Chapitre 14

Vecteurs aléatoires

Compétences attendues.

✓ Déterminer la loi d'une somme : stabilité des lois usuelles, somme de lois exponentielles indépendantes.

✓ Déterminer la loi d'un maximum/minimum de variables aléatoires.

Mathieu Mansuy
Professeur en ECG deuxième année spécialité mathématiques approfondies au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`
E-mail : `mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Indépendance mutuelle

1.1 Indépendance mutuelle d'évènements

Définition.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements. Les évènements A_i sont *mutuellement indépendants* si :

- Cas d'une famille finie $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$: $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $\forall (i_1,\dots,i_k)\in\mathbb{N}^k$, $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$,
$$P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\times\cdots\times P(A_{i_k}).$$
- Cas d'une famille infinie $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$: $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall (i_1,\dots,i_k)\in\mathbb{N}^k$, $0\leqslant i_1<\cdots<i_k$,
$$P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\times\cdots\times P(A_{i_k})$$

Remarque. Si les évènements A_i sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. Mais la réciproque est fausse en générale.

1.2 Indépendance mutuelle de variables aléatoires réelles

Définition.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles définie sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$. On dit que les variables aléatoires X_n sont *mutuellement indépendantes* si :

- Cas d'une suite finie $(X_1,\dots,X_n)$: pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, les évènements $[X_1\leq x_1],\dots,[X_n\leq x_n]$ sont mutuellement indépendants, soit encore :
$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i\leq x_i]\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i\leq x_i).$$
- Cas d'une suite infinie $(X_n)_{n\geq 0}$: pour toute partie **finie** $I\subset\mathbb{N}$, les variables $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes.

Propriété 1

Soient $X_1,\dots,X_n$ n variables aléatoires sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$. On a l'équivalence entre :

(1) $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes ;

(2) pour tous $I_1,\dots,I_n$ intervalles de $\mathbb{R}$, on a :
$$P([X_1\in I_1]\cap\cdots\cap[X_n\in I_n]) = \prod_{i=1}^n P([X_i\in I_i])\,;$$

Remarque. En prenant $I_3=\cdots=I_n=\mathbb{R}$ dans (ii), on obtient que si $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendants, alors X_1 et X_2 sont indépendants (puisque $[X_i\in\mathbb{R}]=\Omega$). Plus généralement, on montre que :

> Toute sous-famille d'une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes est encore une famille de variables mutuellement indépendantes.

En particulier si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont deux à deux indépendantes. Mais la **réciproque** est **fausse** en générale !

Propriété 2 (*Lemme de coalitions*)

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. Alors toute variable aléatoire fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de $X_{p+1}, X_{p+2}, \ldots, X_n$.

Propriété 3

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Pour toutes fonctions $f_1, \ldots, f_n$ définies sur un ensemble contenant $X_1(\Omega), \ldots, X_n(\Omega)$ respectivement, les variables aléatoires $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Exemple. Si X_1, X_2, X_3 sont mutuellement indépendantes, alors $X_1 + X_2$ et e^{X_3} sont indépendantes par le lemme de coalitions.

1.3 Indépendance mutuelle de variables aléatoires discrètes

Propriété 4

Les variables aléatoires **discrètes** $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, on a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i).$$

2 Vecteurs aléatoires

2.1 Généralités

Définition.

Un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$ est la donnée d'un n-uplet de variables aléatoires réelles $(X_1, \ldots, X_n)$ définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Définition.

On appelle *loi du vecteur* $(X_1, \ldots, X_n)$ la donnée de la fonction $F_{(X_1,\ldots,X_n)}$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leq x_i]\right).$$

Propriété 5

On suppose que :

- les vecteurs $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ ont la même loi ;
- g est une fonction continue[a] sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors les variables aléatoires $g(X_1, \dots, X_n)$ et $g(Y_1, \dots, Y_n)$ ont la même loi.

[a] Pour la définition de la continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, je vous renvoie au **Chapitre 15. Fonctions de plusieurs variables sur $\mathbb{R}^n$**.

2.2 Lois marginales

Définition.

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On appelle *i-ème loi marginale de* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ la loi de X_i.

✍ À retenir. Lien entre loi du vecteur aléatoire et lois marginales.

- La connaissance de la loi de $(X_1, \dots, X_n)$ permet de retrouver les lois marginales, mais l'inverse n'est pas vrai : on ne peut pas en général retrouver la loi du vecteur à partir des lois marginales.
- Dans le cas particulier où les variables $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes**, on a :
$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n).$$
Ainsi si les variables sont **mutuellement indépendantes**, la loi du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ se retrouve à partir des lois marginales par produit.

