Chapitre 2

Sommes et séries

Compétences attendues.

✓ Calculer une somme finie à l'aide des sommes finies de référence.

✓ Calculer une somme double finie indexée par un rectangle ou un triangle.

✓ Étudier la convergence d'une série à termes positifs par comparaison aux séries de référence.

✓ Étudier la convergence absolue d'une série.

✓ Calculer la somme d'une série à l'aide des séries de référence.

✓ Étudier la convergence d'une série double à l'aide du Théorème de Fubini ou d'une sommation suivant les diagonales.

Mathieu Mansuy

Professeur en ECG deuxième année spécialité mathématiques approfondies au Lycée Louis Pergaud (Besançon)

Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`

E-mail : `mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Sommes usuelles

1.1 Formule du binôme

Coefficients binomiaux

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle *factorielle* n, et on note $n!$, l'entier défini par $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Remarque. On a $0! = 1$ et si $n \geq 1$, $n! = n \times (n-1)!$.

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$. On pose :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{si } p > n \text{ ou } p < 0 \end{cases}$$

$\binom{n}{p}$ est le *coefficient binomial* et se lit « p parmi n ».

Rappel. L'entier $\binom{n}{p}$ est :

- le nombre de chemins réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire ;
- le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Exercice. Déterminer un équivalent de $\binom{n}{p}$ lorsque $n \to +\infty$.

Propriété 1 (Relations sur les coefficients binomiaux)

Soit n un entier naturel non nul.

(1) Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (symétrie des coefficients binomiaux).

(2) Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $p \cdot \binom{n}{p} = n \cdot \binom{n-1}{p-1}$.

(3) Pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ (formule du *triangle de Pascal*).

Preuve.

$\square$

Remarque. Cette dernière relation nous permet de construire le *triangle* dit *de Pascal* (1623 - 1662), afin d'obtenir par un calcul rapide les premiers coefficients binomiaux :

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$\dots$		
$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3	3	1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						
n	1	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\dots$	$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$	$\dots$	1

Formule du binôme de Newton

Théorème 2 (*Formule du binôme de Newton* (1642 - 1727))

Soient a et b deux nombres réels et n un entier naturel. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemples.

- $\displaystyle \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$
- $\displaystyle \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0.$

1.2 Autres sommes usuelles

Sommes usuelles	
Somme des premiers entiers	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k =$
Somme des premiers carrés	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 =$
Somme des premiers cubes	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 =$
Sommes géométriques	$\displaystyle\forall q \in \mathbb{R},\ \sum_{k=m}^{n} q^k = \left\{ \right.$

Preuve.

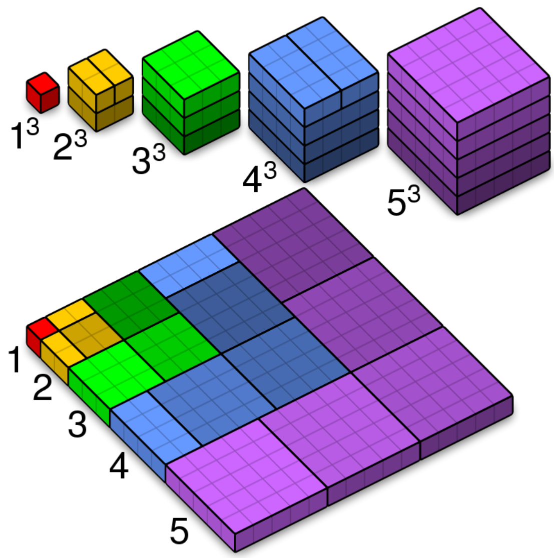
- Somme des premiers carrés $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

- Somme des premiers cubes $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

  En observant sur l'illustration ci-contre l'égalité des volumes entre le pavé du bas et les cubes disposés au dessus, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

  Et sachant que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, on a bien l'égalité souhaitée.



□

Propriété 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a et b des réels. Alors on a :

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right).$$

Preuve. On développe $(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right)$:

$$\begin{aligned}(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right) &= (a-b)(b^{n-1} + ab^{n-2} + \cdots + a^{n-1}) \\ &= (ab^{n-1} + a^2b^{n-2} + \cdots + a^n) - (b^n + ab^{n-1} + \cdots + a^{n-1}b) \\ &= a^n - b^n.\end{aligned}$$

□

2 Sommes doubles

2.1 Sommes doubles indexées par un rectangle

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère une famille de réels indexée par deux indices $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$. On souhaite calculer la somme de tous les réels de cette famille, on la note $S = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j}$.

