DM10

Devoir maison à rendre le 20/02/2023

Exercice 1 (Ecricome 2017)

1. (a) Par croissances comparées, on a $\boxed{\lim_{x\to 0} x\ln x = 0.}$

   Par composition de limites, on en déduit que $\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = 1.}$

   (b) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle, et pour $x>0$, $f'(x) = \ln(x)+1$. De plus, on a $f'(x)>0$ ssi $\ln x > -1$ ssi $x > e^{-1}$.
   On a le tableau de variations suivant :

x	0		e^{-1}		1
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0

   g est dérivable sur $]0,1]$ comme composée de fonctions dérivables, et pour $x>0$, $g'(x) = f'(x)e^{x\ln x}$. $g'(x)$ est donc du signe de $f'(x)$. On a le tableau de variations suivant :

x	0		e^{-1}		1
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	1

   (c) g est continue sur $]0,1]$ et admet une limite finie en 0 (qui vaut 1). L'intégrale $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ est donc faussement généralisée en 0. $\boxed{\text{Elle converge donc.}}$

2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction $t\mapsto f(t)^n$ est continue sur $]0,1]$ car f l'est, et elle admet une limite finie en 0 (qui vaut 0). Donc l'intégrale $\int_0^1 f(t)^n\,\mathrm{d}t$ est faussement généralisée en 0, et converge donc bien. Ainsi $\boxed{u_n \text{ existe bien pour tout } n\in\mathbb{N}.}$

   (b) D'après les variations de f obtenues en 1.(b), on a pour tout $t\in]0,1]$:

$$|f(t)| \leq e^{-1} \quad \text{d'où} \quad |f(t)^n| \leq e^{-n}.$$

   La fonction $|f^n|$ est continue sur $]0,1]$ et admet une limite finie en 0, donc l'intégrale $\int_0^1 |(t\ln t)^n|\,\mathrm{d}t$ converge. Par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_0^1 |(t\ln t)^n|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 e^{-n}\,\mathrm{d}t, \quad \text{soit} \quad \int_0^1 |(t\ln t)^n|\,\mathrm{d}t \leq e^{-n}.$$

   Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$|u_n| \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 |(t\ln t)^n|\,\mathrm{d}t \leq \frac{e^{-n}}{n!}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{n!} = 0$. Par le théorème d'encadrement, la suite $\boxed{u \text{ converge et } \lim u_n = 0.}$

(c) On a $\boxed{u_0 = \displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1.}$

Pour calculer $u_1 = \displaystyle\int_0^1 t\ln t\,\mathrm{d}t$, effectuons une intégration par parties sur un **segment**, l'intégrale étant généralisée en 0. Soit $A \in]0,1[$.

$$\begin{array}{c|ccc}
+ & \ln(t) & \searrow & t \\
- & \dfrac{1}{t} & \overset{\int}{\longleftarrow} & \dfrac{t^2}{2}
\end{array}$$

Les fonctions $u : t \mapsto \frac{t^2}{2}$ et $v : t \mapsto \ln t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[A,1]$, et on a :

$$\begin{aligned}
\int_A^1 t\ln t\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_A^1 - \int_A^1 \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}A^2\ln A - \left[\frac{t^2}{4}\right]_A^1 \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{A^2}{4} - \frac{A^2\ln A}{2}
\end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{A\to 0} A^2\ln A = 0$. En faisant tendre A vers 0 (l'intégrale en jeu converge), nous obtenons $\boxed{u_1 = -\frac{1}{4}}$.

(d) On cherche à calculer $\displaystyle\int_0^1 (t\ln(t))^n\,\mathrm{d}t$. De même que précédemment, on va effectuer des intégrations par parties successives sur un **segment**, l'intégrale étant généralisée en 0. Soit $A \in]0,1[$.

$$\begin{array}{c|ccc}
+ & \ln(t)^n & \searrow & t^n \\
- & \dfrac{n}{t}\ln(t)^{n-1} & \overset{\int}{\longleftarrow} & \dfrac{t^{n+1}}{n+1}
\end{array}$$

