Chapitre 8

Intégrales généralisées

Compétences attendues.

- ✓ Étudier la convergence d'une intégrale (intégrales faussement impropres, comparaison à des intégrales de référence pour les fonctions positives, absolue convergence).
- ✓ Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive.
- ✓ Calculer une intégrale par intégration par parties (en se ramenant à un segment).
- ✓ Déterminer la nature et calculer une intégrale par changement de variable.
- ✓ Reconnaitre et utiliser la fonction Γ.

Mathieu Mansuy

Professeur en ECG deuxième année spécialité mathématiques approfondies au Lycée Louis Pergaud (Besançon)

Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`

E-mail : `mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Rappels d'intégration sur un segment

1.1 Définitions

Définition.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle *primitive* de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Propriété 1

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I.

- f admet une primitive sur I.
- Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = G(x) + c.$$

Définition.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a \leq b$. Si F est une primitive de f, on pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Cette quantité est indépendante de la primitive de f choisie. On l'appelle *l'intégrale de f sur le segment* $[a, b]$.

Théorème 2 (*Théorème fondamental de l'analyse*)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit $a \in I$. Alors l'application

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et c'est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

Exercice. Montrer que la fonction $G : x \in]1, +\infty[\mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$. Que peut-on en conclure ?

1.2 Propriétés élémentaires

Nom	Hypothèses	Conclusion
Relation de Chasles	f est continue sur I, $a, b, c \in I$	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$
Linéarité	f, g continues sur $[a, b]$	$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
Positivité	• $a \leq b$ • f continue sur $[a, b]$ • $\forall t \in [a, b],\ f(t) \geq 0$	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$
Croissance	• $a \leq b$ • f, g continues sur $[a, b]$ • $\forall t \in [a, b],\ f(t) \leq g(t)$	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
Cas de nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive	• $a < b$ • f est **continue** sur $[a, b]$ • $\forall t \in [a, b],\ f(t) \geq 0$ • $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$	$\forall t \in [a, b], \quad f(t) = 0$
	• $a < b$ • f est **continue** sur $[a, b]$ • $\forall t \in [a, b],\ f(t) \geq 0$ • Il existe $t_0 \in [a, b]$ tel que $f(t_0) > 0$	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$

Mise en garde.

Pour le cas de nullité d'une intégrale, on prendra soin de bien citer toutes les hypothèses :

- **continuité** de f sur $[a, b]$;
- **positivité** de f sur $[a, b]$.

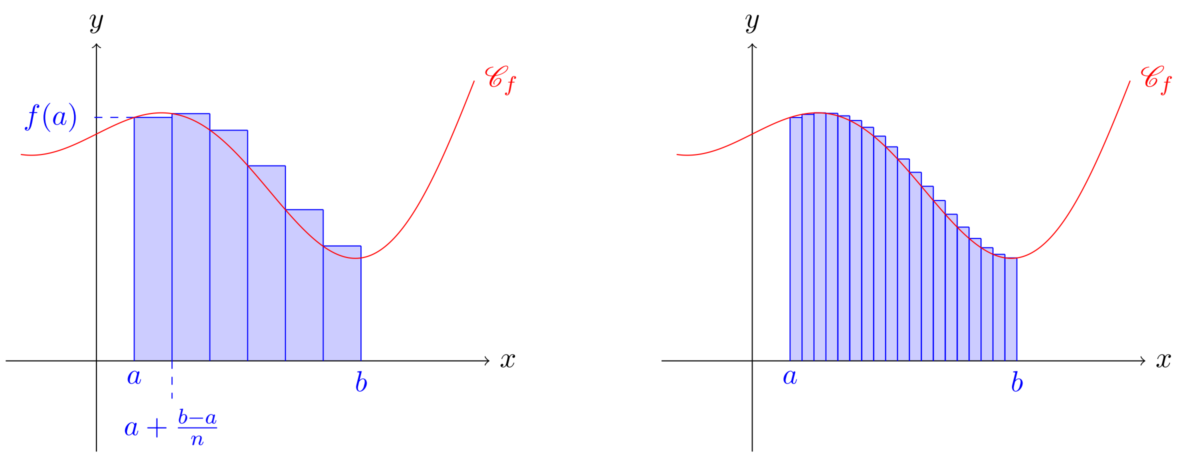
1.3 Sommes de Riemann

Théorème 3 (*Somme de Riemann - Méthode des rectangles*)

Si f est **continue** sur $[a, b]$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Interprétation graphique. Le terme $\frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ est l'aire du rectangle de base $\frac{b-a}{n}$ et de hauteur $f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$. La somme $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ correspond donc à l'aire en bleu dans les dessins ci-dessous.