Propriété 4 (Somme double indexée par un rectangle)

On a les égalités suivantes :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Preuve. On dispose les $a_{i,j}$ dans un tableau à double entrée.

	$j=1$	$j=2$	$\cdots$	$j=p$	
$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,p}$	
$i=2$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,p}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$i=n$	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\cdots$	$a_{n,p}$	
					S

□

Propriété 5 (Produit de deux sommes)

Soient $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_j)_{1\leq j\leq p}$ deux familles de nombres réels. Alors on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\times\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_ib_j=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_ib_j.$$

Preuve.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\times\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\sum_{j=1}^{p} b_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_ib_j\right).$$

On est ramené à une somme double comme dans la proposition précédente. □

2.2 Sommes doubles indexées par un triangle

On suppose à présent que $n=p$, et on souhaite faire la somme de tous les coefficients se trouvant au dessus de la diagonale (comprise ou non).

Propriété 6 (Somme double indexée par un triangle)

On a les égalités suivantes :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}.$$

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}=\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}.$$

Preuve. De même, on dispose les $a_{i,j}$ dans un tableau à double entrée. Mais cette fois le tableau est triangulaire : seuls sont pris en compte les éléments $a_{i,j}$ où $i\leq j$.

$$\begin{array}{|c|cccc|c|}
\hline
 & j=1 & j=2 & \cdots & j=n & \\
\hline
i=1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \\
i=2 & & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & \displaystyle\sum_{j=2}^{n} a_{2,j} \\
\vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
i=n & & & & a_{n,n} & \displaystyle\sum_{j=n}^{n} a_{n,j} \\
\hline
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{1} a_{i,1} & \displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_{i,2} & \cdots & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,n} & S \\
\hline
\end{array}$$

La deuxième égalité s'obtient en sommant les termes qui sont strictement au dessus de la diagonale.

$\square$

Méthode. Calcul d'une somme double indexée par un triangle.

Ces égalités ne sont pas à apprendre par cœur. Il faut savoir les retrouver en procédant ainsi :

(i) on choisit la variable sur laquelle on somme en premier, par exemple j. On écrit alors les sommes sans les bornes : $\displaystyle\sum_{i=}\left(\sum_{j=} a_{i,j}\right)$ *;*

(ii) on détermine les bornes de la somme $\displaystyle\sum_{i=}$ en regardant l'intervalle d'entiers parcouru par i. Ces bornes ne doivent pas dépendre de j ;

(iii) on détermine enfin les bornes de la deuxième somme $\displaystyle\sum_{j=}$ en fixant i et en regardant l'intervalle d'entiers parcouru par j. Cet intervalle dépend de i.

Exercice. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j}$.

3 Rappels sur les séries

Dans cette section, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de réels.

3.1 Généralités

Définition.

- On appelle *série de terme général* u_n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On la note $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou encore $\sum u_n$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est appelé *la somme partielle d'ordre* n ou n*-ème somme partielle.*
- On dit que la série $\sum u_n$ *converge* si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie dans $\mathbb{R}$, et on appelle alors *somme de la série* le réel $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$, qu'on note S ou $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
  Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum u_n$ est *divergente.*

Remarques.

- Attention aux notations !

$\sum_{k=0}^{n} u_k$	$\sum u_n$ ou $\sum_{n\geq 0} u_n$	$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
Somme partielle d'indice n	Série de terme général u_n : la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$	Somme de la série (si **convergence**) : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_k$

- La *nature* d'une série (convergente ou divergente) ne dépend pas :
  - de l'indice de départ : étant donné $n_0 \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.
  - des constantes multiplicatives : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature.

Définition.

On suppose que la série $\sum u_n$ **converge**.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle *reste partiel d'ordre* n le nombre : $\quad R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$

Remarque. Si $\sum u_n$ est une série convergente, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S - S_n = 0$.

Propriété 7 (Opérations sur les séries)

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont **convergentes** et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.

Mise en garde.

Il est possible que la série $\sum(u_n+v_n)$ converge alors que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent (par exemple dans le cas où $u_n = 1$ et $v_n = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Pour scinder une somme en deux, on vérifiera au préalable que les deux séries convergent.

Propriété 8 (Télescopage)

La série $\sum(u_n - u_{n+1})$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}$. Ainsi la série $\sum(u_n - u_{n+1})$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. □

Exercice.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$. En déduire que $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que la *série harmonique* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge.

