On appelle *matrice des coefficients* de $(\mathscr{S})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

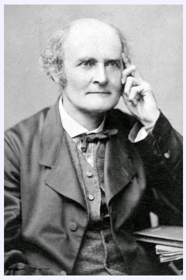
La matrice $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est appelée *matrice colonne du second membre* de $(\mathscr{S})$, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ *matrice colonne des inconnues*

Remarque. $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ solution de $(\mathscr{S}) \;\Leftrightarrow\; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ solution de $A \times X = B$.

Le saviez-vous ?

Le mot *matrice* est formé sur le mot latin *mater* qui signifie *mère*. Il apparait au Moyen Âge dans son sens anatomique d'utérus. Comme on enregistrait les enfants à la naissance, il désigna rapidement le registre où on les inscrivait, d'où les mots *matricule* et *immatriculation*.

Au début de l'imprimerie, *matrice* désignait le moule à imprimer sur lequel on place les caractères. Par analogie, James Joseph Sylvester (1814 - 1897) utilisa ce mot pour nommer le tableau où l'on enregistre les coefficients d'un système linéaire. Son ami Arthur Cayley (1821 - 1895) introduisit les opérations usuelles du calcul matriciel (addition, multiplication), et jeta les bases de la théorie des matrice.



Arthur Cayley (1821 - 1895).

2.2 Structure des solutions d'un système linéaire

Propriété 3 (Structure des solutions d'un système homogène)

Soit $(\mathscr{S}_0)$ un système **homogène** (second membre nul) de n équations à p inconnues. Alors l'ensemble E_0 de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire :

(i) $(0, \dots, 0)$ appartient à E_0 ;

(ii) Pour tout $x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_p) \in E_0$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\lambda \cdot x + \mu \cdot y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_p + \mu y_p) \in E_0.$$

Preuve.

$\square$

Propriété 4 (Structure des solutions d'un système avec second membre)

Soit $(\mathscr{S})$ un système de n équations à p inconnues, $(\mathscr{S}_0)$ le système homogène associé (i.e. sans second membre). Si $y \in \mathbb{R}^p$ est solution de $(\mathscr{S})$, alors on a :

$$x \in \mathbb{R}^p \text{ solution de } (\mathscr{S}) \quad \Leftrightarrow \quad x - y \text{ solution de } (\mathscr{S}_0).$$

En d'autres termes, on a :

$$E = y + E_0 = \{y + h,\ h \in E_0\}$$

où E (resp. E_0) est l'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ (resp. $(\mathscr{S}_0)$).

Preuve. On considère le système $(\mathscr{S})$: $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \quad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$ et $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ une solution particulière. Soit également $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. Alors on a :

$$x \in E \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 = a_{1,1}y_1 + \cdots + a_{1,p}y_p \\ \quad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_p = a_{n,1}y_1 + \cdots + a_{n,p}y_p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,1}(x_1 - y_1) + \cdots + a_{1,p}(x_p - y_p) = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{n,1}(x_1 - y_1) + \cdots + a_{n,p}(x_p - y_p) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x - y \in E_0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists h \in E_0, \quad x = y + h.$$

□

2.3 Échelonnement et méthode du pivot de Gauss

Définition.

On appelle *opération élémentaire* sur les lignes d'un système (ou d'une matrice) l'une des trois opérations suivantes :

- multiplication d'une ligne L_i par un scalaire λ non nul, qu'on notera $L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i$;
- échange des lignes L_i et L_j avec $i \neq j$, qu'on notera $L_i \leftrightarrow L_j$;
- ajout de $\beta \cdot L_j$ à L_i avec $i \neq j$, qu'on notera $L_i \leftarrow L_i + \beta \cdot L_j$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

Mise en garde.

On ne fera que des opérations élémentaires sur les **lignes** d'une matrice, **jamais sur les colonnes**.

Rédaction.

On **précisera systématiquement** et à chaque étape les opérations élémentaires qu'on a effectué pour passer d'un système linéaire à un autre. Vous pouvez être sanctionné le jour du concours si vous ne le faites pas.