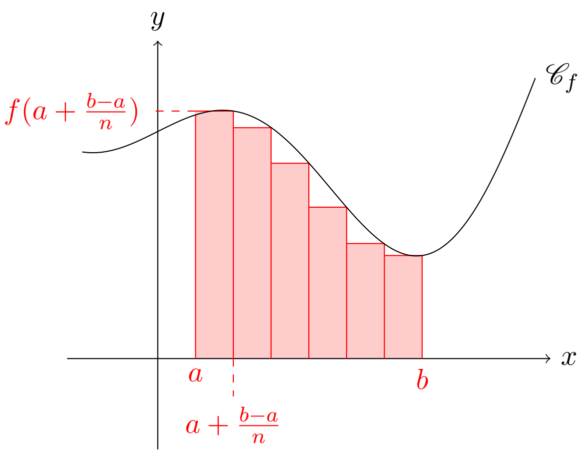


$n = 6.$ $n = 20.$

Méthode des rectangles « à gauche ».

Lorsque n tend vers $+\infty$, cette aire tend vers l'aire sous la courbe de f entre a et b. Le théorème des sommes de Riemann justifie donc l'interprétation de l'intégrale comme une aire dans le cas où f est positive.

Remarque. On a le même résultat avec la somme $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$, qui correspond à la méthode des rectangles « à droite ».



Méthode des rectangles « à droite ».

Méthode. Calcul d'une somme de Riemann.

En pratique, on pourra penser à une somme de Riemann lorsque la suite (u_n) considérée est une somme finie de n termes et que le terme général de cette somme dépend également de n. On mettra alors $\dfrac{1}{n}$ en facteur de la somme, et il s'agira d'identifier une fonction f telle que $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ (on prendra $a = 0$ et $b = 1$ dans la somme ci-dessus).

Exercice. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$.

1.4 Primitives usuelles

Hypothèses	Fonction $x \mapsto \dots$	Primitive $x \mapsto \dots$
u de classe $\mathscr{C}^1$ sur I	$u'e^u$	e^u
u de classe $\mathscr{C}^1$ ne s'annulant pas sur I	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$
u de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement positive sur I	$u'u^\alpha$, $\alpha \neq -1$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$

Fonction $x \mapsto \dots$	Primitive $x \mapsto \dots$	Domaine de validité
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
x^n, $n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$, $a>0$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$

2 Rappels sur les intégrales généralisées

2.1 Définition

Définition.

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si $\lim\limits_{x \to b^-} \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on dit que l'*intégrale généralisée* (ou *impropre*) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge*, et on note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée est *divergente*.

La *nature d'une intégrale généralisée* est son caractère convergent ou divergent.

Exercice. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{d}t$.

Mise en garde.

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0.$$

Il se peut en effet que cette intégrale converge sans que f admette de limite en $+\infty$. Il n'y a donc pas pour les intégrales généralisées d'analogue à la divergence grossière pour les séries.

Pour aller plus loin.

On peut néanmoins montrer que si f est continue sur $[a, +\infty[$, que f **admet une limite en** $+\infty$ et que $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Définition.

- On définit, de même que précédemment, l'intégrale sur un intervalle de la forme $]a, b]$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ comme la limite (si elle existe) $\lim\limits_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si f est continue sur un intervalle $]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite *convergente* si pour un (et donc pour tous) $c \in]a, b[$, les deux intégrales
$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
convergent. On pose alors :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque. En pratique, on choisit le réel $c \in]a, b[$ qui nous arrange le plus.

Exercice. Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$.

Propriété 4

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ avec b **réel**.

Si $\lim\limits_{t\to b^-} f(t)$ existe et est **finie**[a], alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

[a] Sous ces hypothèses, on sait alors que f est prolongeable par continuité en b. Son prolongement $\tilde{f}$ est alors continu sur le segment $[a, b]$.

Vocabulaire. On parle alors d'intégrale *faussement généralisée* (ou *faussement impropre*) : cela relève en effet d'une intégrale d'une fonction continue, à savoir $\tilde{f}$, sur un segment $[a, b]$.

Exercice. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Plus généralement, nous pouvons être amené à considérer des fonctions qui ne sont pas continues sur un intervalle, mais sur un intervalle privé d'un nombre fini de points.

Propriété 5

Considérons $-\infty \leq a = a_1 < a_2 < \cdots < a_p = b \leq +\infty$, et soit f une fonction continue sur chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$, $1 \leq i \leq p-1$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si chacune des intégrales $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour $1 \leq i \leq p-1$. On note alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a_1}^{a_2} f(t)\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_{a_{p-1}}^{a_p} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Méthode. Étude de la nature d'une intégrale généralisée.

