DM0

Correction du devoir maison (ESSEC 2008)

Partie I.

1. (a) Soient $P, Q \in \mathscr{P}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + \mu Q)(x) &= (\lambda P + \mu Q)(x+1) - (\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda P(x+1) + \mu Q(x+1) - \lambda P(x) - \mu Q(x) \\ &= \lambda(P(x+1) - P(x)) + \mu(Q(x+1) - Q(x)) = \lambda \Delta(P)(x) + \mu \Delta(Q)(x).\end{aligned}$$

De plus, pour tout $P \in \mathscr{P}$, $\Delta(P)$ est une fonction polynomiale par définition de Δ. Donc $\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{P}.}$

(b) Soit $P \in \mathscr{P}$ de degré r strictement positif. Notons $a_0, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ ses coefficients, de sorte que $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{r} a_k x^k$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k (x+1)^k - \sum_{k=0}^{r} a_k x^k = \sum_{k=0}^{r} a_k \left[(x+1)^k - x^k\right].$$

D'après la formule du binôme, $\left[(x+1)^k - x^k\right] = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^i$ est une fonction polynomiale de degré exactement $k-1$. Puisque $a_r \neq 0$, $\boxed{\text{le degré de } \Delta(P) \text{ est donc égal à } r-1.}$

(c) Si $P : x \mapsto \lambda \in \mathbb{R}$ est constant, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x) = \lambda - \lambda = 0.$$

Donc P appartient à $\mathrm{Ker}(\Delta)$.

Supposons à présent que P ne soit pas constant, et notons $r > 0$ son degré. D'après la question précédente, $\deg(\Delta(P)) = r - 1$ et donc $\Delta(P) \neq 0_{\mathscr{P}}$. Ainsi P n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(\Delta)$.

On a donc montré que $\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathscr{P}_0.}$

2. (a) Pour tout $P \in \mathscr{P}_r$:
   - soit $\deg(P) \leq 0$, et dans ce cas $\Delta(P) = 0_{\mathscr{P}} \in \mathscr{P}_r$;
   - soit $\deg(P) = d > 0$, et dans ce cas le degré de $\Delta(P)$ est $d - 1 \leq r$, de sorte que $\Delta(P) \in \mathscr{P}_r$.

Dans tous les cas, $\Delta(P)$ appartient à $\mathscr{P}_r$. Le sous-espace vectoriel $\mathscr{P}_r$ est donc stable par Δ. On peut donc considérer l'endomorphisme induit Δ_r par Δ sur $\mathscr{P}_r$. $\boxed{\Delta_r \text{ est bien défini}}$ (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathscr{P}_r$) $\boxed{\text{et linéaire}}$ (car Δ l'est).

(b) Soit $P \in \mathscr{P}_r$. On a :

$$P \in \mathrm{Ker}(\Delta_r) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_r(P) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta(P) = 0.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Delta_r) = \mathrm{Ker}(\Delta) \cap \mathscr{P}_r = \mathscr{P}_0 \cap \mathscr{P}_r \boxed{= \mathscr{P}_0.}$

(c) Puisque $\dim(\mathrm{Ker}(\Delta_r)) = \dim(\mathscr{P}_0) = 1$, il suit par le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Im}(\Delta_r)) = \dim(\mathscr{P}_r) - \dim(\mathrm{Ker}(\Delta_r)) = r + 1 - 1 = r.$$

D'autre part, on sait d'après les questions précédentes, que $\mathrm{Im}(\Delta_r) \subset \mathscr{P}_{r-1}$. Comme $\dim(\mathrm{Im}(\Delta_r)) = r = \dim(\mathscr{P}_{r-1})$, on peut conclure que $\boxed{\mathrm{Im}(\Delta_r) = \mathscr{P}_{r-1}.}$

(d) Soit $Q \in \mathscr{P}$. Il existe $r \geq 1$ tel que $Q \in \mathscr{P}_{r-1}$. Par la question précédente, Q appartient à l'image de Δ_r, de sorte qu'il existe $P \in \mathscr{P}_r$ tel que :

$$Q = \Delta_r(P) = \Delta(P).$$

D'où $\boxed{\text{la surjectivité de l'application } \Delta.}$

3. Notons δ la restriction de Δ à $\mathscr{E}$. δ est linéaire par définition. Montrons que c'est un isomorphisme de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{P}$.

   - On a $\mathrm{Ker}(\delta) = \mathrm{Ker}(\Delta) \cap \mathscr{E} = \mathscr{P}_0 \cap \mathscr{E} = \{0_{\mathscr{P}}\}$ (car une application polynomiale constante qui s'annule en 0 est l'application polynomiale nulle). Donc δ est injective.
   - Soit $Q \in \mathscr{P}$. D'après la question précédente, il existe $P \in \mathscr{P}$ tel que :
   $$\Delta(P) = Q.$$
   Posons alors $\tilde{P} = P - P(0)$. Alors $\tilde{P} \in \mathscr{E}$ et :
   $$\delta(\tilde{P}) = \Delta(\tilde{P}) = \Delta(P - P(0)) = \Delta(P) - \Delta(P(0)) = Q - 0 = Q$$
   car $P(0) \in \mathscr{P}_0 = \mathrm{Ker}(\Delta)$. Ainsi δ est surjective.

