

Variables aléatoires à densité

1 Généralités sur les variables aléatoires à densité	2
1.1 Définition	2
1.2 Densité de probabilité	3
1.3 Variable aléatoire fonction d'une variable aléatoire à densité	6
2 Moments d'une variable aléatoire à densité	8
2.1 Espérance	8
2.2 Théorème de transfert	10
2.3 Moments d'ordre supérieur, variance	11

Compétences attendues.

- ✓ Prouver qu'une variable aléatoire X est à densité.
- ✓ Montrer qu'une fonction f est une densité de probabilité.
- ✓ Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire $Y = g(X)$.
- ✓ Déterminer une densité d'une variable aléatoire X .
- ✓ Prouver l'existence et calculer l'espérance ou la variance d'une variable à densité.
- ✓ Utiliser le théorème de transfert pour calculer une espérance.

1 Généralités sur les variables aléatoires à densité

Dans tout ce chapitre, (Ω, \mathcal{A}, P) désigne un espace probabilisé.

1.1 Définition

Rappels.

- On appelle *fonction de répartition* d'une variable aléatoire réelle X la fonction F_X définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leq x).$$

- Une application $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X si et seulement si elle satisfait les points suivants :

- (i) F est croissante sur \mathbb{R} ;
- (ii) F est continue à droite en tout point de \mathbb{R} ;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

De plus, on a l'égalité :

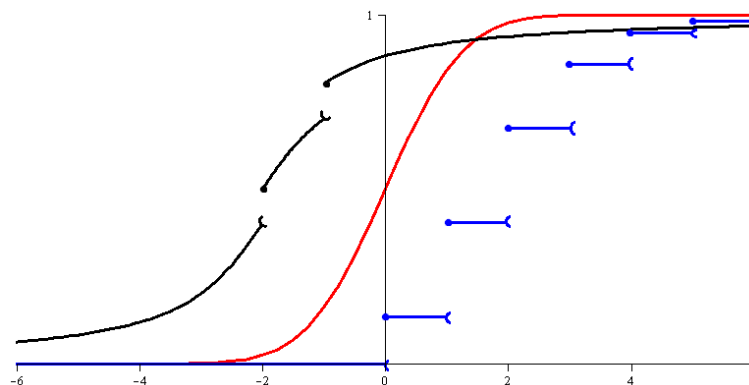
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F(x) - \lim_{t \rightarrow x^-} F(t).$$

Définition.

Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On dit que X est une *variable aléatoire à densité* (ou *variable aléatoire continue*) si sa fonction de répartition F_X est de plus :

- (iv) continue sur \mathbb{R} ;
- (v) de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} éventuellement privé d'un nombre **fini** de points.

Remarque. Les trois courbes suivantes sont celles de fonctions de répartition de variables aléatoires réelles.



- La courbe bleu est en escalier. C'est donc la fonction de répartition d'une variable discrète X . Rappelons qu'elle est discontinue à droite en tout point de son ensemble image $X(\Omega)$. En particulier, une variable discrète n'est donc pas à densité.
- La courbe rouge représente une fonction de répartition (celle de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$) de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . C'est donc la fonction de répartition d'une variable continue.
- La fonction représentée par la courbe noir est discontinue en certains points, et n'est pas en escalier. C'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui n'est ni discrète, ni continue. Cette année nous n'étudierons pas ce type de variables aléatoires, on se focalisera sur les cas discret et continu.

Exercice. Soit $\lambda > 0$, et la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) de fonction de répartition F .

On dit qu'une telle variable aléatoire suit une loi exponentielle de paramètre λ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

2. Montrer que X est une variable aléatoire continue.

1.2 Densité de probabilité

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité.

On appelle *densité de probabilité de X* toute fonction f satisfaisant les deux points suivants :

- (i) f est positive sur \mathbb{R} ;
- (ii) $f(x) = F'_X(x)$ pour tout x appartenant à \mathbb{R} éventuellement privé d'un nombre fini de points.

