Complément 3

Symétries vectorielles

Ce complément de cours présente des résultats sur les symétries vectorielles. Ces résultats sont hors programme en ECG. Il pourra cependant être profitable de les travailler en vue des concours, notamment des épreuves écrites et orales de parisiennes.

Commençons par rappeler la définition d'une symétrie vectorielle.

Définition.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, de sorte que pour tout $z \in E$, il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que :

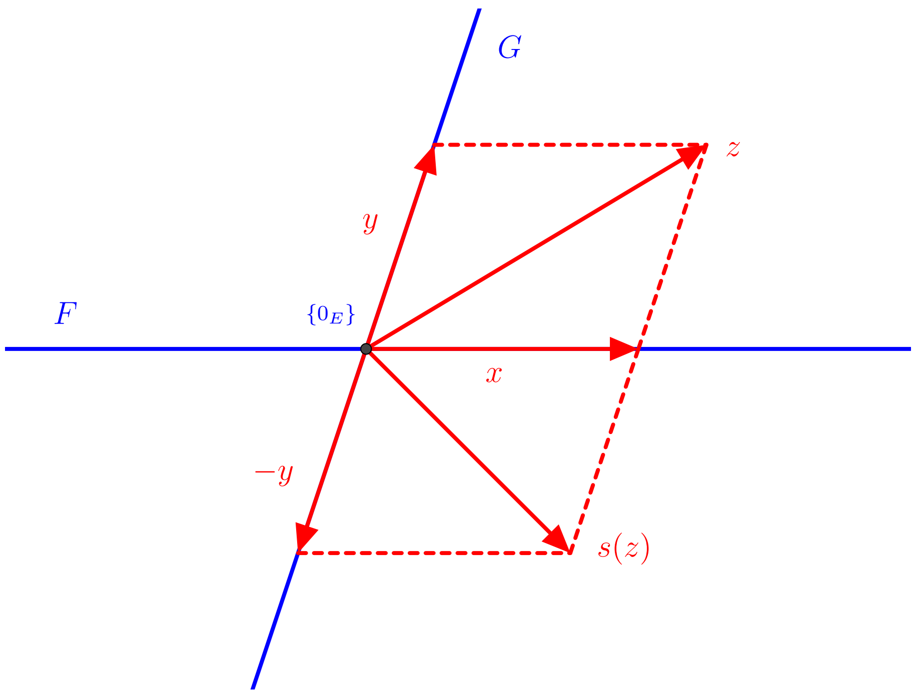
$$z = x + y.$$

On appelle *symétrie de z par rapport à F dans la direction de G*, et on note $s(z)$, le vecteur :

$$s(z) = x - y.$$

L'application $s : E \to E$ ainsi définie est appelée la *symétrie par rapport à F dans la direction de G*.

Représentation graphique.



Symétrie de z par rapport à F dans la direction de G.

Rappel. Puisque $E = F \oplus G$, on dispose des projecteurs associés à cette décomposition :

- p le projecteur sur F parallèlement à G ;
- q le projecteur sur G parallèlement à F.

On a de plus les relations suivantes :

$$p + q = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Propriété 1

(1) $s = p - q = 2p - \mathrm{Id}_E$. En particulier s est linéaire.

(2) $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. En particulier s est un automorphisme de E, et $s^{-1} = s$.

(3) $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$. Ainsi on a : $\forall x \in F$, $s(x) = x$.

(4) $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. Ainsi on a : $\forall y \in G$, $s(y) = -y$.

Preuve.

(1) Pour tout $z \in E$, il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que :
$$z = x + y.$$
De plus on a $p(z) = x$ et $q(z) = y$. Ainsi on a :
$$s(z) = x - y = p(z) - q(z).$$
Ainsi $s = p - q$, donc s est linéaire comme combinaison linéaire d'applications linéaires. De plus comme $p + q = \mathrm{Id}_E$, on a aussi $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

(2) On compose :
$$s \circ s = (p - q) \circ (p - q) = p \circ p - p \circ q - q \circ p + q \circ q = p + q = \mathrm{Id}_E.$$

(3) On procède par double inclusion.

$\subset$ Soit $x \in F$, on a $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ et donc $s(x) = x$. Ainsi on a $(s - \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E$, et donc $x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$.

$\supset$ Soit $z \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$, $\exists!(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$. On a $s(z) = z$, d'où $x - y = x + y$, ce qui équivaut à $y = 0_E$. Ainsi $z = x \in F$.

On a ainsi montré que $F = Inv(s) = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$.

(4) Procédons toujours par double inclusion.

$\subset$ Soit $y \in G$, on a $y = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{y}_{\in G}$ et donc $s(y) = -y$ et $(s + \mathrm{Id}_E)(y) = 0_E$. Ainsi $y \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

$\supset$ Soit $z \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. $\exists!(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$. On a $s(z) = -z$, d'où $x - y = -x - y$ ce qui équivaut encore à $x = 0_E$. Ainsi $z = y \in G$.