Pour étudier la nature d'une intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, il faut :

(i) déterminer précisément où la fonction f est continue. Pour les points où le domaine de continuité est ouvert, il faut étudier la convergence de l'intégrale ;

(ii) étudier l'intégrabilité de f sur tous les sous-intervalles de $[a, b]$ contenant au plus un point où l'intégrale est impropre ;

(iii) l'intégrale de départ converge si TOUTES ces intégrales convergent. En cas de convergence, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à la somme des intégrales sur tous ces sous-intervalles.

Exercice. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$

2.2 Reste d'une intégrale généralisée convergente

Définition.

On suppose que f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$ (définition analogue sur $]a, b]$) et que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, généralisée en b, **converge**.

On appelle *reste de l'intégrale généralisée* $\int_a^b f(t)dt$ la fonction $R : x \mapsto \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$.

Propriété 6

La fonction R est bien définie sur $[a, b[$ et on a :

$$\lim_{x \to b} R(x) = 0.$$

Preuve.

□

2.3 Propriétés élémentaires

Nom	Hypothèses	Conclusion
Relation de Chasles	Toutes les intégrales en jeu convergent	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ $\big(c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\big)$
Linéarité	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent	$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge $(\lambda, \mu$ réels$)$ $\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge	$\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$ diverge
Positivité	• $a \leq b$ • $\forall t \in [a, b[,\ f(t) \geq 0$ • $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$
Croissance	• $a \leq b$ • $\forall t \in [a, b[,\ f(t) \leq g(t)$ • $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
Cas de nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive	• $a < b$ • f est **continue** sur $[a, b[$ • $\forall t \in [a, b[,\ f(t) \geq 0$ • $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$	$\forall t \in [a, b[,\ f(t) = 0$
	• $a < b$ • f est **continue** sur $[a, b[$ • $\forall t \in [a, b[,\ f(t) \geq 0$ • Il existe $t_0 \in [a, b[$ tel que $f(t_0) > 0$ • $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$

Mise en garde.

L'intégrale généralisée $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$ peut converger alors que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ divergent.
On ne peut donc pas scinder une intégrale généralisée en deux sans vérifier au préalable que ces deux intégrales convergent.

2.4 Intégrales de référence

	INTÉGRALE	NATURE	VALEUR
Riemann	En $+\infty$: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$	Converge ssi $\alpha > 1$	À retrouver si besoin à l'aide d'une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$: $\begin{cases} t \mapsto \ln t \text{ si } \alpha = 1 \\ t \mapsto \frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1} \text{ si } \alpha \neq 1 \end{cases}$
Riemann	En $a \in \mathbb{R}$: $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ ($b\in\mathbb{R}, b>a$) Cas particulier $a = 0$: $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$	Converge ssi $\alpha < 1$	
Expon.	$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	Converge ssi $\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$
Log.	$\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$	Converge	À retrouver si besoin à l'aide d'une primitive de $t \mapsto \ln(t)$: $t \mapsto t\ln(t) - t$
Gauss	$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$	Converge	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
Gauss	$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$	Converge	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
Gamma	$\int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \quad (\nu \in \mathbb{R})$	Converge ssi $\nu > 0$	$\Gamma(\nu)$ par définition

Exemples.

- $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ sont toutes deux divergentes.
- $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}$ est convergente (intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$).
- $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-2}}$ est convergente (intégrale de Riemann en 2 avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

2.5 Théorèmes de comparaison

Propriété 7

Soit f une fonction continue et **positive** sur $[a, b[$. Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

Grâce à cette propriété, on en déduit les résultats suivants, où f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b[$:

COMPARAISON PAR	HYPOTHÈSES	CONCLUSION
Inégalité	• Au voisinage de b, $0 \leq f(t) \leq g(t)$ • $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge	$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge
	• Au voisinage de b, $0 \leq f(t) \leq g(t)$ • $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge	$\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge
Négligeabilité	• $f(t) = \underset{b}{o}(g(t))$ • Au voisinage de b, $g(t) \geq 0$ • $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge	$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge (absolument)
	• $f(t) = \underset{b}{o}(g(t))$ • Au voisinage de b, $g(t) \geq 0$ • $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge	$\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge
Équivalent	• $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$ • Au voisinage de b, $g(t) \geq 0$ (ou $f(t) \geq 0$) • $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge (respectivement diverge)	$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge (resp. diverge)

Remarques.