   $\boxed{\delta \text{ est bien un isomorphisme de } \mathscr{E} \text{ sur } \mathscr{P}.}$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La propriété de l'énoncé : « $N_n(0) = 0$ et $\Delta(N_n) = N_{n-1}$ » est équivalente à : « $N_n \in \mathscr{E}$ et $\delta(N_n) = N_{n-1}$ », ou encore à : « N_n est l'antécédent de N_{n-1} par δ ».

   La suite (N_n) est donc l'unique suite définie par récurrence par :
   $$N_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ N_n = \delta^{-1}(N_{n-1}).$$

   (b) Montrons le par récurrence sur n.

   Init. Pour $n = 1$, on a $P : x \mapsto \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = x$. Et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x) = (x+1) - x = 1 = N_0(x) \text{ et } N_1(0) = 0.$$
   Par unicité (de l'antécédent par δ), il suit que $P = N_1$ et la propriété est vraie au rang $n = 1$.

   Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang n. Montrons-là au rang $n+1$.

   Par hypothèse de récurrence, on sait que $N_n : x \mapsto \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$.

   Posons $P : x \mapsto \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x-k)$. Puisque $P(0) = 0$, P appartient à $\mathscr{E}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned}\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x) &= \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}((x+1)-k) - \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-k)\\ &= \frac{(x+1)x(x-1)\dots(x-n+1)}{(n+1)!} - \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)(x-n)}{(n+1)!}\\ &= \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{(n+1)!}\underbrace{[(x+1)-(x-n)]}_{=n+1}\\ &= \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = N_n(x).\end{aligned}$$
   Par unicité (de l'antécédent par δ), on peut conclure que $P = N_{n+1}$. D'où la propriété au rang $n+1$.

   Par principe de récurrence, on conclut que pour tout entier naturel n non nul et tout x réel :
   $$\boxed{N_n(x) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(x-k).}$$

   (c) Pour tout $n \in [\![0, r]\!]$, le degré de N_n est égal à n. La famille $(N_n)_{n\in[\![0,r]\!]}$ est donc bien une famille de vecteurs de $\mathscr{P}$, et est libre car ce sont des fonctions polynomiales de degrés deux à deux distincts. De plus, cette famille est de cardinal $r+1 = \dim(\mathscr{P}_r)$. La famille $\boxed{(N_n)_{n\in[\![0,r]\!]} \text{ est une base de } \mathscr{P}_r.}$

(d) Soit $Q \in \mathscr{P}_r$. Puisque $(N_n)_{n\in[\![0,r]\!]}$ est une base de $\mathscr{P}_r$, il existe (un unique) $(a_0,\dots,a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que :

$$Q = a_0N_0 + \cdots + a_rN_r.$$

On sait que $\Delta(N_0) = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $\Delta(N_n) = N_{n-1}$. Par une récurrence facile :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \Delta^k(N_n) = \begin{cases} N_{n-k} & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Soit $k \in [\![0,r]\!]$. Par linéarité de Δ^r :

$$\Delta^k(Q) = \sum_{n=0}^{r} a_n\Delta^k(N_n) = \sum_{n=k}^{r} a_nN_{n-k} = a_k + \sum_{n=k+1}^{r} a_nN_{n-k}.$$

Puisque $N_i(0) = 0$ si $i \geq 1$, on obtient en prenant $x = 0$ dans cette dernière égalité :

$$\Delta^k(Q)(0) = a_k.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall Q \in \mathscr{P}_r, \quad Q = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n(Q)(0)N_n.}$$

(e) Si $Q = 0$, alors l'ensemble des fonctions polynomiales P satisfaisant $\Delta(P) = 0$ est $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathscr{P}_0$.

Supposons $\deg(Q) = r \geq 0$. Par ce qui a été fait précédemment, un antécédent de Q par Δ est de degré $r+1$. Soit $P \in \mathscr{P}_{r+1}$. Puisque $(N_n)_{n\in[\![0,r+1]\!]}$ est une base de $\mathscr{P}_{r+1}$, il existe $a_0,\dots,a_{r+1} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$P = \sum_{n=0}^{r+1} a_nN_n.$$

Résolvons :

$$\begin{aligned} \Delta(P) = Q &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{r+1} a_n\Delta(N_n) = Q \text{ par lin. de } \Delta \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{r+1} a_nN_{n-1} = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n(Q)(0)N_n \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{r} a_{n+1}N_n = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n(Q)(0)N_n \\ &\Leftrightarrow \forall n \in [\![0,r]\!],\ a_{n+1} = \Delta^n(Q)(0) \text{ par liberté de la fam. } (N_n)_{n\in[\![0,r]\!]}. \end{aligned}$$

