DM1

Correction du devoir maison

Exercice 1 (Ecricome 2016)

1. (a) On a $\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \left[x - \dfrac{x^2}{2}\right] + o(x^2)}$ et $\boxed{\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} [1 - x + x^2] + o(x^2)}$.

   (b) Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a :

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)\\
&= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}}$.

   (c) On a :

   - $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$;
   - $-\frac{1}{2n^2} \leq 0$ pour tout n, donc de signe constant ;
   - la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{-1}{2n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

   Par théorème de comparaison, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (w_{n+1} - w_n)$ converge. De plus, on a pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (w_{k+1} - w_k) = w_n - w_1 \quad (\text{ somme téléscopique}).$$

   Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (w_{n+1} - w_n)$ est de même nature (i.e. convergente ou divergente) que la suite (w_n). On peut donc conclure que $\boxed{\text{la suite } (w_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge}}$.

2. Par quotient de fonctions $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$, la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout réel $t > 0$, on a :

$$\varphi'(t) = \frac{\frac{1}{t} \cdot t - \ln(t) \cdot 1}{t^2} = \frac{1 - \ln(t)}{t^2} \qquad \text{donc} \qquad \varphi'(t) > 0 \Leftrightarrow \ln(t) < 1 \Leftrightarrow t < e^1$$

   Ainsi φ est strictement croissante sur $]0, e]$ et φ est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$.
   Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$.
   Par produit, on a $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = -\infty$.

t	0		e		$+\infty$
$f'(t)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1/e	$\searrow$	0

3. (a)
   - (S_{2n}) est décroissante : pour tout $n \geqslant 2$, on a $2n+3 > 2n+2 > 2n+1 > 2n \geqslant 4 > 3 > e$. D'où :
   $$S_{2(n+1)}-S_{2n} = u_{2n+2}+u_{2n+1} = \frac{\ln(2n+2)}{2n+2}-\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = \varphi(2n+2)-\varphi(2n+1) < 0$$
   - (S_{2n+1}) est croissante : pour tout $n \geqslant 2$
   $$S_{2(n+1)+1}-S_{2n+1} = u_{2n+3}+u_{2n+2} = -\frac{\ln(2n+3)}{2n+3}+\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} = -\varphi(2n+3)+\varphi(2n+2) > 0$$
   - La différence de ces deux suites tend vers 0 : pour tout $n \geqslant 2$
   $$S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} = -\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   On peut donc conclure que $\boxed{\text{les suites } (S_{2n})_{n\geqslant 2} \text{ et } (S_{2n+1})_{n\geqslant 2} \text{ sont adjacentes}}$.

   (b) Puisque (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, elles convergent donc vers la même limite ℓ. De plus, comme il s'agit des suites extraites paires et impaires, et que ces deux suites recouvrent tous les termes de la suite $(S_n)_{n\geqslant 4}$, alors cette dernière converge elle aussi vers ℓ. Ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge}}$.

   Pour tout $n \geqslant 3$, on a : $|u_n| = \frac{\ln(n)}{n} \geqslant \frac{1}{n} \geq 0$. Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.
   Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum |u_n|$ diverge. Ainsi $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ n'est pas absolument convergente}}$.

4. (a) Soit $n \geqslant 3$. Alors on a : $n+1 > n \geqslant 3 > e$. La fonction φ est décroissante sur $[e, +\infty[$ donc on a :
   $$\forall t \in [n, n+1], \quad \varphi(n+1) \leqslant \varphi(t)$$
   Par croissance de l'intégrale (avec les bornes dans le « bon sens »), on a :
   $$\int_n^{n+1} \varphi(n+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$
   Ainsi on a bien : $\boxed{\forall n \geqslant 3, \quad \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t}$.

   (b) Soit $n \geqslant 3$. On a :
   $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n+1)]^2}{2}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}\right) \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{[\ln(n+1)]^2 - [\ln(n)]^2}{2} = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \left[\frac{[\ln(t)]^2}{2}\right]_n^{n+1} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\ln(t)\mathrm{d}t = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t \leqslant 0 \end{aligned}$$
   Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\geqslant 3} \text{ est décroissante}}$.

   Soit $n \geqslant 3$. Puisque φ est décroissante sur $[3, +\infty[$, on a :
   $$\forall k \in [\![3, n]\!], \quad \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln(k)}{k}$$

En sommant pour $3 \leq k \leq n-1$, on obtient :
$$\int_3^n \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=3}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=3}^{n-1}\frac{\ln(k)}{k}$$
D'où :
$$\frac{[\ln(n)]^2}{2} - \frac{[\ln(3)]^2}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(n)}{n}$$
On obtient donc à partir de cette inégalité :
$$\frac{\ln(2)-[\ln(3)]^2}{2} \leqslant \frac{\ln(2)-[\ln(3)]^2}{2} + \underbrace{\frac{\ln(n)}{n}}_{\geq 0 \text{ car } n \geqslant 3 > 1} \leqslant v_n$$
Donc la suite (v_n) est minorée. Comme elle est également décroissante, $\boxed{(v_n)_{n\geqslant 3} \text{ est convergente}}$.

5. Soit $n \geqslant 1$. On a :
$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\ln(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \qquad \text{en séparant termes pairs et impairs.}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \left[\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k}\right]\end{aligned}$$
On obtient donc : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k}}$.

Soit $n \geqslant 1$. On déduit de l'égalité qui précède que :
$$\begin{aligned} S_{2n} &= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2)+\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k}\\ &= \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k}\\ &= \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \left[v_n + \frac{[\ln(n)]^2}{2}\right] - \left[v_{2n} + \frac{[\ln(2n)]^2}{2}\right]\\ &= \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{[\ln(n)]^2 - [\ln(2)+\ln(n)]^2}{2}\\ &= \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{[-\ln(2)]\,[2\ln(n)-\ln(2)]}{2}\end{aligned}$$
Donc on a bien : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n)}$.

6. On sait que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{2n}$$
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} v_{2n} \qquad \text{et que} \qquad \lim_{n\to+\infty} w_n = \gamma$$
Alors on a :
$$S_{2n} = \ln(2)w_n - \frac{[\ln(2)]^2}{2} + (v_n - v_{2n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma\ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2} + 0$$
Finalement on obtient bien : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n} = \gamma\ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}}$.