Complément 5

Réduction des endomorphismes symétriques

Ce complément de cours présente la preuve du théorème spectral. Cette preuve est non exigible en ECG. Il pourra cependant être profitable de la travailler en vue des concours, notamment des épreuves écrites et orales de parisiennes.

Le théorème spectral

Dans tout ce complément, E désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée $\| \cdot \|$.

Rappelons le résultat principal du **Chapitre 18. Endomorphismes symétriques**.

Théorème 1 (Théorème spectral pour les endomorphismes symétriques)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors f est diagonalisable, à valeurs propres réelles, et il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f.

Quelques rappels

Pour f un endomorphisme symétrique de E, nous avons démontré en cours les résultats suivants :

- si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E, alors $M_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice symétrique (réelle) ;
- si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors $F^{\perp}$ est également stable par f.
- les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

Résultats intermédiaires

Lemme. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[x]$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $r, s \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, $\beta_1, \ldots, \beta_s \in \mathbb{R}$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_s \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (x - \alpha_k) \prod_{\ell=1}^{s} \Big((x + \beta_\ell)^2 + \gamma_\ell \Big) .$$

Preuve. Vous savez depuis la première année que tout polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ peut s'écrire comme produit de polynômes à coefficients réels de degré 1 et de polynômes à coefficients réels de degré 2 à discriminant strictement négatif. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $r, s \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, $b_1, \ldots, b_s \in \mathbb{R}$, $c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (x - \alpha_k) \prod_{\ell=1}^{s} \Big(x^2 + b_\ell x + c_\ell \Big)$$

avec $\Delta_\ell = b_\ell^2 - 4c_\ell < 0$ pour tout $\ell = 1, \ldots, s$.

Reste à montrer que tout polynôme $Q = x^2 + bx + c$ à discriminant $\Delta = b^2 - 4c < 0$ peut s'écrire sous la forme :

$$Q = (x + \beta)^2 + \gamma$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$. Effectuons pour cela une factorisation canonique de Q :

$$Q = \Big(x^2 + bx \Big) + c = \left(x^2 + \frac{b}{2} \right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = \left(x^2 + \frac{b}{2} \right)^2 - \frac{b^2 - 4c}{4} = \left(x^2 + \frac{b}{2} \right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4} \right)$$

D'où l'égalité $Q = (x+\beta)^2 + \gamma^2$ avec $\beta = \frac{b}{2} \in \mathbb{R}$ et $\gamma = -\frac{\Delta}{4} \in \mathbb{R}_+^*$. □

Lemme. Soit $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors $I_n + S^2$ est une matrice inversible.

Preuve. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(I_n + S^2)X = 0_{n,1}$. Montrons que $X = 0_{n,1}$, ce qui permettra de conclure que $I_n + S^2$ est inversible. Pour cela, multiplions à gauche cette égalité par ${}^tX$:

$$0 = {}^tX(I_n + S^2)X = {}^tXX + {}^tXS^2X = {}^tXX + {}^t(SX)(SX) = \|X\|^2 + \|SX\|^2$$

Puisque $\|X\|^2$ et $\|SX\|^2$ sont positifs, on a en particulier $\|X\|^2 = 0$, et donc $X = 0_{n,1}$. □

Propriété 2

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors A possède au moins une valeur propre réelle, et toutes les valeurs propres de A sont réelles.

Preuve. Soit P un polynôme annulateur non nul[1] de A. Par le premier lemme, il existe $\lambda \neq 0$, $r, s \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, $\beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{R}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_s \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (x - \alpha_k) \prod_{\ell=1}^{s} \left((x + \beta_\ell)^2 + \gamma_\ell \right).$$

On a :

$$0_n = P(A) \quad \Rightarrow \quad 0_n = \prod_{k=1}^{r} (A - \alpha_k I_n) \prod_{\ell=1}^{s} \left((A + \beta_\ell I_n)^2 + \gamma_\ell I_n \right) \quad (*)$$