Les fonctions polynomiales P solutions de $\Delta(P) = Q$ sont donc les fonctions de la forme :

$$\boxed{P = a_0 + \sum_{n=1}^{r+1} \Delta^{n-1}(Q)(0)N_n \ \text{ avec } a_0 \text{ constante réelle quelconque.}}$$

(f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} Q(k) = \sum_{k=0}^{n} [P(k+1) - P(k)] \boxed{= P(n+1) - P(0).}$$

Prenons à présent $Q : x \mapsto x^2$. Puisque $N_1 : x \mapsto x$ et $N_2 : x \mapsto \dfrac{x(x-1)}{2}$, on a $Q = 2N_2 + N_1$. D'après les calculs précédents, une fonction polynomiale P telle que $\Delta(P) = Q$ est par exemple :

$$P : x \mapsto 2N_3(x) + N_2(x) = \frac{1}{3}x(x-1)(x-2) + \frac{1}{2}x(x-1) = \frac{1}{6}x(x-1)(2x-1).$$

On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = P(n+1) - P(0) \boxed{= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).}$$

5. **Méthode 1. Par récurrence.**

Init. Prenons $n = 0$. Pour toute fonction polynomiale Q et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=0}^{0} (-1)^{0-i} \binom{0}{i} Q(x+i) = Q(x).$$

D'où la propriété au rang $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n.

Par hypothèse de récurrence, pour toute fonction polynomiale $Q \in \mathscr{P}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Delta^n(Q)(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} Q(x+i).$$

En appliquant Δ (qui est linéaire) à cette égalité :

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1}(Q)(x) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \Delta(Q)(x+i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \left[Q((x+i)+1) - Q(x+i)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} Q(x+i+1) - \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} Q(x+i) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n-(i-1)} \binom{n}{i-1} Q(x+i) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i+1} \binom{n}{i} Q(x+i) \\
&= Q(x+n+1) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i+1} \binom{n}{i-1} Q(x+i) + (-1)^{n+1} Q(x) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i+1} \binom{n}{i} Q(x+i) \\
&= Q(x+n+1) + (-1)^{n+1} Q(x) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i+1} \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}\right] Q(x+i) \\
&= Q(x+n+1) + (-1)^{n+1} Q(x) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i+1} \binom{n+1}{i} Q(x+i) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n-i+1} \binom{n+1}{i} Q(x+i)
\end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

On conclut par principe de récurrence.

Méthode 2. Par la formule du binôme de Newton.

Notons T l'application qui à $P \in \mathscr{P}$ associe $Q : x \mapsto P(x+1)$. On montre facilement que T est un endomorphisme de $\mathscr{P}$, et on a :

$$\Delta = T - \mathrm{Id}.$$

Puisque T et Id **commutent**, on obtient par la formule du binôme de Newton que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Delta^n = (T - \mathrm{Id})^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} T^i \circ (-\mathrm{Id})^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} T^i.$$

Par une récurrence immédiate, on note que pour toute fonction polynomiale Q et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T^k(Q)(x) = Q(x+k).$$

On en déduit que pour toute fonction polynomiale Q, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\Delta^n(Q)(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} Q(x+i).}$$

6. (a) i. Soient g et h appartenant à $\mathscr{C}(\Delta_r)$ tels que $g(N_r) = h(N_r)$. Pour tout $k \in [\![0, r]\!]$:

$$g(N_{r-k}) = g(\Delta_r^k(N_r)) = g \circ \Delta_r^k(N_r) \underbrace{=}_{g\in\mathscr{C}(\Delta_r)} \Delta_r^k \circ g(N_r) = \Delta_r^k \circ g(N_r)$$
$$= \Delta_r^k \circ h(N_r) \underbrace{=}_{h\in\mathscr{C}(\Delta_r)} h \circ \Delta_r^k(N_r) = h(N_{r-k}).$$

Les endomorphismes g et h coïncident sur la base $(N_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $\mathscr{P}_r$. $\boxed{\text{Elles sont donc égales.}}$

ii. Soit g un endomorphisme de $\mathscr{P}_r$. $g(N_r)$ appartient à $\mathscr{P}_r$ et $(N_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathscr{P}_r$. D'où l'existence de $a_0, a_1, \dots, a_r$ réels tels que :

$$\boxed{g(N_r) = a_r N_r + a_{r-1}N_{r-1} + \cdots + a_1 N_1 + a_0 N_0.}$$

iii. Soit $g \in \mathscr{C}(\Delta_r)$. Par la question précédente, il existe des réels $a_0, \dots, a_r$ tels que :

$$g(N_r) = \sum_{k=0}^{r} a_k N_k = \sum_{k=0}^{r} a_k \Delta_r^{r-k}(N_r) = \left[\sum_{k=0}^{r} a_k \Delta_r^{r-k}\right](N_r).$$

Or l'endomorphisme $\sum_{k=0}^{r} a_k \Delta_r^{r-k}$ est un polynôme en Δ_r, il commute donc avec Δ_r, et appartient à $\mathscr{C}(\Delta_r)$. Par la question 6.(a).i., il suit que :

$$g = \sum_{k=0}^{r} a_k \Delta_r^{r-k}$$

Ainsi $\left(\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}, (\Delta_r)^1, \dots, (\Delta_r)^{r-1}, (\Delta_r)^r\right)$ est une famille génératrice de $\mathscr{C}(\Delta_r)$.