2.3 Vecteurs aléatoires discrets

Définition.

Un vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est *discret* si toutes les variables $X_1, \dots, X_n$ sont discrètes.

Propriété 6

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire discret. Alors la loi de $(X_1, \dots, X_n)$ est entièrement déterminée par la donnée de :

- $X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$;
- $P([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n])$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$.

Propriété 7

Si $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire discret, alors la i-ème loi marginale de $(X_1, \dots, X_n)$, i.e. la loi de X_i, est donnée pour tout $x_i \in X_i(\Omega)$ par :

$$P(X_i = x_i) = \sum_{(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_{i-1}(\Omega)\times X_{i+1}(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)} P\left(\bigcap_{j=1}^{n} [X_j = x_j]\right).$$

Preuve. C'est la formule des probabilités totales appliquée au SCE formé des $\bigcap_{1\leq j\neq i\leq n} [X_j = x_j]$ où $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ parcourt l'ensemble $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_{i-1}(\Omega) \times X_{i+1}(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$. $\square$

Propriété 8

Si g est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles, et si $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire discret sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, alors $Y = g(X_1, \dots, X_n)$ est une variable aléatoire discrète, et on a :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{\substack{(x_1,\dots x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \\ g(x_1,\dots,x_n) = y}} P\left(\bigcap_{j=1}^{n} [X_j = x_j]\right)$$

Remarque. En particulier, si $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire discret, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \min(X_1, \dots, X_n), \quad \max(X_1, \dots, X_n), \quad \prod_{i=1}^{n} X_i$$

sont des variables aléatoires discrètes.

3 Variables aléatoires fonctions de n variables aléatoires

3.1 Espérance, variance

Propriété 9 (*Linéarité de l'espérance*)

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant toutes une espérance. Alors pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n$ admet une espérance, et on a :

$$E(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n) = \lambda_1 E(X_1) + \cdots + \lambda_n E(X_n).$$

Preuve. On procède par récurrence sur n, la formule étant déjà connue pour $n = 2$. $\square$

Propriété 10

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires **indépendantes** sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant toutes une espérance. Alors $X_1 \times \cdots \times X_n$ admet une espérance, et on a :

$$E(X_1 \dots X_n) = E(X_1) \dots E(X_n).$$

Preuve. Par récurrence sur n.

Init. Pour $n = 2$, la propriété est déjà connue.

Hér. On suppose la propriété vraie au rang n. Au rang $n+1$: on considère $n+1$ variables aléatoires $X_1, \dots, X_{n+1}$ indépendantes. Alors $X_1 \dots X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions, et elles admettent toutes deux une espérance par hypothèse de récurrence. Alors (propriété au rang $n = 2$) $X_1 \dots X_n X_{n+1}$ admet une espérance et on a :

$$E(X_1 \dots X_n X_{n+1}) = E(X_1 \dots X_n) E(X_{n+1}) \overset{HR}{=} E(X_1) \dots E(X_n) E(X_{n+1}).$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

On conclut que la propriété est vraie pour tout $n \geq 2$ par principe de récurrence. □

Propriété 11

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires **indépendantes** sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant toutes une variance. Alors $X_1 + \dots + X_n$ admet une variance, et on a :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

Plus généralement, $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$ admet une variance, et on a :

$$V(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) = \lambda_1^2 V(X_1) + \dots + \lambda_n^2 V(X_n).$$

Preuve. On procède comme dans la preuve précédente. Laissée en exercice. □

Remarque. Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes et non nécessairement indépendantes, on peut montrer par récurrence la formule suivante :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

3.2 Stabilité des lois usuelles par somme

Théorème 12 (*Stabilité de l'ensemble des lois binômiales*)

Hypothèses :
- Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(m_i, p)$.
- $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i, p\right)$.

Preuve. Par récurrence sur n.

Init. Pour $n = 2$, la propriété est déjà connue.

Hér. On suppose la propriété vraie au rang n. Au rang $n+1$: on considère $n+1$ variables aléatoires $X_1, \dots, X_{n+1}$ indépendantes telles que $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(m_i, p)$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Alors $X_1 + \dots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions. De plus par hypothèse de récurrence :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i, p\right).$$

Ainsi on a (propriété au rang $n = 2$) :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) + m_{n+1}, p\right).$$

D'où la propriété au rang $n + 1$.