Pour tout $\ell = 1, \dots, s$, la matrice

$$(A + \beta_\ell I_n)^2 + \gamma_\ell I_n \underbrace{=}_{\gamma_\ell > 0} \gamma_\ell \left(\Bigg(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\gamma_\ell}} A + \frac{\beta_\ell}{\sqrt{\gamma_\ell}} I_n}_{=S_\ell} \Bigg)^2 + I_n \right)$$

est inversible d'après le second lemme appliqué à S_ℓ (symétrique puisque A l'est). Par produit de matrices inversibles, $B = \prod_{\ell=1}^{s} \left((A + \beta_\ell I_n)^2 + \gamma_\ell I_n \right)$ est également inversible, et en multipliant $(*)$ à droite par B^{-1}, on obtient :

$$0_n = \prod_{k=1}^{r} (A - \alpha_k I_n).$$

Le polynôme $\prod_{k=1}^{r} (x - \alpha_k)$ est donc annulateur de A, et les valeurs propres de A sont parmi les racines de ce polynôme, ce qui s'écrit :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subset \mathbb{R}.$$

Supposons que $\mathrm{Sp}(A) = \emptyset$. Dans ce cas, les matrices $A - \alpha_k I_n$ seraient toutes inversibles (puisque $\alpha_k \notin \mathrm{Sp}(A)$), et $0_n = \prod_{k=1}^{r} (A - \alpha_k I_n)$ aussi par produit de matrices inversibles, ce qui est faux.

Ainsi, A possède au moins une valeur propre réelle, et toutes ses valeurs propres sont réelles. □

Corollaire 3

Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme symétrique, alors f possède au moins une valeur propre réelle.

[1]On a prouver l'existence d'un tel polynôme au Chapitre 6.

Preuve. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Alors $M_{\mathscr{B}}(f)$ est symétrique, à coefficients réels, et donc possède une valeur propre réelle λ. Et donc λ est également une valeur propre de f. $\square$

Preuve du théorème spectral

Prouvons le théorème par récurrence sur $n = \dim(E)$.

Plus précisément, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : « pour tout espace euclidien E de dimension n, et pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$ symétrique, il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f ».

Init. Pour $n = 1$, prenons $\mathscr{B} = (e)$ une base orthonormée de E. Puisque $f(e) \in E = \mathrm{Vect}(e)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(e) = \lambda \cdot e$. Ainsi $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E formée d'un vecteur propre de f, d'où $\mathscr{P}(1)$ vraie.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété $\mathscr{P}(k)$ vraie[2] pour tout $1 \leq k \leq n$.

Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$, et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Le résultat préliminaire assure l'existence d'une valeur propre réelle λ pour f. Notons $F = E_\lambda(f)$.

Si $F = E$, alors $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $f = \lambda \mathrm{id}_E$: f est donc diagonalisable et toute base orthonormée de E est formée de vecteurs propres de f.

Dans le cas où $p = \dim(F) < \dim(E)$, F est un sous-espace vectoriel stable par f. Par le deuxième point des rappels, $G = F^\perp$ est également stable par f. Considérons g l'endomorphisme induit par f sur G. Montrons que g est un endomorphisme symétrique de G :

$$\forall x, y \in G, \quad \langle g(x), y\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = \langle x, g(y)\rangle.$$

Donc g est un endomorphisme symétrique de G. Puisque $\dim(G) = n - p < \dim(E)$, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}_G$ de G formée de vecteurs propres de g par hypothèse de récurrence. Et ces vecteurs propres de g sont bien évidemment vecteurs propres de f également.

Soit $\mathscr{B}_F$ une base orthonormée de F. Elle est automatiquement formée de vecteurs propres de f puisque $F = E_\lambda(f)$ ne contient que des vecteurs propres et le vecteur nul (et que ce dernier ne peut faire partie d'une base).

Alors la famille $\mathscr{B}$ obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}_F$ de F et $\mathscr{B}_G$ de G est une base orthonormée[3] de E, formée de vecteurs propres de f.

D'où la propriété au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, on a donc établi, pour tout espace euclidien E de dimension n, et pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$ symétrique, l'existence d'une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f. En particulier, cela implique que f est diagonalisable.

[2]On effectue ici une récurrence forte.

[3]On utilise ici un résultat démontré dans le **Chapitre 15. Projection orthogonale.** : la concaténation d'une base orthonormée de F et d'une base orthonormée de $F^\perp$ est une base orthonormée de E.