Chapitre 13

Diagonalisation

Compétences attendues.

✓ Étudier la diagonalisabilité d'un endomorphisme f ou d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

✓ Calculer les puissances d'une matrice diagonalisable.

✓ Montrer que deux matrices sont semblables ou non.

Mathieu Mansuy
Professeur en ECG deuxième année spécialité mathématiques approfondies au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`
E-mail : `mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Dans tout ce chapitre :

- E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$;
- f est un endomorphisme de E ;
- A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Objectif. Déterminer des conditions sur f d'existence d'une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle $M_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale, et préciser comment l'obtenir. D'un point de vue matriciel, cela correspond à étudier les conditions sur A pour qu'elle soit semblable à une matrice diagonale, et déterminer la matrice de passage correspondante.

1.1 Définition

Définition.

- On dit que f est *diagonalisable* s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $M_{\mathscr{B}}(f)$ soit diagonale.
- On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale.

Exercice. Montrer que si p est un projecteur, alors p est diagonalisable.

Propriété 1

f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E formée de vecteurs propres de f.

Dans ce cas, $M_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice diagonale telle que :

- les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de f ;
- $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ apparait $\dim(E_\lambda(f))$ fois sur la diagonale.

Preuve.

□

Propriété 2

Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $A = M_{\mathscr{B}}(f)$. On a :

$$f \text{ diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ diagonalisable.}$$

Preuve.

□

1.2 Critères de diagonalisabilité

Rappels. On a établi au **Chapitre 9. Valeurs propres, vecteurs propres.** que :

- la somme $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$ est directe ;
- $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) \leq n$.

Théorème 3 (CNS de diagonalisabilité de $f \in \mathscr{L}(E)$)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est diagonalisable ;

(2) Il existe une base de E formée de vecteurs propres de f ;

(3) $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = n$;

(4) $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$.

Preuve.

□

En appliquant le résultat précédent à l'endomorphisme $\varphi_A : X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to AX \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, on obtient le :

Théorème 4 (CNS de diagonalisabilité de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) A est diagonalisable ;

(2) Il existe une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A ;

(3) $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$;

(4) $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A)$.

Exercice. Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables, et donner (si c'est le cas) une matrice diagonale semblable à ces matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rappelons qu'on avait obtenu

- $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$, $\dim(E_1(A)) = 1$, $\dim(E_2(A)) = 1$.

- $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 1, 3\}$, $\dim(E_{-1}(B)) = 1 = \dim(E_1(B)) = \dim(E_3(B))$.

- $\mathrm{Sp}(C) = \{1, 2\}$, $\dim(E_1(C)) = 2$, $\dim(E_2(C)) = 1$.

Propriété 5 (Condition suffisante de diagonalisabilité)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).
Si f (resp. A) admet $n = \dim(E)$ valeurs propres distinctes, alors f (resp. A) est diagonalisable. De plus, ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

Preuve.

$\square$

Remarque. Il n'y a pas de réciproque : la matrice C par exemple admet 2 valeurs propres distinctes et est bien diagonalisable.

Exercice. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

On étudie à présent le cas opposé d'un endomorphisme ou d'une matrice possédant une seule valeur propre.

Propriété 6

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) admettant une unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$f \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad f = \lambda \mathrm{Id}_E.$$

$$A \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad A = \lambda I_n.$$

Preuve.

□

Exercice. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Mise en garde.

Comme le montre l'exemple précédent, une matrice triangulaire supérieure n'est pas forcément diagonalisable !

Propriété 7 (Trace d'une matrice diagonalisable)

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A, et notons $m_i = \dim(E_{\lambda_i}(A))$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

Si A est diagonalisable, alors on a :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i.$$

Preuve.

$\square$

On termine ce paragraphe par une propriété qui sera démontrée plus tard dans l'année.

Propriété 8

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Exercice. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, et déterminer une matrice D diagonale semblable à A.

1.3 Pratique de la diagonalisation

Méthode. Comment montrer qu'une matrice est diagonalisable ?

Pour montrer qu'une matrice A est diagonalisable, on procèdera de la façon suivante :

- *On détermine les valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de A (en utilisant selon les cas le fait que la matrice soit 2×2, triangulaire, un polynôme annulateur si on en a un, la trace, ou à l'aide d'un pivot de Gauss) ;*
- *On détermine la dimension de chaque sous-espace propre (en notant que $\dim(E_\lambda(A)) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$).*
- *La somme est-elle égale à n ? Si oui, A est diagonalisable. Elle ne l'est pas sinon.*

Si A est diagonalisable, alors A est semblable à une matrice diagonale D avec sur sa diagonale les valeurs propres λ de A apparaissant $\dim(E_\lambda(A))$ fois.

Exercice. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -6 \\ -3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, et donner une matrice D diagonale semblable à A.

Remarque. La méthode proposée ne fournit pas la matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Si on souhaite obtenir cette matrice, on procèdera comme suit :

Méthode. Détermination de la matrice de passage de diagonalisation.

Pour déterminer la matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$:

- *On détermine une base $\mathscr{B}_i$ de chacun des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(A)$ pour $i \in [\![1, p]\!]$. Comme A est diagonalisable, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(A)$ et la concaténation de chacune de ces bases $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathscr{B}_i$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*
- *P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathscr{B}$.*

Exercice. Déterminer une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$.

2 Applications de la diagonalisation

Les applications de la diagonalisation sont nombreuses. On en donne ici plusieurs exemples en algèbre. Plus tard dans l'année, nous verrons que la diagonalisation permet également d'étudier des phénomènes probabilistes (chaînes de Markov), mais aussi la nature des points critiques d'une fonction de plusieurs variables.

Aucun de ces exemples n'est à savoir refaire sans indication, mais tous ces thèmes sont susceptibles d'être abordés dans des sujets de concours.

2.1 Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

Exercice. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -6 \\ -3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Suites récurrentes linéaires

En première année, vous avez appris à déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, c'est-à-dire vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Ce résultat peut se montrer à l'aide de la diagonalisation.

☞ **Complément de cours 5. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.**

La même méthode, toujours basée sur la diagonalisation, permet (au moins dans certains cas) de généraliser ce résultat à des suites vérifiant des relations de récurrence plus complexes.

Exercice. On considère une suite (u_n) satisfaisant $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.

   On ne cherchera pas à déterminer la matrice de passage P.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.3 Matrices diagonalisables semblables

Montrer que deux matrices sont semblables ou non est un problème difficile[1]. On rappelle que si deux matrices sont semblables, alors elles ont :

- même rang,
- même trace,
- mêmes valeurs propres,
- la dimension des sous-espaces propres correspondants est égale.

Mais la réciproque est fausse en général. On montre ici que c'est cependant vrai dans le cas diagonalisable.

[1] Résolu par le mathématicien français Camille Jordan (1838-1922).

Propriété 9

Soient A et B deux matrices **diagonalisables**. Alors A est semblable à B si et seulement si A et B ont même valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension.

Preuve.

$\square$

Exercice. Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

2.4 Polynôme annulateur et calcul de l'inverse

Propriété 10

Soit A une matrice **diagonalisable**. Alors le polynôme

$$P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$$

est annulateur de A.

Preuve.

$\square$

Exercice. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Déterminer un polynôme annulateur de A, et en déduire A^{-1}.