Remarque. Une densité d'une variable aléatoire n'est pas unique : si f est une densité de X et si l'on change la valeur de f en un nombre fini de points (en prenant pour nouvelles valeurs des réels positifs), alors on obtient une autre densité de f . Ainsi on parlera pour f d'**une** densité de X et non de **la** densité de X .

Exercice. Soit $\lambda > 0$ et $X \leftrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer une densité de X .

Remarque. Soit X une variable à densité, f une densité de X . Pour tout $x \in \mathbb{R}$ en lequel $f(x) = F'_X(x) \neq 0$ et pour tout $h > 0$ petit, on a :

$$P(x < X \leq x + h) = F_X(x + h) - F_X(x) \approx f(x) \cdot h.$$

La quantité $f(x) \cdot h$ représente donc approximativement la probabilité que X soit proche de x par valeurs supérieures à la précision h . Ainsi, plus la densité au point x est élevée, plus la probabilité d'obtenir une valeur proche de x est forte.

Propriété 1 (Lien fonction de répartition/densité)

Soit X une variable aléatoire à densité, et f_X une densité de X . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^x f_X(t) dt$ converge, et on a :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$$

Remarque. La donnée d'une densité d'une variable aléatoire caractérise donc sa loi. En particulier si X et Y sont à densité de densités respectives f_X et f_Y , elles ont même loi si et seulement si $f_X = f_Y$ sauf en un nombre fini de points.

Propriété 2 (Lien probabilités/densité)

Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X . Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

- $P(X = a) = 0.$
- $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f_X(t) dt.$



Preuve. F_X étant continue sur \mathbb{R} , on a pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$P(X = a) = F_X(a) - \lim_{x \rightarrow a^-} F_X(x) = 0.$$

Ainsi pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $P(a \leq X \leq b) = P(X = a) + P(a < X \leq b) = P(a < X \leq b)$. On démontre de même les autres égalités. On a enfin :

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t) dt.$$

□



Mise en garde.

Ainsi si X est continue, $P(X = a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Ceci est bien évidemment **faux** lorsque X est une variable aléatoire **discrète**.

Propriété 3

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . f est une densité d'une variable aléatoire si et seulement si elle satisfait les points suivants :

- (i) f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre **fini** de points ;
- (ii) f est positive sur \mathbb{R} ;
- (iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1.



Exercice. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = \frac{\lambda}{1+t^2}$.

1. Déterminer la valeur de λ pour que f soit une densité d'une variable aléatoire X .
On dit que X suit une loi de Cauchy.
2. Déterminer sa fonction de répartition F_X .
3. Tracer les courbes représentatives de f et F_X et représenter graphiquement les probabilités $P(-1 \leq X \leq 1)$ et $P(X \geq 1)$. Calculer ces probabilités. Que vaut $P(X \leq -1)$?

 **Notation.**

Soit X une variable à densité, et f_X une densité de X . Pour $I = \{t \in \mathbb{R}, f_X(t) > 0\}$, on a :

$$P(X \in I) = \int_I f_X(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1.$$

On notera dans la suite $X(\Omega) = \{t \in \mathbb{R}, f_X(t) > 0\}$, qu'on appellera l'ensemble image de la variable X . Cet ensemble, ainsi défini, dépend de la densité f_X choisie pour X .

Remarque. En notant $m = \inf(X(\Omega))$ et $M = \sup(X(\Omega))$ (dans le cas où l'ensemble $X(\Omega)$ est minoré et majoré), on a :

$$\forall x \leq m, \quad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0,$$

$$\forall x \geq M, \quad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$


1.3 Variable aléatoire fonction d'une variable aléatoire à densité

Propriété 4

Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{A}, P) , et soit $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $g(X)$ est encore une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

Exemple. Si X est une variable aléatoire réelle, alors $X^2, e^X, aX + b, \dots$ sont des variables aléatoires réelles.

Question. Si X est à densité, est-ce que $g(X)$ est encore à densité ? La réponse est non en général, et il nous faudra le vérifier au cas par cas. Pour cela, nous procéderons comme suit.