Remarque. Si un système $(\mathscr{S}')$ se déduit d'un système $(\mathscr{S})$ par opérations élémentaires sur les lignes, alors ces systèmes ont le même ensemble de solutions. Grâce à des opérations élémentaires sur les lignes de $(\mathscr{S})$, on va se ramener à un système $(\mathscr{S}')$ plus simple à résoudre.

Définition.

- Une matrice est dite *échelonnée par lignes* si chaque ligne non nulle commence par strictement plus de zéros que la ligne précédente, i.e. si elle est de la forme générale suivante :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  où $\oplus$ sont des réels non nuls et $*$ sont des réels.

  Les réels $\oplus$ sont appelés les *pivots* de la matrice échelonnée par lignes. Ce sont les premiers coefficients non nuls de chaque ligne non nulle.

- Un système est dit *échelonné par lignes* si sa matrice des coefficients l'est.

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée par lignes, avec pour pivots 1, 2 et 7.

La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée par lignes.

Théorème 5 (*Pivot de Gauss* (1777 - 1855))

Tout système (ou matrice) peut se ramener par opérations élémentaires sur ses lignes à un système (ou matrice) échelonné(e) par lignes.

Méthode. Pivot de Gauss.

Pour mettre une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (ou un système) sous forme échelonnée à l'aide d'opérations élémentaires sur ses lignes, on procèdera ainsi :

(i) *On traite chaque colonne l'une après l'autre, dans l'ordre de la première à gauche à la dernière à droite.*

(ii) *Pour la i-ème colonne, on cherche un élément non nul parmi $a_{i,i}, \dots, a_{n,i}$. S'il y en a effectivement un :*

(a) *on le place en pivot (i.e. en position (i,i)) par un échange de lignes. On choisira le pivot le plus pratique pour les calculs (1 si possible) ;*

(b) *on fait apparaitre des zéros sous le pivot par des opérations élémentaires du type $L_j \leftarrow L_j + \beta \cdot L_i$ pour $j > i$.*

Si tous les éléments $a_{i,i}, \dots, a_{n,i}$ sont nuls, on passe à la colonne $i+1$.

Le saviez-vous ?

Cette méthode est en fait bien antérieure à Gauss, puisqu'elle était connue des mathématiciens chinois depuis au moins le 1er siècle de notre ère. Sa paternité reviendrait même à un certain Chang Ts'ang, chancelier de l'empereur de Chine au 2-ème siècle avant notre ère.

En Europe, cette méthode fut découverte et présentée bien plus tard, en 1810, par Carl Friedrich Gauss dans un livre étudiant le mouvement d'un astéroïde. On lui associe aujourd'hui son nom.

Exercice. Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée par lignes par la méthode du pivot de Gauss.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

- $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

- $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Mise en garde.

Vous pourriez être tenté de vous écarter de la méthode du pivot en pensant à d'autres opérations élémentaires qui vous sembleraient plus « intéressantes ». L'expérience montre que ce n'est jamais une réussite. Le plus efficace est de suivre strictement chaque étape du pivot de Gauss.

2.4 Résolution d'un système linéaire

Définition.

Soit $(\mathscr{S})$ un système, A la matrice de ses coefficients qu'on ramène par opérations élémentaires sur les lignes en une matrice A' échelonnée par lignes :

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{1,j_1} & \cdots & & & & \\ 0 & & a'_{2,j_2} & \cdots & & \\ & & 0 & & & \\ & & & & a'_{r,j_r} & \cdots \\ & & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

- On appelle *inconnue principale* toute inconnue associée à un pivot de A. Toute autre inconnue est appelée *inconnue secondaire* ou *inconnue paramètre.*
- r s'appelle le *rang du système* $(\mathscr{S})$.

Remarque. On peut montrer que le rang r du système $(\mathscr{S})$ est unique et ne dépend pas des opérations élémentaires effectuées sur les lignes de A, ce qui justifie la définition précédente. Il s'agit en fait du rang de la matrice A, nous le reverrons dans un chapitre suivant.