3.2 Condition nécessaire de convergence

Propriété 9 (Condition nécessaire de convergence)

Pour que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, **il faut que** $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$.

Mais **ce n'est pas suffisant !**

Preuve.

□

Remarque. Par contraposition, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série diverge. On dit dans ce cas que la série $\sum u_n$ *diverge grossièrement*.

Exemple. La série $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n$ diverge grossièrement.

Mise en garde.

Il existe des séries dont le terme général tend vers 0 et divergentes. Par exemple, la série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ n'est pas grossièrement divergente ($\frac{1}{n}$ tend vers 0), mais on a vu que cette série diverge cependant.

3.3 Séries de référence

Séries usuelles		Cas de convergence	Somme dans ce cas
Séries de Riemann	$\sum\limits_{k\geq 1}\frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha>1$	
Séries géométriques	$\sum\limits_{k\geq 0} q^k$, $q\in\mathbb{R}$	$\lvert q\rvert<1$	$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^k=\frac{1}{1-q}$
Séries géométriques dérivées d'ordre 1	$\sum\limits_{k\geq 1} kq^{k-1}$	$\lvert q\rvert<1$	$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}=\frac{1}{(1-q)^2}$
Séries géométriques dérivées d'ordre 2	$\sum\limits_{k\geq 2} k(k-1)q^{k-2}$	$\lvert q\rvert<1$	$\sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2}=\frac{2}{(1-q)^3}$
Séries exponentielles	$\sum\limits_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}$, $x\in\mathbb{R}$	quelque soit $x\in\mathbb{R}$	$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$

Astuce.

Si on dérive q^n par rapport à q, on obtient nq^{n-1}. Et si on dérive $\frac{1}{1-q}$, on obtient $\frac{1}{(1-q)^2}$. Il suffit donc d'apprendre la première relation, et de la dériver une ou deux fois pour retrouver les deux autres.

Le saviez-vous ?

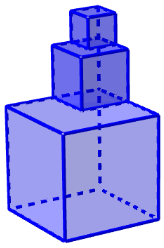
Pour $\alpha>1$ quelconque, on ne connait pas en général la valeur de la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$. Un problème célèbre, appelé *problème de Bâle*, est justement de calculer cette valeur lorsque $\alpha=2$. Posé par le mathématicien Pietro Mengoli en 1644, ce problème résista aux attaques des mathématiciens éminents de l'époque. C'est Euler qui en découvrit la valeur[a] en 1735 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

On a obtenu depuis des formules pour $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque α est un entier pair. Mais si α est un entier impair, ou n'est pas entier, on ne sait (presque) rien dire, et il s'agit d'un sujet de recherche actif.

[a] Une preuve de cette surprenante formule se trouve dans le problème 2 du sujet d'EM Lyon 2005.

Exemple. Piles et sommes de Riemann.



Imaginons un empilement de cubes de bois d'arêtes de longueurs 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... à l'infini.

Bien que de hauteur infinie (puisque la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge), il ne faudrait qu'une quantité finie de peinture pour recouvrir cette pile (sa surface étant inférieure à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{n^2}$ qui converge), et une quantité finie de bois pour la fabriquer (son volume étant lui inférieur à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ qui converge aussi).

Le saviez-vous ?

Dans ses travaux pour la résolution du problème de Bâle, Euler est amené à introduire la fonction ζ (prononcée « zeta ») définie pour tout $s > 1$ par : $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Il démontre notamment la formule suivante liant ζ à l'ensemble des nombres premiers $\mathscr{P}$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Dès lors, l'étude de cette fonction devient un enjeu crucial pour les mathématiciens, puisque sa compréhension améliorerait la connaissance de la répartition des nombres premiers.

Les idées d'Euler sont reprises par le mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826 - 1866) dans un article de 1859, dans lequel il étudie (un prolongement au plan complexe[a] de) la fonction ζ, baptisée depuis la *fonction zêta de Riemann.* Il y énonce sa célèbre conjecture, appelée *hypothèse de Riemann*, sur les points d'annulation de cette fonction : ils seraient tous, sauf zéros triviaux, sur la droite des nombres complexes de partie réelle égale à $\frac{1}{2}$!

L'hypothèse de Riemann est l'un des problèmes non résolus les plus importants des mathématiques du début du 21è*me* siècle. Il fait partie des sept *Problèmes du prix du millénaire* posés par l'Institut de mathématiques Clay en 2000, qui offre un million de dollars pour sa résolution.

