Complément 1

Théorème des séries alternées

Définition.

On appelle *série alternée* une série de la forme $\sum(-1)^n a_n$ avec $a_n \geq 0$.

L'étude de séries alternées est fréquente dans les sujets de concours. Citons par exemple les sujets d'EML 2016 avec la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$, d'ECRICOME 2016 avec la série $\sum(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

Pour étudier une série alternée $\sum(-1)^n a_n$, le premier réflexe à avoir est de tester si la série converge absolument.

Propriété 1

Si $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge, alors la série $\sum(-1)^n a_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Exemples.

- La série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est absolument convergente si $x > 1$, donc convergente.

  Si $x \leq 0$, alors $\frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = (-1)^{n+1} n^{-x}$ qui ne tend pas vers 0. La série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est grossièrement divergente.

  Pour $0 < x \leq 1$, on ne peut pas conclure, et une étude plus précise de la série s'impose.

- La série $\sum(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ n'est pas absolument convergente puisque :

  $$\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

  La série harmonique étant divergente, la série $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ diverge par théorème de comparaison.

  Là aussi, déterminer la nature de $\sum(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ nécessite une étude plus poussée.

Dans le cas où la série ne converge pas absolument, il existe un critère, appelé *Critère spécial des séries alternées*, qui permet dans certains cas de démontrer la convergence de la série. Ce résultat n'est pas au programme des classes préparatoires ECS.

Théorème 2 (*Critère spécial des séries alternées*)

Soit (a_n) une **suite réelle décroissante, positive et qui tend vers** 0. Alors la série $\sum(-1)^n a_n$ converge. De plus :

- les suites extraites paires et impaires (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes de même limite $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$;
- le reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k a_k$ est du signe de son premier terme et lui est inférieur en valeur absolue, soit :

$$signe(R_n) = (-1)^{n+1} \quad \text{et} \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k a_k\right| \leq a_{n+1}.$$

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du résultat classique suivant dont nous rappelerons la preuve.

Propriété 3

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que les suites extraites paires (u_{2n}) et impaires (u_{2n+1}) convergent **vers la même limite** ℓ. Alors (u_n) converge vers ℓ.

Preuve. On avait déjà fait la preuve de ce résultat dans le complément de cours 0. On propose ici de réécrire cette preuve à l'aide de quantificateurs. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque les suites extraites paires (u_{2n}) et impaires (u_{2n+1}) convergent vers ℓ, on a :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_1 \ \Rightarrow\ |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon \tag{$*$}$$

et

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_2 \ \Rightarrow\ |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon. \tag{$**$}$$

Posons alors $N = \max(2N_1, 2N_2+1)$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, on a :

- si $n = 2p$ est pair, puisque $n \geq N$, alors $2p \geq 2N_1$, soit encore $p \geq N_1$ et donc :
$$|u_n - \ell| = |u_{2p} - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{d'après } (*).$$
- si $n = 2p+1$ est impair, puisque $n \geq N$, alors $2p+1 \geq 2N_2+1$, soit encore $p \geq N_2$ et donc :
$$|u_n - \ell| = |u_{2p+1} - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{d'après } (**).$$

Ainsi on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

D'où la convergence de (u_n) vers ℓ. □

On est à présent en mesure de prouver notre théorème.

Preuve. Montrons que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes :

- (S_{2n}) est croissante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$ car (a_n) décroissante.
- (S_{2n+1}) est décroissante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} - S_{2n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0$ car (a_n) décroissante.
- La différence de ces deux suites tend vers 0 : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n} \ \text{ et par hypothèse } \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 0.$$

Donc (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Par le théorème des suites adjacentes, ces deux suites convergent vers la même limite. On en déduit alors par la propriété rappelée précédemment que la suite des sommes partielles (S_n) converge, soit en d'autres termes que la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.

Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) étant adjacentes, on en déduit également les inégalités suivantes :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad S_{2n+1}\leq S=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k\leq S_{2n}. \tag{$***$}$$

On a alors $R_{2n}=S-S_{2n}\leq 0$, et son premier terme est $(-1)^{2n+1}a_{2n+1}=-a_{2n+1}\leq 0$. Ainsi (R_{2n}) est du signe de son premier terme. De plus, on a :

$$|R_{2n}|=|S-S_{2n}|\overset{(***)}{=}S_{2n}-S\overset{(***)}{\leq}S_{2n}-S_{2n+1}=a_{2n+1}.$$

Donc $|R_{2n}|$ est inférieur à la valeur absolue de son premier terme a_{2n+1}. On procède de même pour (R_{2n+1}) à partir de $S_{2n+1}\leq S\leq S_{2n+2}$. $\square$

Remarque. Le critère spécial des séries alternées n'est **pas au programme des classes d'ECS** et ne pourra pas être utilisé lors d'une épreuve de concours. Pour autant, il est bon de **maitriser la preuve de ce résultat** qui pourra être à reproduire sur des cas particuliers (comme c'est le cas dans les sujets d'EML 2016 et d'ECRICOME 2016).

Exemple. Appliquons ce critère sur les séries précédentes.

- Étudions la nature de la série $\sum\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ lorsque $0<x<1$. La suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)$ est décroissante, positive et tend bien vers 0. D'après le critère des séries alternées, la série $\sum\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge donc.
  En particulier si $x=1$, on retrouve la convergence de la série harmonique alternée.
- Étudions la nature de la série $\sum(-1)^n\dfrac{\ln(n)}{n}$. On a vu que la série n'est pas absolument convergente. On tente le critère des séries alternées. Posons $a_n=\dfrac{\ln(n)}{n}$ pour tout $n\geq 1$. La suite (u_n) est positive et tend vers 0 par croissances comparées. De plus on a pour tout $n\geq 1$:
  $$a_{n+1}-a_n=\frac{\ln(n+1)}{n+1}-\frac{\ln(n)}{n}=\frac{n\ln(n+1)-n\ln(n)-\ln(n)}{n(n+1)}=\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln(n)}{n(n+1)}.$$
  On se rappelle alors que $\ln(1+x)\leq x$ pour tout $x\geq 0$ (inégalité de concavité). D'où ici :
  $$a_{n+1}-a_n\leq\frac{n\frac{1}{n}-\ln(n)}{n(n+1)}=\frac{1-\ln(n)}{n(n+1)}.$$
  Ainsi pour tout $n\geq 3$, on a $a_{n+1}-a_n\leq 0$ et la suite (a_n) est décroissante à partir du rang 3.
  Par le critère des séries alternées, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 3}(-1)^n\dfrac{\ln(n)}{n}$ est convergente, et donc la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\dfrac{\ln(n)}{n}$ converge (la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes).

Exemple. Terminons par un dernier exemple. Déterminons la nature de la série $\sum u_n$ avec :

$$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\text{ pour tout }n\in\mathbb{N}.$$

Dans le cas proposé ici, on ne peut pas appliquer le critère spécial des séries alternées puisqu'on vérifie que la suite (a_n) définie par $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ n'est pas décroissante. On a recours ici à un développement limité pour établir la nature de la série :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}_{=:v_n}.$$

Étudions chacun des termes de ce développement limité :

- $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée, qui converge donc car $n \mapsto 1/\sqrt{n}$ est positive, décroissante et tend vers 0 ;
- $\sum \frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique) ;
- $\sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ est absolument convergente ($\frac{1}{n\sqrt{n}}$ est le terme général d'une série de Riemann d'exposant $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), donc convergente.
- $\sum v_n$ est convergente car $v_n = o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

Par somme de séries convergentes avec une série divergente, on en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

Méthode.

Pour obtenir la nature d'une série, il peut être intéressant d'effectuer un développement limité du terme général de la série, et d'étudier la convergence de chacun de ses termes.

Mise en garde.

Rappelons que

> si $u_n \sim v_n$ et (u_n) et (v_n) sont **de signes constants**, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Attention, ce n'est plus vrai si on retire l'hypothèse de signes constants comme le montre l'exemple précédent. En effet on a :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Et pourtant, les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ sont de natures différentes : on vient de voir que $\sum u_n$ diverge, alors que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le critère spécial des séries alternées.