Exemple. La matrice des coefficients associée au système $\begin{cases} x+y+z &= 7 \\ -3z &= -2 \end{cases}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. A est échelonnée par lignes. On peut donc dire que le rang du système est 2, que x et z sont des inconnues principales et y est une inconnue paramètre.

Propriété 6

Soit $(\mathscr{S}_0)$ un système linéaire **homogène** de n équations à p inconnues, de rang r.

- Si $r = p$ (rang = nombre d'inconnues), le système possède pour unique solution $(0, \dots, 0)$;
- si $r < p$ (nombre d'inconnues paramètres > 0), le système possède une infinité de solutions.

Pour aller plus loin.

On peut montrer que si $r < p$, l'ensemble E_0 des solutions de $(\mathscr{S}_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ de dimension le nombre $(p - r)$ d'inconnues paramètres.

Méthode. Résolution d'un système linéaire homogène.

Pour résoudre un système linéaire ***homogène*** *(second membre nul), on procèdera comme suit :*

(i) On ramène le système à un système échelonné par lignes par des opérations élémentaires sur les lignes. Pour cela, on suivra scrupuleusement l'algorithme du pivot, en précisant à chaque étape les opérations élémentaires effectuées.

(ii) On identifie le rang, les inconnues principales et les inconnues paramètres.

(iii) On exprime les inconnues principales en fonction ***uniquement*** *des inconnues paramètres.*

(iv) On écrit l'ensemble des solutions sous forme « paramétrique », c'est-à-dire en fonction des inconnues paramètres (les inconnues principales ne doivent alors plus apparaitre).

Exercice. Résoudre les systèmes homogènes suivants.

- $(\mathscr{S}_1) : \begin{cases} x - 2y + z &= 0 \\ -y + z &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \end{cases}$
- $(\mathscr{S}_2) : \begin{cases} -2x + y - z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \\ 3x - 2y + z &= 0 \end{cases}$

Remarque. Pour résoudre un système linéaire avec second membre, on procèdera de même :

(i) On échelonne le système, sans oublier d'effectuer les opérations élémentaires également sur le second membre.

(ii) **Cas 1.** Si le système échelonné compte n équations et n inconnues, et est de rang n, alors il admet une unique solution. On parle ici de *système de Cramer*.

On obtient cette unique solution par substitutions successives, en « remontant » le système.

Cas 2. Dans le cas contraire, le système linéaire admet soit aucune solution, soit une infinité de solutions.

On obtient les solutions éventuelles en exprimant inconnues principales en fonction des inconnues paramètres et du second membre, toujours en « remontant » le système par substitutions successives.

3 Matrices carrées

3.1 Matrices carrées particulières

Définition.

On dit que $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est :

- *scalaire* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda \cdot I_n$;
- *diagonale* si $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$, c'est-à-dire si tous les coefficients en dehors de la diagonale sont nuls ;
- *triangulaire supérieure* (resp. *triangulaire inférieure*) si, pour tous i et j tels que $i > j$ (resp. $i < j$), $a_{i,j} = 0$, c'est-à-dire si tous les coefficients situés en dessous (resp. au dessus) de la diagonale sont nuls ;
- *triangulaire supérieure stricte* (resp. *inférieure stricte*) si A est triangulaire supérieure (resp. inférieure) et si de plus ses coefficients diagonaux sont tous nuls.

Exemples. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure stricte.

Définition.

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est :

- *symétrique* si ${}^tA = A$;
- *antisymétrique* si ${}^tA = -A$.

On notera $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarques.

- La diagonale d'une matrice antisymétrique est toujours nulle.
- Les ensembles $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: ils contiennent 0_n et sont stables par combinaison linéaire. Mais ils ne sont pas stables par produit puisque par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}), \text{ mais } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \notin \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).$$

3.2 Matrices inversibles

Définition.

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *inversible* s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

Une telle matrice B est unique. On l'appelle *l'inverse* de A, et on la note A^{-1}.

Notation.

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $GL_n(\mathbb{R})$, et appelé *groupe linéaire d'ordre n*.