Si les séries de Riemann vous passionnent, si vous voulez devenir riche et célèbre, ou si vous souhaitez simplement en savoir un peu plus sur ce sujet fascinant, ce lien devrait vous plaire.

[a] Le plan complexe n'est autre que $\mathbb{R}^2$ muni d'une nouvelle opération algébrique $\times$. Dans ce plan, l'abscisse d'un élément est appelée sa partie réelle, son ordonnée sa partie imaginaire.

Exercice. Convergence et somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{3^n}$?

3.4 Séries à termes positifs

Mise en garde.

Les résultats énoncés dans cette partie ne sont valables que pour les séries **à termes positifs**, ou plus généralement pour les séries de **terme général de signe constant à partir d'un certain rang**. Ils sont faux si le terme général change de signe.

Propriété 10

Soit $\sum u_n$ une série **à termes positifs**. Alors la suite des sommes partielles (S_n) est croissante, et :

- si (S_n) est majorée, $\sum u_n$ converge ;
- si (S_n) n'est pas majorée, $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$.

Preuve. C'est le théorème de convergence monotone pour les suites réelles. ☐

Comparaison par	Hypothèses	Conclusion
Équivalent	• $u_k \underset{+\infty}{\sim} v_k$ • $v_k \geq 0$ (ou $u_k \geq 0$) à partir d'un certain rang • $\sum\limits_{k\geq 0} v_k$ converge (respectivement diverge)	$\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ converge (resp. diverge)
Négligeabilité « petit o »	• $u_k = \underset{+\infty}{o}(v_k)$ • $v_k \geq 0$ à partir d'un certain rang • $\sum\limits_{k\geq 0} v_k$ converge	$\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ converge
	• $u_k = \underset{+\infty}{o}(v_k)$ • $v_k \geq 0$ à partir d'un certain rang • $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ diverge	$\sum\limits_{k\geq 0} v_k$ diverge
Inégalité	• $u_k \leq v_k$ à partir d'un certain rang • $u_k \geq 0$ à partir d'un certain rang • $\sum\limits_{k\geq 0} v_k$ converge	$\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ converge
	• $u_k \leq v_k$ à partir d'un certain rang • $u_k \geq 0$ à partir d'un certain rang • $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ diverge	$\sum\limits_{k\geq 0} v_k$ diverge

Exercice. Étudier la nature des séries suivantes :

- $\sum\limits_{n\geq 1} \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

- $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2\ln(n)}$.

- $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\ln(n)}{n^2}$.

3.5 Séries absolument convergentes

Définition.

On dit qu'une série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

Remarque. Grâce à cette notion, on se ramène à l'étude d'une série à termes positifs pour laquelle on peut appliquer tous les résultats de la section précédente.

Exemples.

- $\sum x^n$, $\sum nx^n$, $\sum n(n-1)x^n$ sont absolument convergentes pour $|x| < 1$.
- $\sum \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété 11 (Condition suffisante de convergence)

Si la série $\sum u_n$ converge absolument, **alors** elle converge. De plus on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|. \qquad (\textit{inégalité triangulaire généralisée}).$$

Preuve.

$\square$

Exemple. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente, donc convergente.

Mise en garde.

Il existe des séries convergentes ($\sum u_n$ converge) qui ne sont pas absolument convergentes ($\sum |u_n|$ diverge). Nous verrons par exemple en TD que la série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente, mais pas absolument convergente.

Terminons par un résultat plus difficile.

Propriété 12

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série **absolument convergente**. Alors pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective, la série $\sum u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}.$$

Remarque. Ce résultat signifie que pour une série absolument convergente, l'ordre de sommation est sans importance. C'est fondamental pour définir l'espérance d'une variable aléatoire discrète, car la somme ne dépend pas de la « numérotation » qu'on a choisie pour $X(\Omega)$ (une telle numérotation consiste à ordonner les éléments de $X(\Omega)$).

Pour aller plus loin.

Pour des séries convergentes mais pas absolument convergentes, l'ordre de sommation peut influer sur la nature de la série ou la valeur de sa somme. Prenons par exemple $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. Cette série est convergente mais pas absolument convergente. Et on peut montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$$

alors qu'en arrangeant les termes d'une autre façon, on obtient :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(2)}{2}.$$

On peut même trouver une numérotation φ telle que $\sum u_{\varphi(n)}$ diverge.