 **Méthode.** Comment montrer que $Y = g(X)$ est à densité et en donner une densité ?

Pour montrer que $Y = g(X)$ est à densité et déterminer une densité, on procède en quatre étapes :

Étape 1 : Recherche de $Y(\Omega)$.

On détermine l'ensemble image $Y(\Omega)$ à partir de celui de X , afin de trouver sans calcul sur quels intervalles F_Y vaut 0 ou 1.

Étape 2 : Détermination de F_Y .

On revient à la définition $F_Y(x) = P(Y \leq x)$, puis on résoudra cette inéquation (en prenant bien garde au sens des inégalités) pour l'exprimer en fonction de X .

Étape 3 : Y est continue.

Une fois F_Y obtenue en fonction de F_X , on étudie sa continuité sur \mathbb{R} et son caractère \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} privé éventuellement d'un nombre fini de points. On conclut ainsi que Y est à densité.

Étape 4 : Détermination d'une densité de Y .

On dérive F_Y aux points où c'est possible pour obtenir une densité de Y . On prendra des valeurs arbitraires (positives) aux points où F_Y n'est pas dérivable.



**Propriété 5** (Transformation affine d'une variable à densité)

Soit X une variable aléatoire à densité, et f_X une densité de X . Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, la variable $Y = aX + b$ est à densité, dont une densité est donnée par :

$$x \mapsto \frac{1}{|a|} f_X \left(\frac{x - b}{a} \right).$$

Preuve.

□

Exercice. Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$. Déterminer une densité de probabilité de $Y = -2X + 3$.

Exercice. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy.

1. Montrer que $Z = e^X$ est une variable à densité, puis en déterminer une densité.
2. Même question pour $T = X^2$.

2 Moments d'une variable aléatoire à densité

2.1 Espérance

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) , f_X une densité de X .

On dit que X admet une espérance lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$ converge absolument.

Dans ce cas, on appelle *espérance de X* et on note $E(X)$ le réel défini par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt.$$

Exercice. Déterminer l'espérance de X , si elle existe, dans les cas suivants :

1. X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$;
2. X suit une loi de Cauchy.

Propriété 6 (Linéarité de l'espérance)

Soit X et Y des variables aléatoires à densité admettant une espérance. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et on a :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

Propriété 7 (Existence de l'espérance par domination)

Soient X, Y deux variables aléatoires à densité telles que $0 \leq |X| \leq Y$ presque sûrement. Si Y admet une espérance, alors X admet aussi une espérance et $|E(X)| \leq E(Y)$.

Propriété 8 (Variables bornées et espérance)

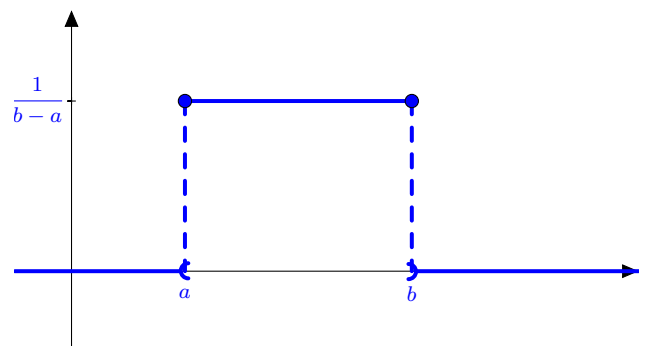
Soit X une variable aléatoire à densité. Si X est bornée, c'est-à-dire si $X(\Omega)$ est bornée^a, alors X admet une espérance.

^aBien que $X(\Omega)$ dépende de la densité de X choisie, son caractère borné est lui indépendant de ce choix puisque deux densités de X diffèrent au plus sur un nombre fini de points.

Exemple. Une variable X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$ si elle admet pour densité la fonction :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Puisque $X(\Omega) = [a, b]$, X est bornée et admet donc une espérance.