Propriété 7 (de l'inverse)

- Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont deux matrices inversibles, alors $A \times B$ l'est aussi et son inverse est :

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}.$$

- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors ${}^tA$ l'est aussi et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

Théorème 8 (Caractérisation des matrices inversibles)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est une matrice inversible ;

(ii) il existe $A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A' \times A = I_n$ (et alors $A^{-1} = A'$) ;

(iii) il existe $B' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times B' = I_n$ (et alors $A^{-1} = B'$) ;

(iv) le système $AX = 0_{n,1}$ admet une seule solution ($X = 0_{n,1}$) ;

(v) le rang (du système associé à) la matrice A est n ;

(vi) $\forall B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = B$ admet une unique solution (qui est $X = A^{-1}B$).

Propriété 9 (Cas des matrices triangulaires et diagonales)

- Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si **tous ses coefficients diagonaux sont non nuls**.
- En particulier une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est inversible si et seulement si $\lambda_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, et on a alors $D^{-1} = \mathrm{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n})$.

Exemple. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ étant triangulaire avec des coefficients diagonaux $1, -1, 2$ tous non nuls, elle est inversible. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, elle, est non inversible, car triangulaire avec l'un de ses coefficients diagonaux nul.

Méthode. Inversibilité et calcul de l'inverse d'une matrice, version « matricielle ».

Pour déterminer si une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, et le cas échéant obtenir A^{-1}, on procèdera comme suit :

(i) *On écrit la matrice I_n à droite de A sous la forme $(A|I_n)$.*

(ii) *À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes en suivant l'algorithme du pivot, on échelonne A par lignes, tout en réalisant les mêmes opérations sur la matrice de droite.*

(iii) *Si le rang (= nombre de pivots) de A est n, alors A est inversible.*

(iv) *En poursuivant les opérations élémentaires sur les lignes, on effectue alors la « remontée » afin de transformer A en l'identité. Plus précisément pour tout $1 \leq i \leq n$:*

a) *on normalise le i-ème pivot à 1 dans la matrice échelonnée ;*

b) *on fait apparaitre des zéros au dessus du pivot par des opérations élémentaires du type $L_j \leftarrow L_j + \beta \cdot L_i$ pour $j < i$.*

À la fin de la « remontée », la matrice de droite est A^{-1}.

Exercice. Déterminer, s'il existe, l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Méthode. Inversibilité et calcul de l'inverse d'une matrice, version « système linéaire ».

Pour déterminer l'inverse de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on peut aussi procéder comme suit :

(i) On considère le système $(\mathscr{S})$: $A \times X = Y$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et de second membre $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(ii) On échelonne $(\mathscr{S})$ par la méthode du pivot (sans oublier d'effectuer les opérations élémentaires aussi sur le second membre qui cette fois n'est pas nul).

(iii) Deux cas se présentent alors :

- *Si $(\mathscr{S})$ n'est pas de Cramer (rang $< n$), A n'est pas inversible.*
- *Si $(\mathscr{S})$ est de Cramer (rang $= n$), A est inversible. De plus, l'unique solution X de $(\mathscr{S})$ s'exprime alors en fonction des composantes de Y, ce qui permet d'écrire :*

$$X = B \times Y \qquad \text{avec} \qquad B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

On obtient en procédant par identification $A^{-1} = B$.

Exercice. Déterminer, s'il existe, l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

3.3 Trace d'une matrice carrée

Définition.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle *trace de A* et on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme des cœfficients diagonaux de A, soit :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Exemples. $\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right) =$, $\mathrm{Tr}(I_n) =$, $\mathrm{Tr}(0_n) =$

Propriété 10

L'application $\mathrm{Tr} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A) \end{array}$ est une forme linéaire, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Tr}(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(B),$$

pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Preuve.

□

Propriété 11

Soit A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$.
- $\mathrm{Tr}(A \times B) = \mathrm{Tr}(B \times A)$.

Preuve.

□

3.4 Matrices semblables

Définition.

Soit A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que la matrice A *est semblable à* la matrice B lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Exercice. Quelles sont les matrices semblables à I_n, à $\lambda \cdot I_n$?

Propriété 12

Deux matrices semblables ont même trace.

Preuve.

□

Exercice.