3.6 Plan d'étude d'une série

Considérons une série $\sum u_n$ de terme général réel et de signe quelconque. Pour déterminer sa nature, on vérifie dans l'ordre :

- **si son terme général tend vers 0 :** si ce n'est pas le cas, la série diverge grossièrement et l'étude s'arrête là ;
- **si son terme général est de signe constant à partir d'un certain rang :**
  - on le précise dès le début de l'étude (« C'est une série de terme général de signe constant (à partir d'un certain rang) ») ;
  - on peut appliquer un théorème de comparaison à une série de référence (géométrique, Riemann, exponentielle).
- **si son terme général est de signe quelconque :**
  - on étudie la convergence absolue de la série ;
  - si elle n'est pas absolument convergente, l'énoncé nous guidera sur une autre méthode, éventuellement celle détaillée dans le

    ☞ **Complément de cours 1. Autour des séries alternées.**

4 Séries doubles

On souhaite dans cette partie définir la somme d'une « grosse » famille de nombres, dans le sens où cette famille n'est plus indexée par $\mathbb{N}$ mais par un ensemble plus « gros », par exemple par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Mais comment s'y prendre pour une telle famille ?

Tentons de nous inspirer du cas d'une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$. Pour une telle famille, nous avons sommé un nombre fini de termes (ce sont les sommes partielles), puis nous passions à la limite. Et comme il y a un ordre naturel sur $\mathbb{N}$, on sommait les éléments de (u_n) dans cet ordre : d'abord u_0, puis u_1, puis u_2, etc.

Pour une famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, nous pouvons encore calculer des sommes finies, puis passer à la limite. Mais dans quel ordre sommer les termes de la famille ? Il n'y a aucun ordre naturel sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas un plus petit élément de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, puis un autre élément qui viendrait juste après, puis encore un autre, etc.

L'idée consiste à numéroter les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: il y en aura donc un premier, puis un deuxième, etc, et nous pourrons donc les sommer dans cet ordre. Mais cela pose deux questions :

- Est-il possible de numéroter les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$? Cela nous mènera à la notion d'*ensemble dénombrable*.
- Si on décide d'une autre numérotation, obtient-on les mêmes résultats (convergence, valeur de la somme) ? Nous verrons que c'est effectivement le cas pour certaines familles dîtes *sommables*.

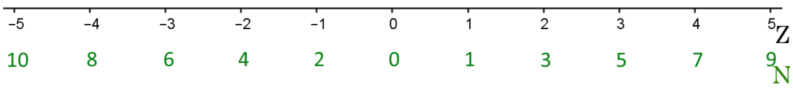
4.1 Ensemble dénombrable infini

Définition.

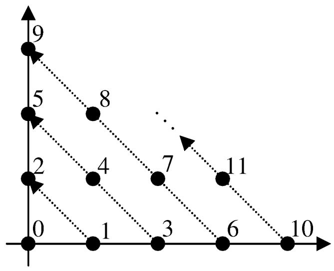
On dit qu'un ensemble I est *dénombrable infini* lorsqu'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ dans I c'est-à-dire lorsque I est un ensemble infini dont on peut énumérer les éléments, sans omission ni répétition.

Exemples.

- $\mathbb{N}$ est dénombrable : on peut énumérer $0, 1, 2, 3, \ldots$
- $\mathbb{Z}$ est dénombrable : on peut énumérer $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$



- $\mathbb{N}^2$ est dénombrable : on peut énumérer suivant les diagonales $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), \ldots$



- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (résultat difficile dû au mathématicien Georg Cantor (1845 - 1918)).

Remarque. On admet que les manipulations ensemblistes classiques (produits finis, réunions dénombrables) d'ensembles dénombrables fournissent encore des ensembles dénombrables. Par exemple $\mathbb{N}^3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est aussi dénombrable.

4.2 Familles indexées par un ensemble dénombrable infini

Définition.

Soit I un ensemble dénombrable, et soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels indexée par I.
On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est *sommable* s'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to I$ telle que $\sum_{n\geq 0} u_{\varphi(n)}$ converge **absolument**.

Propriété 13

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$ est indépendante de l'indexation φ. On appelle ce réel la *somme de la famille* $(u_i)_{i\in I}$ et on la note simplement $\sum_{i\in I} u_i$.

Remarque. Les définitions de cette section sont peu utilisables en pratique (problème du choix de φ qui peut mener à des calculs trop compliqués). Pour montrer qu'une famille indexée par $\mathbb{N}^2$ est sommable, on utilisera l'un des théorèmes des sections suivantes (Fubini ou sommation suivant les diagonales).