Montrons que cette famille est libre. Soient pour cela $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ tels que :

$$a_0 \mathrm{Id} + a_1 \Delta_r + \cdots + a_r \Delta_r^r = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{P}_r)}.$$

Évaluons cette identité en N_r :

$$a_0 N_r + a_1 \Delta_r(N_r) + \cdots + a_r \Delta_r^r(N_r) = 0_{\mathscr{P}_r},$$

soit encore :

$$a_0 N_r + a_1 N_{r-1} + \cdots + a_r N_0 = 0_{\mathscr{P}_r},$$

Or $(N_k)_{k\in[\![0,r]\!]}$ est une famille libre de $\mathscr{P}_r$, d'où $a_0 = a_1 = \cdots = a_r$. Ainsi $\left(\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}, (\Delta_r)^1, \dots, (\Delta_r)^{r-1}, (\Delta_r)^r\right)$ est une famille libre.

$\boxed{\left(\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}, (\Delta_r)^1, \dots, (\Delta_r)^{r-1}, (\Delta_r)^r\right) \text{ est donc une base de } \mathscr{C}(\Delta_r) \text{ qui est de dimension } r+1.}$

iv. Pour toute fonction polynomiale P et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$d \circ \Delta(P)(x) = P'(x+1) - P'(x) = \Delta \circ d(P)(x).$$

Donc d appartient à $\mathscr{C}(\Delta)$.

Supposons qu'il existe $a_0, a_1, \dots, a_r$ des réels tels que $d = a_0 \mathrm{Id}_{\mathscr{P}} + a_1(\Delta)^1 + \cdots + a_r(\Delta)^r$. On obtient en évaluant en N_{r+1} :

$$N'_{r+1} = a_0 N_{r+1} + a_1 N_r + \cdots + a_r N_1.$$

En prenant $x = 0$ dans cette égalité, on obtient :

$$N'_{r+1}(0) = a_0 N_{r+1}(0) + a_1 N_r(0) + \cdots + a_r N_1(0) = 0.$$

Ainsi 0 serait racine au moins double de N_{r+1}. Or ceci est faux, car on a obtenu que $N_{r+1}(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-r)}{(r+1)!}$, et donc que 0 est racine simple de N_{r+1}. D'où une contradiction.

Ceci montre que $\mathscr{C}(\Delta)$ n'est pas réduit au sous-espace vectoriel $\{P(\Delta),\ P \in \mathscr{P}\}$, contrairement au commutant de Δ_r.

(b) On a vu que $\Delta_r(N_0) = 0$ et que pour tout $n \in [\![1, r]\!]$, on a $\Delta_r(N_n) = N_{n-1}$. En notant $\mathscr{B} = (N_n)_{n\in[\![0,r]\!]}$, on en déduit :

$$\boxed{M_{\mathscr{B}}(\Delta_r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{r+1}(\mathbb{R}).}$$

Pour montrer que $(\Delta_r)^{r+1} = 0$, on peut le faire matriciellement (la matrice est triangulaire supérieure stricte). On peut aussi remarquer que pour tout $k \in [\![0, r]\!]$:

$$(\Delta_r)^{r+1}(N_k) = (\Delta_r)^{r+1-k}(N_0) = \Delta_r^{r-k}(\Delta_r(N_0)) = \Delta_r^{r-k}(0_{\mathscr{P}_r}) = 0_{\mathscr{P}_r}.$$

Ainsi, Δ_r s'annule sur la base $\mathscr{B}$. C'est donc l'endomorphisme nul : $\boxed{(\Delta_r)^{r+1} = 0.}$

Pour aller plus loin.

Ainsi Δ_r est donc un endomorphisme nilpotent, d'indice $r+1$ car on a $\Delta_r^r(N_r) = N_0 \neq 0_{\mathscr{P}_r}$. Et on a vu que son commutant est de dimension $r+1$, avec pour base $(\mathrm{Id}, \Delta_r, \dots, \Delta_r^r)$.

En fait, on peut montrer plus généralement le résultat suivant (que je vous laisse en exercice) : pour $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence $n = \dim(E)$, son commutant $\mathscr{C}(f)$ est de dimension n, et $(\mathrm{Id}, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathscr{C}(f)$.

