

DM1

## Devoir maison à rendre le 19/09/2022

### Exercice 1

On pourra utiliser sans justification que  $2 < e^1 < 3$ .

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général  $u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$  pour  $n \geq 1$ .

1. On note :  $\forall n \geq 1, w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ .

(a) Rappeler les développements limités à l'ordre 2 lorsque  $x$  tend vers 0 de  $\ln(1+x)$  et  $\frac{1}{1+x}$ .

(b) Montrer alors que :  $w_{n+1} - w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$ .

(c) Montrer que la série de terme général  $(w_{n+1} - w_n)$  converge, puis que la suite  $(w_n)$  converge vers un réel  $\gamma$ , appelé **constante d'Euler**.

2. Étudier les variations de la fonction  $\varphi : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$  sur  $]0, +\infty[$ . Dresser le tableau de variations de la fonction  $\varphi$  en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

3. On note pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

(a) Montrer que les suites  $(S_{2n})_{n \geq 2}$  et  $(S_{2n+1})_{n \geq 2}$  sont adjacentes.

(b) Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge. Est-elle absolument convergente ?

4. On note pour tout entier  $n \geq 1, v_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$ .

(a) Justifier que pour tout entier  $n \geq 3$ , on a :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$$

(b) En déduire que la suite  $(v_n)_{n \geq 3}$  est décroissante et convergente.

5. Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$S_{2n} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

puis que :

$$S_{2n} = \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2) \ln(n)$$

6. Démontrer alors que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$$