Les fonctions $u : t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$ et $v : t \mapsto (\ln t)^n$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[A,1]$, et on a :

$$\begin{aligned}
\int_A^1 t^n(\ln t)^n\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(\ln t)^n\right]_A^1 - \int_A^1 \frac{nt^{n+1}(\ln t)^{n-1}}{(n+1)t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{A^{n+1}(\ln A)^n}{n+1} - \frac{n}{n+1}\int_A^1 t^n(\ln t)^{n-1}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{A\to 0} A^{n+1}(\ln A)^n = 0$. En faisant tendre A vers 0 (l'intégrale converge), nous obtenons :

$$n!u_n = -\frac{n}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

On réitère l'intégration par parties :

$$\begin{array}{c|ccc}
+ & \ln(t)^{n-1} & \searrow & t^n \\
- & \dfrac{n-1}{t}\ln(t)^{n-2} & \overset{\int}{\longleftarrow} & \dfrac{t^{n+1}}{n+1}
\end{array}$$

Les fonctions $u : t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$ et $v : t \mapsto (\ln t)^{n-1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[A, 1]$, et on a :

$$\begin{aligned}\int_A^1 t^n(\ln t)^{n-1}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(\ln t)^{n-1}\right]_A^1 - \int_A^1 \frac{(n-1)t^{n+1}(\ln t)^{n-2}}{(n+1)t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{A^{n+1}(\ln A)^{n-1}}{n+1} - \frac{n(n-1)}{n+1}\int_A^1 t^n(\ln t)^{n-2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{A\to 0} A^{n+1}(\ln A)^{n-1} = 0$, et en faisant tendre A vers 0 (l'intégrale converge), nous obtenons :

$$n!u_n = \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-2}\,\mathrm{d}t$$

En continuant ce procédé, nous avons pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$n!u_n = (-1)^k\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)^k}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-k}\,\mathrm{d}t$$

En particulier, on a pour $k = n$ que :

$$n!u_n = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^n}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^n}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Ainsi on a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.}$

(e) On a :

- pour $n \geq 1$, $\quad 0 \leq |u_n| = \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$,
- $\sum \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ converge. La série $\boxed{\sum u_n \text{ converge donc absolument, donc converge.}}$

(f) On propose deux fonctions.

```python
# avec calcul vectoriel
def somme(n):
    k = np.arange(n+1)
    u = (-1)**k
    v = (k+1)**(k+1)
    S = np.sum(u/v)
    return S
```

```python
# par une boucle for
def sommebis(n):
    S = 0
    for k in range(n+1):
        S=S+((-1)**k)/((k+1)**(k+1))
    return S
```

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons $I = [-\frac{1}{e}, 0]$ et $f : t \mapsto e^t$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, et pour tout $t \in I$, $|f^{(n+1)}(t)| = e^t \leqslant 1$. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n, pour tout $x \in I$, on a :

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k\right| \leqslant \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Pour tout entier naturel k, $f^{(k)} = f$. Pour $x \in I$, on a $|x| \leq \frac{1}{e}$, puis $|x|^{n+1} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$ et donc :

$$\boxed{\forall x \in I,\quad \left|e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.}$$

(b) Soit $x \in]0,1]$. Par l'étude de la question 1.b., $x\ln x \in [-\frac{1}{e}, 0]$. On peut appliquer le résultat de la question précédente :

$$\left| e^{x\ln x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x\ln x)^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$$

Les fonctions $x \mapsto \left| e^{x\ln x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x\ln x)^k}{k!} \right|$ et $x \mapsto \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$ sont continues sur $]0,1]$ et l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}\,\mathrm{d}x$ est convergente. Par le théorème de comparaison pour des intégrales de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_0^1 \left| e^{x\ln x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x\ln x)^k}{k!} \right| \mathrm{d}x$ converge. Par croissance de l'intégrale, on a de plus :

$$\int_0^1 \left| e^{x\ln x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x\ln x)^k}{k!} \right| \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}\,\mathrm{d}x$$

soit

$$\int_0^1 \left| e^{x\ln x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x\ln x)^k}{k!} \right| \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$$

Par ailleurs, par linéarité pour des intégrales convergentes, $I - S_n = \int_0^1 \left(e^{x\ln x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x\ln x)^k}{k!} \right) \mathrm{d}x$.