(c) Supposons qu'un tel endomorphisme g existe. Dans ce cas :

$$g \circ \Delta_r = g \circ g \circ g = \Delta_r \circ g.$$

Donc g appartiendrait au commutant de Δ_r. D'après la question 6., il existerait donc $a_0, \dots, a_r$ des réels tels que :

$$g = a_0\mathrm{Id} + a_1\Delta_r + \dots + a_r\Delta_r^r.$$

On aurait alors :

$$\Delta_r = g \circ g = a_0^2\mathrm{Id} + 2a_0a_1\Delta_r + \sum_{k=2}^{r} b_k\Delta_r^k$$

où les b_k sont des réels dont la valeur importe peu (ils s'écrivent en fonction des a_k). Puisque la famille $(\Delta_r^k)_{k\in[\![0,r]\!]}$ est libre, on obtient $a_0^2 = 0$ et $2a_0a_1 = 1$, ce qui donnerait $0 = 1$. D'où une contradiction. $\boxed{\text{Il n'existe donc pas de } g \in \mathscr{L}(\mathscr{P}_r) \text{ tel que } g \circ g = \Delta_r.}$

Autre méthode. En utilisant l'Exercice 6.8 du TD.

On a vu dans l'exercice 6.8 du TD que si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension n, alors $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Ici, si $g \circ g = \Delta_r$, alors :

$$g^{2(r+1)} = \Delta_r^{r+1} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{P}_r)}.$$

g est donc un endomorphisme nilpotent de $\mathscr{P}_r$. Comme $\dim(\mathscr{P}_r) = r+1$, il vient d'après l'exercice 6.8 :

$$g^{r+1} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{P}_r)}.$$

Notons $k = \begin{cases} \frac{r+1}{2} & \text{si } r \text{ impair,} \\ \frac{r+2}{2} & \text{si } r \text{ pair.} \end{cases}$. Donc $k < r+1$ et :

$$\Delta_r^k = g^{2k} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{P}_r)}.$$

Donc l'indice de nilpotence de Δ_r serait $< r+1$, alors que $\Delta_r^r(N_r) = N_0 \neq 0_{\mathscr{P}_r}$. D'où une contradiction.

Partie II.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \notin \mathbb{N}$, les $N_n(x)$ sont non nuls, et les u_n sont non nuls. Calculons :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^t \frac{|N_{n+1}(x)|}{|N_n(x)|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^t \frac{|x-n|}{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{t-1} \frac{|x-n|}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{t-1} \left|1-\frac{x}{n}\right|.$$

À partir d'un certain rang N, $1-\frac{x}{n} > 0$ pour tout $n \geq N$. Et dans ce cas :

$$\begin{aligned} v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= (t-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \\ &= \frac{t-1}{n} - \frac{t-1}{2n^2} - \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{t-1-x}{n} - \frac{t-1+x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On a alors plusieurs cas à considérer :

- Si $t-1-x \neq 0$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{t-1-x}{n}$. De plus $\frac{1}{n} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Par théorème de comparaison, la série de terme général v_n diverge également.
- Si $t-1-x = 0$ et $t-1+x^2 \neq 0$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{t-1+x^2}{n^2}$. De plus $\frac{1}{n^2} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Par théorème de comparaison, la série de terme général v_n converge également.
- Si $t-1-x = 0$ et $t-1+x^2 = 0$, alors $v_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme $\frac{1}{n^2} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum v_n$ converge également par théorème de comparaison.

Finalement, $\boxed{\text{la série } \sum v_n \text{ converge si, et seulement si, } t = 1+x.}$

(b) Puisque $\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_n) - \ln(u_1)$, on en déduit selon les cas :

- si $t < x+1$, la série $\sum v_n$ diverge. De plus, puisque dans ce cas $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{t-1-x}{n}$, v_n est négatif à partir d'un certain rang. La suite des sommes partielles de $\sum v_n$ est donc décroissante à partir d'un certain rang. Par théorème de limite monotone, soit elle est minorée et converge vers une limite finie, soit elle n'est pas minorée et sa limite est $-\infty$. Comme la série $\sum v_n$ diverge, elle n'est pas minorée. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} v_k = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) - \ln(u_1) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

- si $t > x+1$, la série $\sum v_n$ diverge, et dans ce cas, v_n est positif à partir d'un certain rang. Il suit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} v_k = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

- si $t = x+1$, la série $\sum v_n$ converge. Notons $S(x)$ sa somme. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) - \ln(u_1) = S(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = u_1 e^{S(x)}.$$

En posant $C(x) = u_1 e^{S(x)} > 0$, on en déduit que $u_n = n^{x+1}|N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} C(x)$, soit encore :

$$|N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C(x)}{n^{x+1}}.$$

2. (a) Prenons $f : x \mapsto b^x$. Calculons :

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b^i (-1)^{n-i} \boxed{= (b-1)^n}$$

par la formule du binôme de Newton.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k$. D'après la question 4.(d), on sait que $Q = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(Q)(0) N_k$. Puisque la famille $(N_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est libre, on obtient :

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!], \quad a_k = \Delta^k(Q)(0).}$$

Montrons que la fonction $x \mapsto f(x) - Q(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)$ s'annule en $0, 1, \ldots, n$.