4.3 Théorème de Fubini

Théorème 14 (*Théorème de Fubini* (1879 - 1943))

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) La famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

(2) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{j\geq 0} |u_{i,j}|$ converge et la série $\sum_{i\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} |u_{i,j}|\right)$ converge.

(3) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{i\geq 0} |u_{i,j}|$ converge et la série $\sum_{j\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u_{i,j}|\right)$ converge.

Dans ce cas, on a alors :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\right),$$

toutes les sommes intervenant dans cette égalité étant des sommes de séries convergentes.

Méthode. Théorème de Fubini.

Pour montrer qu'une famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable à l'aide du théorème de Fubini, on procèdera comme suit :

(i) On choisit l'un des deux indices, disons i pour fixer les choses, comme premier indice de sommation (parce qu'on reconnait pour cet indice une série de référence).

*(ii) À $j \in \mathbb{N}$ **fixé**, on étudie la convergence de $\sum_{i\geq 0} |u_{i,j}|$.*

- *Si elle ne converge pas, la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.*
- *Si elle converge, on calcule sa somme $S_j = \sum_{i=0}^{+\infty} |u_{i,j}|$ (qui ne doit dépendre que de j), et on passe à l'étape suivante.*

(iii) On étudie alors la convergence de la série $\sum_{j\geq 0} S_j$.

- *Si elle ne converge pas, la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.*
- *Si elle converge, alors on peut conclure que la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.*

Et dans le cas où la famille est sommable, on peut calculer sa somme (essentiellement en reprenant les calculs effectués, mais cette fois sans valeurs absolues) :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\right).$$

Exercices. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on définit $u_{i,j} = \dfrac{(-1)^{i+j} i^j}{i! j!}$. Montrer que la famille $(u_{i,j})$ est sommable et calculer sa somme.

Propriété 15

Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Si les séries $\sum_{i\geq 0} u_i$ et $\sum_{j\geq 0} v_j$ convergent absolument alors la famille $(u_iv_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, et on a :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_iv_j = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_j\right).$$

Preuve.

$\square$

4.4 Sommation par paquets

Propriété 16 (Sommation par paquets)

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de $\mathbb{N}^2$, c'est-à-dire une famille de sous-ensembles de $\mathbb{N}^2$ telle que :

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n = \mathbb{N}^2 \text{ et } I_n\cap I_m = \varnothing \text{ si } n\neq m.$$

Alors la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si :

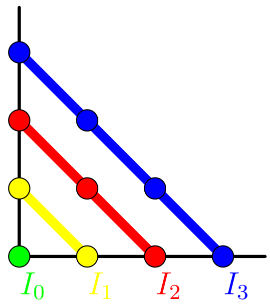
(i) pour tout $n\in\mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable (et donc $\sum_{i\in I_n} |u_i|$ existe) ;

(ii) la série $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{(i,j)\in I_n} |u_{i,j}|\right)$ converge.

Dans ce cas, on a alors :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{(i,j)\in I_n} u_{i,j}\right).$$

Cas particulier important. Sommation suivant les diagonales.



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\begin{aligned} I_n &= \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \ / \ i+j=n\} \\ &= \{(i, n-i) \ / \ i \in [\![0,n]\!]\} \end{aligned}$$

C'est un ensemble fini de cardinal $n+1$.
Les (I_n) forment bien une partition de $\mathbb{N}^2$.

En appliquant le résultat précédent avec la partition (I_n) de $\mathbb{N}^2$ suivant les diagonales, on obtient la

Propriété 17 (Sommation suivant les diagonales)

La famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i+j=n}|u_{i,j}|\right)$ converge, et dans ce cas :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i+j=n} u_{i,j}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} u_{i,n-i}\right).$$

Idée.

On pensera à utiliser la sommation suivant les diagonales quand le terme général $u_{i,j}$ de la famille fait intervenir la quantité $i+j$.

Exercice. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on pose $u_{i,j} = \frac{1}{(i+j)!}$. Montrer que la famille $(u_{i,j})$ est sommable, et calculer sa somme.

Remarques.

- On admettra que les théorèmes ou les techniques classiques concernant les séries s'étendent aux familles indexées par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- On pourrait de la même façon traiter des familles indexées par $\mathbb{N}^3$, $\mathbb{N}^4$, $\cdots$