Finalement on a bien montré que $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

$\square$

Remarque. En particulier, on notera que les sous-espaces F et G sont stables par s. De plus l'endomorphisme induit par s sur F est Id_F, et l'endomorphisme induit par s sur G est $-\mathrm{Id}_G$.

Propriété 2

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Alors :
$$s \text{ est une symétrie} \quad \Leftrightarrow \quad s \circ s = \mathrm{Id}_E.$$
Plus précisément, $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ dans la direction de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Preuve. On a déjà montré l'implication $\Rightarrow$. Montrons la réciproque. Pour cela, posons $p = \dfrac{s + \mathrm{Id}_E}{2}$. On a :

$$p \circ p = \frac{(s + \mathrm{Id}_E) \circ (s + \mathrm{Id}_E)}{4} = \frac{s \circ s + s + s + \mathrm{Id}_E}{4} = \frac{s + \mathrm{Id}_E}{2} = p.$$

Donc p est un projecteur, sur $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(p)$. En particulier on a :

$$E = F \oplus G \quad \text{et} \quad s = 2p - \mathrm{Id}_E.$$

Donc s est bien la symétrie par rapport à $F = \mathrm{Ker}(\frac{s - \mathrm{Id}_E}{2}) = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ dans la direction de $G = \mathrm{Ker}(\frac{s + \mathrm{Id}_E}{2}) = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. $\square$

Remarque. Ainsi s est une symétrie vectorielle si et seulement si $x^2 - 1$ est un polynôme annulateur de s.

Exercice. On considère l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. À tout élément $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on associe l'élément $T(f) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = f(-x).$$

Montrer que T est une symétrie de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donner ses éléments caractéristiques.

> On vérifie facilement que T est un endomorphisme de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De plus pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a :
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T \circ T(f)(x) = T(T(f))(x) = T(f)(-x) = f(-(-x)) = f(x).$$
>
> Donc $T \circ T = Id_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ et T est la symétrie par rapport à $\mathscr{P} = \mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}_E)$ dans la direction de $\mathscr{I} = \mathrm{Ker}(T + \mathrm{Id}_E)$. De plus on a :
>
> $$f \in \mathscr{P} \;\Leftrightarrow\; \forall x \in \mathbb{R},\; f(-x) = f(x) \;\Leftrightarrow\; f \text{ est paire.}$$
>
> De même $f \in \mathscr{I} \Leftrightarrow f$ est impaire.
>
> Enfin on obtient également de cette manière que $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$.

Exercice. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = {}^tM$.

1. Montrer que f est une symétrie et la décrire.
2. Retrouver de cette manière que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

> 1. L'application f est linéaire par linéarité de la transposée. De plus on a pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:
>
> $$f \circ f(M) = f(f(M)) = f({}^tM) = {}^t({}^tM)) = M.$$
>
>   Ainsi f est bien une symétrie, sur $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ dans la direction de $G = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$. Décrivons ces deux espaces :
>
>   - On a :
>
> $$M \in F \Leftrightarrow M \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow {}^tM = M \Leftrightarrow M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).$$
>
>   Donc $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
>   - On a :
>
> $$M \in G \Leftrightarrow M \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow f(M) = -M \Leftrightarrow {}^tM = -M \Leftrightarrow M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Donc $F = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

2. On en déduit en particulier, puisque s est une symétrie par rapport à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ dans la direction de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, que :
$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Propriété 3

On suppose que E est de dimension finie n. Soient F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Notons $k = \dim(F)$. Soit s la symétrie vectoriel par rapport à F dans la direction de G.

(1) La matrice de s dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$ est :

$$M_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 0 \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ fois}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-k \text{ fois}}).$$

En particulier, s est diagonalisable.

(2) On a $\operatorname{Tr}(s) = \dim(F) - \dim(G)$.

Preuve.

(1) Soit donc $\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_k)$ une base de F, $\mathscr{B}_G = (e_{k+1}, \dots, e_n)$ une base de G. Puisque $E = F \oplus G$, la famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. De plus on a :

- pour tout $1 \leq i \leq k$, $e_i \in F$ et donc $s(e_i) = e_i$;
- pour tout $k+1 \leq i \leq n$, $e_i \in G$ et donc $s(e_i) = -e_i$.

On en déduit donc que la matrice de s dans la base $\mathscr{B}$ est donnée par :

$$M_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 0 \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) Rappelons que la trace d'un endomorphisme est par définition la trace de sa matrice dans n'importe quelle base. Ainsi on a :

$$\operatorname{Tr}(s) = \operatorname{Tr}(M_{\mathscr{B}}(s)) = \underbrace{1 + \dots + 1}_{k \text{ fois}} - (\underbrace{1 + \dots + 1}_{n-k \text{ fois}}) = \dim(F) - \dim(G).$$

$\square$