Méthode 1. Calcul direct.
Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Alors :

$$Q(i) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(i).$$

Or :

$$N_k(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > i, \\ \frac{i(i-1)\ldots(i-k+1)}{k!} = \frac{i!}{k!(i-k)!} = \binom{i}{k} & \text{si } k \leq i. \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} Q(i) &= \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_k = f(i) - \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_k = \sum_{k=0}^{i} \sum_{j=0}^{k} \binom{i}{k} \binom{k}{j} f(j)(-1)^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{i} f(j) \sum_{k=j}^{i} \frac{i!}{(i-k)!j!(k-j)!}(-1)^{k-j} = \sum_{j=0}^{i} \frac{i!}{j!} f(j) \sum_{k=j}^{i} \frac{1}{(i-k)!(k-j)!}(-1)^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{i} \frac{i!}{j!} f(j) \sum_{k=0}^{i-j} \frac{1}{(i-k-j)!k!}(-1)^k \end{aligned}$$

Or si $j \neq i$, on obtient par la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{i-j} \frac{1}{(i-k-j)!k!}(-1)^k = \frac{(1+(-1))^{i-j}}{(i-j)!} = 0.$$

Ainsi :

$$Q(i) = \frac{i!}{i!} f(i) \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{(0-k)!k!}(-1)^k = f(i).$$

Donc $\boxed{\text{la fonction } x \mapsto f(x) - Q(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x) \text{ s'annule en } 0, 1, \ldots, n.}$

Méthode 2. À l'aide des polynômes interpolateurs de Lagrange.
Soit R le polynôme de degré n tel que $R(i) = f(i)$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ (on a prouvé l'existence d'un tel polynôme dans l'exercice 0.5 du TD0a). D'après la question 4.(d), on sait que $R = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(R)(0) N_k$.
Et d'après 5. :

$$\Delta^k(R)(0) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} R(i) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(i) = a_k.$$

Ainsi $R = Q$, et on en déduit que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$:

$$f(i) - Q(i) = f(i) - R(i) = 0.$$

(c) Supposons dans un premier temps que $x \notin [\![0,n]\!]$. Fixons $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x) = N_{n+1}(x) A$$

Un tel réel A existe bien puisque $N_{n+1}(x) \neq 0$.

La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et s'annule en $n+2$ réels distincts : tous les entiers $0, 1, \dots, n$ et en x. En appliquant le théorème de Rolle entre chacun de ces entiers, on en déduit l'existence de $(n+1)$ réels distincts $b_0 < b_1 < \cdots < b_{n+1}$ tels que :

$$\varphi'(b_0) = \varphi'(b_1) = \cdots = \varphi'(b_{n+1}).$$

En appliquant alors de nouveau le théorème de Rolle à φ' entre chacun des b_i, on en déduit l'existence de n réels distincts en lesquels $\varphi^{(2)}$ s'annule.

En itérant ce procédé (on dit qu'on applique ici le théorème de Rolle en cascade), on en déduit pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$ l'existence de $n+2-k$ réels distincts en lesquels $\varphi^{(k)}$ s'annule. En particulier pour $k = n+1$, on en déduit l'existence d'un réel θ tel que $\varphi^{(n+1)}(\theta) = 0$.

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k N_k$ est une fonction polynomiale de degré $\leq n$, donc sa dérivée $(n+1)$-ème est nulle. D'autre part, N_{n+1} est une fonction polynomiale de degré $n+1$ de terme dominant $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, donc $N_{n+1}^{(n+1)} = 1$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - A \quad \underset{t=\theta}{\Rightarrow} \quad f^{(n+1)}(\theta) = A.$$

Finalement, on obtient :

$$\varphi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x) + A N_{n+1}(x) \boxed{= \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x) + N_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta).}$$

Enfin cette propriété reste vraie lorsque $x \in [\![0, n]\!]$ d'après la question précédente et puisque $N_{n+1}(x) = 0$: il suffit de prendre θ quelconque.

(d) En reprenant les notations précédentes et compte tenu de l'hypothèse faite ici, on aura :

$$|f^{(n+1)}(\theta) N_{n+1}(x)| \leq M(n+1)|N_{n+1}(x)|.$$

Or d'après II.1.(b) :

$$(n+1)|N_{n+1}(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1) \times \frac{C(x)}{(n+1)^{x+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C(x)}{n^x}.$$

Pour tout $x > 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f^{(n+1)}(\theta) N_{n+1}(x) = 0$. En passant à la limite dans l'égalité de la question précédente, on en déduit que la série $\sum a_k N_k(x)$ converge et que :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x).}$$

Notons que cette égalité est encore valable pour $x = 0$ car $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(0) = a_0 = f(0)$.