1. Les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

2. Même question avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Mise en garde.

Comme l'illustre l'exercice précédent, la réciproque à la propriété est fausse : deux matrices de même trace ne sont pas forcément semblables.

4 Polynômes d'une matrice

4.1 Puissance d'une matrice

Définition.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *puissance k-ème* de A la matrice, notée A^k, définie par :

- si $k = 0$, $A^0 = I_n$;
- si $k \geq 1$, $A^k = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}}$.

Propriété 13 (Puissance d'une matrice triangulaire ou diagonale)

Soit A une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, resp. diagonale), dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & \cdots & \\ 0 & \lambda_2^p & (*) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & (*) & \ddots & 0 \\ & \cdots & & \lambda_n^p \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

où $(*)$ sont des réels.

Remarque. On peut avoir $A^k = 0_n$ avec $A \neq 0_n$, comme dans l'exemple suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition.

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *nilpotente* s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$ et $A^{p-1} \neq 0_n$. Cet entier p s'appelle l'*ordre de nilpotence* de la matrice.

Exemple.

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'ordre 2.
- La matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'ordre 4.

Pour aller plus loin.

Plus généralement, on peut montrer (on le fera en TD) que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure **stricte** ou triangulaire inférieure **stricte** est nilpotente d'ordre $\leq n$.

Remarque. De même que pour les matrices diagonales, le calcul des puissances d'une matrice nilpotente A est aisé : en effet pour tout $k \geq p$, on a $A^k = 0_n$, et il suffit donc de calculer un nombre fini de puissances de A.

Théorème 14 (*Formule du binôme de Newton* (1642 - 1727))

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui **commutent**. Alors, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$(A+B)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} A^i \, B^{p-i}.$$

Mise en garde.

Cette formule est **fausse si A et B ne commutent pas**. Vous serez sanctionné au concours si vous ne précisez pas que les matrices commutent avant d'utiliser la formule du binôme.

Méthode. Calcul de puissances par la formule du binôme de Newton.

*La formule du binôme de Newton, valable pour deux matrices **qui commutent**, permet dans certains cas de calculer les puissances d'une matrice.*

Exercice. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Propriété 15

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui **commutent**. Alors pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} A^p - B^p &= (A-B)\left(\sum_{i=0}^{p-1} A^i B^{p-1-i}\right) \\ &= (A-B)\left(A^{p-1}B^0 + A^{p-2}B^1 + \cdots + A^1B^{p-2} + A^0B^{p-1}\right). \end{aligned}$$

Preuve. Il suffit de développer :

$$\begin{aligned} (A-B)\left(A^{p-1} + A^{p-2}B^1 + \cdots + B^{p-1}\right) &= A^p + A^{p-1}B + \cdots + AB^{p-1} - BA^{p-1} - BA^{p-2}B - \cdots - BAB^{p-2} - B^p \\ &\overset{A \text{ et } B \text{ commutent}}{=} A^p + A^{p-1}B + \cdots + AB^{p-1} - A^{p-1}B - A^{p-2}B^2 - \cdots - AB^{p-1} - B^p \\ &= A^p - B^p \end{aligned}$$

□

4.2 Polynôme d'une matrice

Définition.

Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ un polynôme à cœfficients dans $\mathbb{R}$, et soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $P(A)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = a_d A^d + \cdots + a_1 A + a_0 I_n.$$

Exemple. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $P : x \mapsto x^2 + 3x - 10$. Alors on a $P(A) = A^2 + 3A - 10I_n$.

Mise en garde.

Attention de ne pas se tromper : le terme constant a_0 dans P devient $a_0 I_n$ dans $P(A)$.

Propriété 16

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

- $(\alpha P + \beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A)$;
- $(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A)$.

Remarque. Il est important de bien identifier les objets mathématiques concernés :

$$(\underbrace{P \times Q}_{\substack{\text{produit}\\\text{de}\\\text{polynômes}}})(A) = \underbrace{P(A) \times Q(A)}_{\text{produit de matrices}}.$$

Exemple. Comme $P(x) = x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$, on a $P(A) = (A + 5I_n)(A - 2I_n)$.

