Complément 2

Formes linéaires et hyperplans

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel de dimension n.

Formes linéaires

Définition.

On dit que φ est une *forme linéaire* sur E si φ est une application linéaire sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemples.

- $E = \mathbb{R}^3$. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. L'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto ax+by+cz$ est une forme linéaire sur E.
- $E = \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Alors $\varphi : E \to \mathbb{R}, P \mapsto P(0)$ est une forme linéaire sur E.
- $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'application trace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$ est une forme linéaire sur E.

Vocabulaire. L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ des formes linéaires sur E est souvent noté E^*, appelé l'*espace dual de* E.

Donnons un autre exemple de formes linéaires : les *formes linéaires coordonnées* dans une base de E.

Propriété 1 (Formes linéaires coordonnées)

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on définit la *i-ième application coordonnée* $\varphi_i : E \to \mathbb{R}$ par :

$$\varphi_i(x) = \text{ i-ème coordonnée de } x \text{ dans la base } \mathscr{B}.$$

L'application φ_i est une forme linéaire pour tout $1 \leq i \leq n$.

Preuve. Soit $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il existe un unique n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

De même, y se décompose de manière unique dans la base $\mathscr{B}$:

$$\exists!(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ y = y_1 e_1 + \ldots y_n e_n.$$

On a alors :

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1)e_1 + \cdots + (\lambda_n x_n + \mu y_n)e_n$$

et donc pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$\varphi_i(\lambda x + \mu y) = \lambda x_i + \mu y_i = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y).$$

Ainsi φ_i est linéaire. Comme de plus $\varphi_i : E \to \mathbb{R}$, c'est bien une forme linéaire. $\square$

Exemple. Prenons le vecteur $u = (3, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$.

- Dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on a $u = 3e_1 + 2e_2 + 1e_3$. Ainsi si on note φ_i les formes linéaires coordonnées associées à $\mathscr{B}$, on a :
$$\varphi(u) = 3,\ \varphi_2(u) = 2,\ \varphi_3(u) = 1.$$
- Dans la base $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ où $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (1, 1, 1)$, on a :
$$u = f_1 + f_2 + f_3.$$
Si on note ψ_i les formes linéaires coordonnées associées à $\mathscr{B}$, on a cette fois :
$$\psi_1(u) = 1,\ \psi_2(u) = 1,\ \psi_3(u) = 1.$$

Propriété 2

- Pour tout $x \in E$, on a : $\quad x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)e_i.$
- Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on a : $\quad \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

Preuve.

- Par définition, $\varphi_i(x)$ est la i-ème composante de x dans la base $\mathscr{B}$. Donc on a :
$$x = \varphi_1(x)e_1 + \cdots + \varphi_n(x)e_n.$$
- On a $e_j = 0 \cdot e_1 + \cdots + 1 \cdot e_j + \cdots + 0 \cdot e_n$. Donc la i-ème coordonnée de e_j dans la base $\mathscr{B}$ est 0 si $i \neq j$, et 1 si $i = j$. D'où le résultat.

□

Propriété 3

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ la famille des formes linéaires coordonnées associées à $\mathscr{B}$.
Alors $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, appelée *base duale* de E.

Preuve. Posons $\mathscr{F} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. On souhaite montrer que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$. On a $\dim(\mathscr{L}(E, \mathbb{R})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{R}) = n \times 1 = n$, et $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = n$. Il suffit donc de montrer que la famille est libre. Soit pour cela $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_n\varphi_n = 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{R})} \qquad (*)$$
Montrons que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. On évalue pour cela $(*)$ en e_j. On obtient :
$$\alpha_1\varphi_1(e_j) + \cdots + \alpha_j\varphi_j(e_j) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(e_j) = 0$$
Or puisque $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$, on en déduit que $\alpha_j = 0$, et ce pour tout $1 \leq j \leq n$.
La famille $\mathscr{F}$ est donc libre. C'est donc une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$. □

Hyperplans

Définition.

Un *hyperplan de* E est un sous-espace vectoriel H de E de dimension $\dim(E) - 1$.

Exemples.

- Un hyperplan de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1, en d'autres termes une droite vectorielle $\text{Vect}(a)$ avec $a \neq 0_E$.
- Un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. En d'autres termes, il s'agit d'un plan vectoriel $\text{Vect}(a, b)$ avec a, b des vecteurs non colinéaires.