Si on suppose de plus que $f(i) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors :

$$\forall k \geq 0, \quad a_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(i) = 0.$$

On obtient que pour tout $x \geq 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x) = 0.$$

$\boxed{f \text{ est donc la fonction nulle.}}$

3. **Étude de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} h^n N_n(x)$ avec h réel :**

(a) En utilisant l'équivalent obtenu à la question II.1.(b), il vient (puisque $x \notin \mathbb{N}$) :

$$|h|^n |N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} C(x)\frac{|h|^n}{n^{x+1}}.$$

Si $|h| > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|h|^n}{n^{x+1}} = +\infty$ par croissances comparées, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |h|^n|N_n(x)| = +\infty$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } |h| > 1\text{, la série de terme général } h^n N_n(x) \text{ diverge grossièrement.}}$

(b) i. Supposons tout d'abord que $x \notin \mathbb{N}$. Alors :

- $|h|^n|N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} C(x)\dfrac{|h|^n}{n^{x+1}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées (puisque $|h| < 1$) ;
- $\frac{1}{n^2} \geq 0$ pour tout $n \geq 0$;
- $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série convergente (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

Par théorème de comparaison, $\boxed{\text{la série de terme général } h^n N_n(x) \text{ est absolument convergente}}$ pour tout $x \notin \mathbb{N}$.

Dans le cas où $x = k \in \mathbb{N}$, $N_n(x) = 0$ dès que $n \geq k+1$, et la série $\sum h^n N_n(x)$ est absolument convergente (c'est une somme finie).

ii. La fonction $f : h \mapsto (1+h)^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. On peut donc lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à tout ordre n entre 0 et h :

$$f(h) = \sum_{k=0}^n h^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{f^{(k)}(h)}{k!} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}(1+h)^{x-k} = N_k(x)(1+h)^{x-k}.$$

Cette égalité reste de plus vraie pour $k = 0$ puisque $N_0 = 1$. On obtient en substituant :

$$(1+h)^x = \sum_{k=0}^n h^k N_k(x) + (n+1)N_{n+1}(x)\int_0^h (h-t)^n(1+t)^{x-n-1}\,\mathrm{d}t,$$

ce qui se réécrit encore :

$$\boxed{(1+h)^x - \sum_{k=0}^n h^k N_k(x) = (n+1)N_{n+1}(x)\int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t. \qquad (*)}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{1}{h^n}\int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{|h|^n}\left|\int_0^h \left|\frac{h-t}{1+t}\right|^n (1+t)^{x-1}\mathrm{d}t\right|.$$

Posons $\varphi : t \in]-1,1[\mapsto \frac{h-t}{1+t}$. φ est dérivable sur $]-1,1[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus :

$$\varphi'(t) = \frac{-(1+t)-(h-t)}{(1+t)^2} = \frac{-1-h}{(1+t)^2} < 0 \quad \text{car} \quad |h| < 1.$$

Ainsi, φ est décroissante. Ses valeurs extrémales sur $[0,h]$ (ou $[h,0]$) sont donc obtenues pour $t = 0$ ou $t = h$. Ainsi :

$$\forall t \in [0,h] \text{ (ou } [h,0]), \quad |\varphi(t)| \leq \max(|\varphi(0)|, |\varphi(h)|) = \max(|h|^n, 0) = |h|^n.$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{1}{h^n}\int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_0^h (1+t)^{x-1}\mathrm{d}t\right|.$$

Cette dernière quantité étant indépendante de n, $\left(\dfrac{1}{h^n}\displaystyle\int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien bornée.

iii. Si $x = k \in \mathbb{N}$, on sait que $N_{n+1}(x) = 0$ dès que $n \geq k$, et :

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)N_{n+1}(x)\int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Sinon, en utilisant l'équivalent de la question II.1.(b), on obtient :

$$|(n+1)N_{n+1}(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C(x)}{(n+1)^x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C(x)}{n^x}.$$

D'après la question précédente, il existe une constante K telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\mathrm{d}t\right| \leq K|h|^n.$$

Et puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{h^n}{n^x} = 0$ par croissances comparées ($|h| < 1$), on en déduit en passant à la limite dans $(*)$ que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} h^n N_n(x)$ converge (ce qu'on savait déjà), et sa somme vaut :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} h^n N_n(x) = (1+h)^x.}$$

(c) i. Pour $x \leq -1$, x n'est pas un entier naturel et l'on a toujours $N_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{n^{x+1}}$. Puisque $x+1 \leq 0$, la suite $(N_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend donc pas vers 0 (car $C(x) > 0$). Ainsi, $\boxed{\sum N_n(x) \text{ diverge grossièrement.}}$

ii. En prenant $h = 1$ dans $(*)$, on obtient :

$$2^x - \sum_{k=0}^{n} N_k(x) = (n+1)N_{n+1}(x)\int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq \dfrac{1-t}{1+t} \leq 1-t$ et $0 \leq (1+t)^{x-1} \leq \max(1, 2^{x-1}) = M$. On en déduit que :

$$0 \leq \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t \leq M\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{M}{n+1}.$$