Densité de la loi uniforme sur $[a, b]$.

Propriété 9

Soient X, Y des variables aléatoires à densité admettant une espérance.

- *Positivité de l'espérance* : si $X \geq 0$ presque sûrement, alors $E(X) \geq 0$.
- *Croissance de l'espérance* : si $X \leq Y$ presque sûrement, alors $E(X) \leq E(Y)$.

2.2 Théorème de transfert

Théorème 10 (de transfert)

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f_X nulle en dehors de $]a, b[$ ($a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), et soit $\varphi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points.

$E(\varphi(X))$ existe si et seulement si $\int_a^b \varphi(x)f_X(x)dx$ converge **absolument**. Et en cas de convergence absolue, on a :

$$E(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(x)f_X(x)dx.$$

Corollaire 11

Si X est une variable aléatoire à densité admettant une espérance, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, la variable $aX + b$ admet une espérance et on a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Preuve. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = ax + b$. φ est continue sur \mathbb{R} , et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|\varphi(x)f_X(x)| = |axf_X(x) + bf_X(x)| \leq |a||xf_X(x)| + |b||f_X(x)| \text{ par inégalité triangulaire.}$$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx$ converge absolument car X admet une espérance, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$ converge (absolument). Par théorème de comparaison, on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f_X(x)dx$ converge absolument. Par le théorème de transfert, $E(aX + b)$ existe donc bien, et on a :

$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b)f_X(x)dx \stackrel{\text{tout converge}}{=} a \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = aE(X) + b.$$

□

Exercice. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

1. La variable aléatoire $Y = e^X$ admet-elle une espérance ?
2. Montrer que $Z = X^2$ admet une espérance qu'on calculera.

2.3 Moments d'ordre supérieur, variance

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X , et $r \in \mathbb{N}^*$.
On dit que X admet un moment d'ordre r si X^r admet une espérance. Par le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x) dx \quad \text{converge absolument.}$$

Dans ce cas, on note $m_r(X) = E(X^r)$.

Propriété 12

Soit X une variable aléatoire à densité, et soit $q, r \in \mathbb{N}^*$ tels que $q \leq r$.
Si X admet un moment d'ordre r , alors X admet un moment d'ordre q .

Preuve. La preuve est semblable au cas où X est discrète, et laissée en exercice. □

Remarque. Si une variable à densité X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance, et f_X une densité de X .
On dit que X admet une variance si $(X - E(X))^2$ admet une espérance. D'après le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx \quad \text{converge absolument.}$$

Dans ce cas, la variance de X , notée $V(X)$, est :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx.$$

Propriété 13

Si X est une variable aléatoire à densité admettant une variance, alors $V(X) > 0$.

On appelle *écart-type* de X , et on note $\sigma(X)$, le réel défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Preuve. La fonction $g : x \mapsto (x - E(X))^2 f_X(x)$ est positive sur \mathbb{R} , donc son intégrale est positive ou nulle. Ainsi on a déjà $V(X) \geq 0$.

Si $V(X) = 0$, alors g est nulle en tous les points de continuité de f_X . Or puisque $(x - E(X))^2$ s'annule uniquement pour $x = E(X)$, cela signifie que $f_X = 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Cela impliquerait en particulier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 0$, ce qui est faux puisque cette intégrale vaut 1.

Ainsi on a bien $V(X) > 0$. □

Propriété 14

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance, et soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $aX + b$ admet une variance et on a :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Propriété 15 (Formule de Huygens)

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance.

Alors X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre deux. Lorsque c'est le cas, on a alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Preuve. La preuve est semblable au cas où X est discrète, et laissée en exercice. □

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité.

- X est dite *centrée* si X admet une espérance et si $E(X) = 0$.
- X est dite *centrée réduite* si X admet une variance et $E(X) = 0, V(X) = 1$.

Propriété 16

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance. Alors on a :

- $X - E(X)$ est centrée ;
- $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite. On l'appelle *la variable aléatoire centrée réduite associée à X* .