Propriété 4

Soit H un hyperplan de E, et $a \notin H$. Alors, on a :

$$E = H \oplus \text{Vect}(a).$$

Preuve. Tout d'abord, on a $\dim(H) = n - 1$ et $\dim(\text{Vect}(a)) = 1$ car $a \neq 0_E$. Donc on a $\dim(H) + \dim(\text{Vect}(a)) = n$.

On étudie le sous-espace vectoriel $H \cap \text{Vect}(a)$. On a :

$$H \cap \text{Vect}(a) \subset \text{Vect}(a) \quad \text{et} \quad \dim \text{Vect}(a) = 1.$$

Donc on a $\dim (H \cap \text{Vect}(a)) = 0$ ou 1. Si $\dim(H \cap \text{Vect}(a)) = 1 = \dim(\text{Vect}(a))$, alors $H \cap \text{Vect}(a) = \text{Vect}(a)$. Mais alors on aurait $a \in \text{Vect}(a) = H \cap \text{Vect}(a)$, et donc $a \in H$, ce qui n'est pas le cas par hypothèse.

Ainsi $\dim(H \cap \text{Vect}(a)) = 0$, et $H \cap \text{Vect}(a) = \{0_E\}$. On peut donc conclure que $E = H \oplus \text{Vect}(a)$. □

Formes linéaires et hyperplans

Théorème 5

Soit H un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie.

(1) H est un hyperplan si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

(2) Si $H = \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\varphi = \lambda\psi$.

Preuve.

(1) $\Leftarrow$ Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, $\varphi \neq 0$, telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$. Par le théorème du rang, on a :

$$\dim(H) = \dim(E) - \text{rg}(\varphi).$$

Or $\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, c'est donc $\{0_E\}$ ou $\mathbb{R}$. Ce n'est pas $\{0_E\}$ car $\varphi \neq 0$. Donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$, et $\text{rg}(\varphi) = 1$. D'où le résultat.

$\Rightarrow$ Supposons que H est un hyperplan de E. On considère $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de H, qu'on complète en $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Notons φ_n la n-ème forme linéaire coordonnée. Pour tout $x \in E$, on a :

$$x \in \text{Ker}(\varphi_n) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_n(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_1e_1 + \cdots + x_{n-1}e_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad x \in H.$$

Ainsi on a bien $H = \text{Ker}(\varphi_n)$, noyau d'une forme linéaire non nulle ($\varphi_n(e_n) = 1$).

(2) Supposons que $H = \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$, et soit $a \notin H$. On sait qu'alors :

$$E = H \oplus \text{Vect}(a).$$

On a $\psi(a), \varphi(a) \neq 0$, sinon ces formes linéaires seraient nulles (elles seraient nulles sur H, sur $\text{Vect}(a)$, et donc sur E). Posons :

$$\lambda = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$$

et montrons que $\varphi = \lambda\psi$. Ces deux formes linéaires coïncident sur H, elles coïncident en a et donc sur $\text{Vect}(a)$. Elles sont donc égales, et on a bien $\varphi = \lambda\psi$.

□

Remarque. Ainsi un hyperplan H est défini par une équation linéaire $\varphi(x) = 0$ avec $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$. Cette équation est de plus unique (à un scalaire multiplicatif non nul près).

Exemples.

- $E = \mathbb{R}^3$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Considérons la forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto ax + by + cz$. Son noyau est donc un hyperplan H, donné par

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ ax + by + cz = 0\}$$

  Il s'agit du plan vectoriel (sous-espace de dimension 2) d'équation $ax + by + cz = 0$.

- $E = \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Considérons la forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}, P \mapsto P(0)$. Son noyau est un hyperplan H de E, qu'on peut décrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \text{Ker}(\varphi) \quad & \Leftrightarrow \quad P(0) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad a_0 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad P = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x \end{aligned}$$

  Ainsi $H = \text{Vect}(x, x^2, \ldots, x^{n-1})$.

- $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons la trace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, M \mapsto \text{Tr}(M)$. Son noyau est l'hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices de traces nulles. De plus, on a $\text{Tr}(I_n) = n \neq 0$, donc $I_n \notin \text{Ker}(Tr)$. On en déduit par la Propriété 4 que

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(\text{Tr}) \oplus \text{Vect}(I_n).$$