On conclut que la propriété est vraie pour tout $n \geq 2$ par principe de récurrence. □

Conséquence. En notant que $\mathscr{B}(p) = \mathscr{B}(1, p)$, on a :

Hypothèses :
- Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.
- $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

On justifie ici ce qu'on utilise déjà depuis longtemps, à savoir qu'une loi binomial $\mathscr{B}(n, p)$ est le nombre de succès lors d'une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.

Remarque. Si on connait l'espérance et la variance d'une loi de Bernoulli (p et $p(1-p)$ resp.) alors on retrouve ici sans calcul celles d'une loi binomiale. En effet, si $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ pour tout $i = 1, \dots, n$, alors $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ et on a :

$$E(X) \overset{\text{lin. de } E}{=} E(X_1) + \cdots + E(X_n) = np,$$

$$V(X) \overset{\text{indép. des } X_i}{=} V(X_1) + \cdots + V(X_n) = np(1-p).$$

Théorème 13 (*Stabilité de l'ensemble des lois de Poisson*)

Hypothèses :
- Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $X_i \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_i)$.
- $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathscr{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Preuve. Par récurrence sur n. □

Théorème 14 (*Stabilité de l'ensemble des lois gamma*)

Hypothèses :
- Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $X_i \hookrightarrow \gamma(\nu_i)$.
- $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \nu_i\right)$.

Preuve. Par récurrence sur n. □

Conséquence.

Hypothèses :
- Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $X_i \hookrightarrow \mathscr{E}(1) = \gamma(1)$.
- $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \gamma(n)$.

Méthode. Loi d'une somme de variables indépendantes suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$.

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$. Pour déterminer la loi de la somme $Y = X_1 + \cdots + X_n$ de lois exponentielles, on procèdera comme suit :

(i) On écrit Y sous la forme $Y = \frac{1}{\lambda}(\lambda X_1 + \cdots + \lambda X_n)$.

(ii) En se servant de l'équivalence

$$X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda X \hookrightarrow \mathscr{E}(1),$$

on en déduit que $\lambda X_i \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$ pour tout i.

(iii) Comme de plus les λX_i sont mutuellement indépendants (d'après le lemme des coalitions), et suivent toutes la loi $\mathscr{E}(1) = \gamma(1)$, on en déduit que :

$$\lambda X_1 + \cdots + \lambda X_n = \lambda Y \hookrightarrow \gamma(n).$$

(iv) On détermine finalement une densité de Y par transformation affine.

Remarque. On dit alors que Y suit la loi $\Gamma(\frac{1}{\lambda}, n)$ (hors programme).

Théorème 15 (*Stabilité de l'ensemble des lois normales*)

Hypothèses :
- Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $X_i \hookrightarrow \mathscr{N}(m_i, \sigma_i^2)$.
- $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathscr{N}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$.

Preuve. Par récurrence sur n. □

Remarque. Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi normale centrée réduite, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathcal{N}(0, n)$, et donc :

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

3.3 Maximum, minimum

Propriété 16

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Posons $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$[Z \leq x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leq x].$$

De plus, si $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes**, alors on a :

$$F_Z(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x).$$

Preuve. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le plus grand des X_i est inférieur ou égal à x si et seulement si **tous** les X_i sont inférieurs ou égaux à x. On a donc l'égalité entre évènements :

$$[Z \leq x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leq x].$$

En prenant la probabilité de ces évènements, on obtient :

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leq x]\right) \overset{\text{indép. des } X_i}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x).$$

□

Remarque. Rappelons que dans le cas d'une variable **discrète** X à valeur dans $\mathbb{Z}$, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = F_X(k) - F_X(k-1).$$

Exercice. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi $\mathscr{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$. Déterminer la loi de $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Propriété 17

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Posons $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$[Z > x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x].$$

De plus, si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors :

$$1 - F_Z(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - F_{X_i}(x)\right).$$

Preuve. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le plus petit des X_i est supérieur strictement à x si et seulement si **tous** les X_i sont supérieurs strictement à x. On a donc l'égalité entre évènements :

$$[Z > x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x].$$

En prenant la probabilité de ces évènements, on obtient :

$$P(Z > x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x]\right) \overset{\text{indép. des } X_i}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = \prod_{i=1}^{n} (1 - P(X_i \leq x)) = \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i}(x))$$

et donc :

$$1 - F_Z(x) = 1 - P(Z \leq x) = P(Z > x) = \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i}(x)).$$

$\square$

Remarque. Rappelons que pour une variable **discrète** X à valeur dans $\mathbb{Z}$, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k).$$

Exercice. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$.