Ainsi :

$$\left|2^x - \sum_{k=0}^{n} N_k(x)\right| \leq (n+1)|N_{n+1}(x)|\frac{M}{n+1} = M|N_{n+1}(x)|.$$

Si x est un entier naturel, $N_{n+1}(x)$ est nul à partir d'un certain rang, de sorte que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} N_{n+1}(x) = 0$. Sinon, on sait d'après II.1.(b) que $|N_{n+1}(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{(n+1)^{x+1}}$, et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}|N_{n+1}(x)| = 0$ puisque $x+1 > 0$.

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} N_n(x)$ est convergente pour $x > -1$ et que :

$$\boxed{\forall x > -1, \ \sum_{n=0}^{+\infty} N_n(x) = 2^x.}$$

(d) i. Étudions la convergence absolue de la série de terme général $(-1)^n N_n(x)$.
Si $x \in \mathbb{N}$, $(-1)^n N_n(x)$ est nul dès que $n \geq x+1$. Dans ce cas, la série $(-1)^n N_n(x)$ converge absolument (somme finie).
Si $x \notin \mathbb{N}$:

- $|(-1)^n N_n(x)| = |N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{n^{x+1}}$;
- $\dfrac{1}{n^{x+1}} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$;

- $\sum \frac{1}{n^{x+1}}$ converge si, et seulement si, $x+1>1$, soit si et seulement si $x>0$ (série de Riemann).

Par théorème de comparaison, la série de terme général $|(-1)^n N_n(x)|$ converge si, et seulement si, $x>0$.

Ainsi $\boxed{\text{la série de terme général } (-1)^n N_n(x) \text{ converge absolument si, et seulement si, } x \geq 0.}$

Étudions à présent la convergence de $\sum (-1)^n N_n(x)$.

- Si $x \geq 0$, cette série est absolument convergente, donc convergente.
- Si $x<0$ et $n \geq 0$, $N_n(x) = \dfrac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$ est du signe de $(-1)^n$, donc $(-1)^n N_n(x)$ est positif. La convergence de la série équivaut alors à son absolue convergence, qui n'a pas lieu dans ce cas.

En conclusion, $\boxed{\text{la série de terme général } (-1)^n N_n(x) \text{ converge si, et seulement si, } x \geq 0.}$

ii. Montrons le par récurrence sur $n \geq 1$.

Init. Pour $n=1$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$N_0(x) - N_1(x) = 1 - x = -(x-1) = -N_1(x-1).$$

D'où la propriété au rang $n=1$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang n. Montrons là au rang $n+1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k N_k(x) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k N_k(x) + (-1)^{n+1}N_{n+1}(x) \overset{HR}{=} (-1)^n N_n(x-1) + (-1)^{n+1}N_{n+1}(x)\\ &= (-1)^n\left[N_n(x-1) - N_{n+1}(x)\right] = (-1)^n\left[\Delta(N_{n+1})(x-1) - N_{n+1}(x)\right]\\ &= (-1)^n\left[N_{n+1}((x+1-1) - N_{n+1}(x-1) - N_{n+1}(x)\right] = (-1)^{n+1}N_{n+1}(x-1)\end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, on conclut que pour tout x réel et tout entier naturel n strictement positif :

$$\boxed{N_0(x) - N_1(x) + \dots + (-1)^n N_n(x) = (-1)^n N_n(x-1). \qquad (**)}$$

iii. Soit $x \geq 0$. Différents cas sont à considérer :

- Si $x-1 \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire si $x \in \mathbb{N}^*$, alors $N_k(x) = 0$ pour tout $k \geq x+1$ et $N_n(x-1) = 0$ pour $n \geq x$. On obtient donc en passant à la limite dans $(**)$ quand $n \to \infty$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k N_k(x) = 0.}$$

- Si $x=0$, $N_k(x) = 0$ pour $k \geq 1$, et donc $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k N_k(x) = N_0(x) = 1.}$
- Si $x \notin \mathbb{N}$, l'équivalent $|N_n(x-1)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{n^x}$ montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} N_n(x-1) = 0$ puisque $x>0$. Et en passant à la limite dans $(**)$ lorsque $n \to +\infty$, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k N_k(x) = 0.}$$

Remarque. En conclusion de la question II.3., la série $\sum\limits_{k\geq 0} h^k N_k(x)$ converge si, et seulement si :

- $|h|<1$ et x quelconque ;
- $h=1$ et $x>-1$;
- $h=-1$ et $x \geq 0$.

De plus, l'égalité suivante est satisfaite en cas de convergence (avec la convention $0^0 = 1$) :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} h^k N_k(x) = (1+h)^x.$$