- Le réel a n'a ici aucune importance, il faut juste le choisir dans l'intervalle où f et g sont toutes deux continues.
- Les théorèmes de comparaison s'appliquent plus généralement avec des fonctions de signe constant au voisinage de b (on les applique à $-f$ si f est négative). Pour des fonctions qui changent constamment de signe au voisinage de b ou dont le signe est difficile à déterminer, on pensera à étudier la convergence absolue.

Exercice. Étudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t - 1}$.

- Intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2.6 Intégrales absolument convergentes

Définition.

On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge absolument* lorsque l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 8

Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, **alors** elle converge. De plus, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad (\textit{Inégalité triangulaire})$$

Preuve. La preuve est semblable au cas des séries, et laissée en exercice. □

Exercice. Étudier la nature des intégrales suivantes :

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

- $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$.

Mise en garde.

La réciproque du théorème précédent est fausse : on peut par exemple montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, mais ne converge pas absolument. On parle alors d'*intégrale semi-convergente*.

3 Techniques de calcul d'intégrales généralisées

3.1 Intégration par parties

Propriété 9 (*Intégration par parties*)

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve. On a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f'(t)g(t)+f(t)g'(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b (fg)'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b$$

puisque $f\times g$ est $\mathscr{C}^1$ comme produit de fonctions qui le sont. □

Rédaction.

En pratique, on procèdera à une intégration par parties en utilisant le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|ccc} + & \boxed{g} & & f' \\ & & \searrow & \\ - & g' & \xleftarrow{\int} & \boxed{f} \end{array} \qquad \boxed{\text{fonctions } \mathscr{C}^1}$$

Exercice. Déterminer une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

Exercice. Calculer $I = \displaystyle\int_0^\pi (t^2-t+1)\cos t\,\mathrm{d}t$.

Mise en garde.

On n'effectuera JAMAIS d'intégration par parties directement sur une intégrale généralisée.

Méthode. Intégration par parties pour une intégrale généralisée.

Pour faire une intégration par partie pour une intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *généralisée en* b *:*

(i) on commence par faire cette intégration par parties sur un segment $[a,x]$ *avec* $x \in [a,b[$ *;*

(ii) on fait ensuite tendre x *vers* b *en veillant à bien justifier que toutes les limites considérées existent.*

Exercice. Nature et valeur éventuelle de $\int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

3.2 Changement de variable

Théorème 10 (*Changement de variable pour les intégrales généralisées*)

Soit f une fonction continue sur $]\alpha,\beta[$, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. On considère une fonction $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$.

Hypothèses :
- φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b[$,
- φ est **strictement monotone** sur $]a,b[$,
- $\varphi(]a,b[) =]\alpha,\beta[$.

Alors les intégrales généralisées $\int_{\lim\limits_{t\to a^+}\varphi(t)}^{\lim\limits_{t\to b^-}\varphi(t)} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence sont égales.

Remarque. Les hypothèses sont plus contraignantes que pour un changement de variable sur un segment : en plus d'être $\mathscr{C}^1$, le changement de variable doit être **strictement monotone** pour être licite.

Preuve. On fait la preuve dans le cas où φ est strictement croissante (la preuve est la même dans le cas décroissant). On a dans ce cas $\lim_{t\to a^+} \varphi(t) = \alpha$ et $\lim_{t\to b^-} \varphi(t) = \beta$. Par le théorème de la bijection, φ réalise une bijection de $]a, b[$ dans $]\alpha, \beta[$.

Soit $c \in]a, b[$, et soit $u \in [c, b[$. D'après le théorème de changement de variable sur un segment, on a :

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(u)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^u f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction φ réalisant une bijection de $]a, b[$ dans $]\alpha, \beta[$, $\lim_{u\to b^-} \int_{\varphi(c)}^{\varphi(u)} f(x)\,\mathrm{d}x$ existe si et seulement si $\lim_{A\to\beta^-} \int_{\varphi(c)}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x$ existe, et si c'est le cas :

$$\int_{\varphi(c)}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\beta^-} \int_{\varphi(c)}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to b^-} \int_{\varphi(c)}^{\varphi(u)} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to b^-} \int_c^u f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On montre de même que les intégrales généralisées $\int_\alpha^{\varphi(c)} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^c f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence sont égales.
Finalement, $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence sont égales. $\square$

Remarques.

- Les changements de variables affines (c'est-à-dire de la forme $\varphi(t) = mt + p$, $m \neq 0$) sont licites, rien ne sera dans ce cas à vérifier.
- Tout changement de variable non affine sera précisé dans l'énoncé. Il s'agira alors de bien vérifier que le changement est licite, c'est-à-dire **de classe $\mathscr{C}^1$** et **strictement monotone**.