Propriété 17

Les matrices $P(A)$ et $Q(A)$ commutent :

$$P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A).$$

En particulier, A commute avec toutes ses puissances et avec tous les polynômes en A.

Preuve.

□

Propriété 18

Soit A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices semblables, et soit P inversible tel que $B = P^{-1}AP$.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B^n = P^{-1}A^nP$, et A^n et B^n sont semblables.

(2) Pour tout $Q \in \mathbb{R}[x]$, on a $Q(B) = P^{-1}Q(A)P$, et $Q(A)$ et $Q(B)$ sont semblables.

Preuve.

□

4.3 Polynômes annulateurs

Définition et exemples

Définition.

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que P est un *polynôme annulateur de* A lorsque $P(A) = 0_n$.

Méthode. Détermination d'un polynôme annulateur d'une matrice.

Pour déterminer un polynôme annulateur d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on procèdera comme suit :

- *on calcule A^2 et on regarde si A^2 peut s'écrire comme combinaison linéaire de A et I_n.*
- *Si ce n'est pas le cas, on tente d'écrire A^3 comme combinaison linéaire de A^2, A et I_n. Et ainsi de suite*[a] *...*

On obtient ainsi $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P(A) = 0_n$.

[a] On peut montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors A^n peut toujours s'écrire comme combinaison linéaire de $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A, I_n$ (résultat dû à Cayley). En pratique, nous n'aurons donc pas à calculer des puissances trop grandes de A pour en obtenir un polynôme annulateur.

Exercice. Déterminer un polynôme annulateur de $\lambda \cdot I_n$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $P : x \mapsto x^2 - \mathrm{Tr}(A)x + (ad - bc)$ est un polynôme annulateur de A.

Propriété 19

Si A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables, alors elles ont les mêmes polynômes annulateurs.

Preuve.

$\square$

Application au calcul de l'inverse

Propriété 20

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme annulateur de A. Alors on a :

$$P(0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A \text{ est inversible.}$$

De plus, A^{-1} est un polynôme en A.

Preuve.

$\square$

Exercice. Déterminer l'inverse, s'il existe, de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 21

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$A \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad ad - bc \neq 0.$$

Et dans ce cas, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Preuve.

□

Vocabulaire. La quantité $ad - bc$ s'appelle le *déterminant de* A et se note $\det(A)$.

Application au calcul de puissances

La connaissance d'un polynôme annulateur $P \in \mathbb{R}_d[X]$ d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ peut permettre de calculer la puissance k-ème de A :

- soit à l'aide d'une division euclidienne de X^k par P ;
- soit par une récurrence en écrivant A^k comme combinaison linéaire de $I_n, A, \ldots, A^{d-1}$.

Des exemples seront traités en TD.

5 Suites de matrices

Les résultats qui suivent sont hors programme. Ils sont cependant souvent admis ou partiellement à redémontrer dans de nombreux sujets de concours.

Définition.

Une *suite* $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *de matrices* de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est la donnée, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'une matrice $A(n)$ de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, on note alors $a_{i,j}(n)$ le coefficient à la i-ème ligne et j-ème colonne de $A(n)$.

Exemple. La suite $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $A(n) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{(-1)^n}{2^n} & 3 + \frac{1}{n+1} \\ 0 & 1 - \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$.

Définition.

On dit qu'une suite $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ converge vers $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!], \quad \lim_{n\to+\infty} a_{i,j}(n) = a_{i,j}.$$

Exemple. En reprenant l'exemple précédent, la suite $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 22

- Soient $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B(n))_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ qui convergent respectivement vers A et B, et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

  Alors la suite $(\lambda \cdot A(n) + \mu \cdot B(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda \cdot A + \mu \cdot B$.

- Soit $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ qui converge vers A, $(B(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{R})$ qui converge vers B.

  Alors la suite $(A(n) \times B(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $A \times B$.

Preuve.

$\square$

Exemple. Soit $(X(n))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $X(n) = \begin{pmatrix} e^{-n} \\ 1 + \dfrac{\sin(n)}{n+1} \end{pmatrix}$. La suite $(X(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et donc $(A(n) \times X(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $A \times X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.