Méthode. Changement de variable dans les intégrales généralisées.

Lorsqu'on effectue un changement de variable, on montre tout d'abord qu'il est licite (c'est-à-dire $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone). On veillera ensuite en effectuant le changement de variable à modifier les trois éléments :

- *la variable* $x = \varphi(t)$,
- *l'élément différentiel* $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$,
- *les bornes de l'intégrale : si t varie entre a et b, $x = \varphi(t)$ varie entre $\lim_{t\to a^+} \varphi(t)$ et $\lim_{t\to b^-} \varphi(t)$.*

On étudie alors la nature ***de l'une ou l'autre*** *des intégrales, avant changement de variable ou après.*

Exercice. Déterminer la nature et la valeur éventuelle des intégrales suivantes :

- $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (*poser* $t = \sqrt{x}$).

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ (*poser* $x = \cos(t)$).

Propriété 11

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et f une fonction continue sur $]-a, a[$.

- Si f est **paire**.
  Les intégrales généralisées $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence on a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si f est **impaire**.
  Les intégrales généralisées $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence on a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Preuve. Dans le cas f paire, le changement de variable $x = -t$ affine, donc licite, nous indique que

$$\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } -\int_{0}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$$

sont de même nature, et qu'en cas de convergence sont égales. Or la convergence de ces intégrales est équivalente à la convergence de $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$, et dans ce cas on a :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le cas f impaire se montre de la même façon. $\square$

Exemple. L'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

4 La fonction gamma Γ

Propriété 12

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\nu > 0$.

Preuve.

□

Définition.

On appelle *fonction Gamma d'Euler* et on note Γ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Propriété 13

(1) $\forall \nu \in]0,+\infty[$, on a $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$.

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

(3) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Preuve.

□

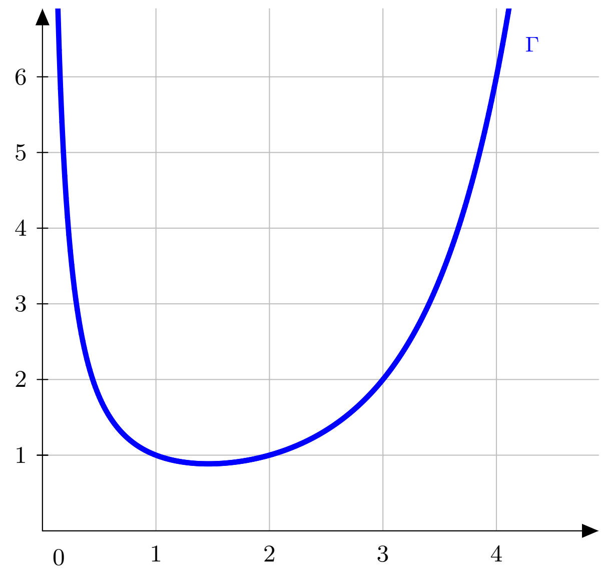
Le saviez-vous ?

Historiquement, c'est la formule (2) qui a justifiée qu'on s'intéresse à la fonction Γ : les mathématiciens du 18-ème siècle cherchaient un moyen de prolonger la factorielle, a priori définie uniquement pour les nombres entiers, à tous les réels positifs. Euler proposa la fonction Γ en 1729. Première fonction définie à l'aide d'une intégrale, elle se révéla extrêmement féconde.

Leonhard Euler (1707 - 1783) est considéré comme l'un des plus grands et des plus prolifiques mathématiciens de tous les temps. Il a travaillé dans presque tous les domaines des mathématiques : la géométrie, le calcul infinitésimal, la trigonométrie, l'algèbre et la théorie des nombres. S'ils étaient imprimés, ses écrits, dont beaucoup sont d'un intérêt fondamental, pourraient occuper entre quarante et soixante ouvrages. Devenu aveugle à la fin de sa vie, son état n'a eu que peu d'effet sur sa productivité. En fait, elle augmenta même. Ainsi avec l'aide de scribes, il produisit en moyenne un document de mathématiques par semaine au cours de l'année 1775 !

Leonhard Euler (1707 - 1783)

Représentation graphique.



Courbe représentative de la fonction Γ.

Remarque. On sait que $e^n = o(n!)$. Une étude plus poussée de la fonction Γ nous permettrait de montrer que :

$$e^x \underset{x\to+\infty}{=} o(\Gamma(x)).$$

Autrement dit, la fonction Γ tend vers $+\infty$ « plus vite » que la fonction exponentielle.