On termine par l'inégalité triangulaire :

$$\boxed{|I - S_n| \leqslant \int_0^1 \left| e^{x\ln x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x\ln x)^k}{k!} \right| \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}}$$

(c) On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$. Le théorème des gendarmes appliqué à l'encadrement de la question précédente donne $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe (ce qu'on savait depuis la question 2.(e)), et vaut I. Ainsi on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} = I.$$

Le changement d'indice $n = k+1$ donne enfin : $\boxed{I = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.}$

(d) On propose la fonction suivante.

```
def estimation(eps):
    n = 0
    f = 1
    while 1/(exp(n+1)*f) > eps :
        n = n+1
        f = f*(n+1)
    return somme(n)
```

Exercice 2 (EDHEC 2009)

1. Soit donc une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires qui converge en moyenne vers X. Montrons qu'elle converge en probabilité vers X. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a en utilisant l'inégalité de Markov à la variable $|X_n - X|$ positive et qui admet une espérance par hypothèse :
$$0 \leq P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{E(|X_n - X|)}{\varepsilon}.$$
Par hypothèse, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} E(|X_n - X|) = 0$. Ainsi par théorème des gendarmes :
$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$
D'où $\boxed{\text{la convergence en probabilité de } X_n \text{ vers } X.}$

2. (a) Toutes les variables Z_k suivent une loi de Poisson, donc sont à valeur dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \geq 1$, on a donc $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, et on a l'égalité d'évènements :
$$[Y_n \neq 0] = \left[\prod_{k=1}^{n} Z_k \neq 0\right] = \bigcap_{k=1}^{n} [Z_k \neq 0] = \bigcap_{k=1}^{n} [Z_k \geq 1].$$
On en déduit que :
$$P(Y_n \neq 0) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [Z_k \geq 1]\right) \underset{Z_k \text{ indép.}}{=} \prod_{k=1}^{n} P(Z_k \geq 1)$$
$$= \prod_{k=1}^{n} (1 - P(Z_k = 0)) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - e^{-\lambda}\right) \boxed{= \left(1 - e^{-\lambda}\right)^n}$$
(b) Soit ε un réel strictement positif. On a l'inclusion suivante : $\boxed{[Y_n > \varepsilon] \subset [Y_n \neq 0].}$
(c) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :
$$P(|Y_n - 0| > \varepsilon) \underset{Y_n(\Omega)\subset\mathbb{N}}{=} P(Y_n > \varepsilon) \leq P(Y_n \neq 0) = \left(1 - e^{-\lambda}\right)^n.$$
Or $\lambda > 1$, donc on a $0 < 1 - e^{-\lambda} < 1$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - e^{-\lambda}\right)^n = 0$. Par théorème des gendarmes, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Y_n - 0| > \varepsilon)$ existe et vaut 0.
$\boxed{\text{La suite } (Y_n) \text{ converge donc en probabilité vers la variable certaine égale à } 0.}$

3. (a) Supposons que la suite (Y_n) converge en moyenne vers une variable aléatoire Y. D'après la question 1., on en déduit que (Y_n) converge également en probabilité vers Y. Mais on sait que (Y_n) converge en probabilité vers 0 d'après la question 2.(c). Par unicité presque surement de la limite en probabilité (rappelée dans l'énoncé), on en déduit que $Y = 0$ presque surement, c'est-à-dire $\boxed{P(Y = 0) = 1}$.
(b) On sait que les variables Z_k sont indépendantes et admettent une espérance en tant que variables de Poisson. On en déduit par le cours que Y_n admet aussi une espérance, et on a l'égalité suivante :
$$E(Y_n) = E\left(\prod_{k=1}^{n} Z_k\right) \underset{Z_k \text{ indép.}}{=} \prod_{k=1}^{n} E(Z_k) = \prod_{k=1}^{n} \lambda \boxed{= \lambda^n.}$$
(c) On a $Y_n - Y \leq |Y_n - Y|$. Par croissance de l'espérance, on en déduit que :
$$E(Y_n - Y) \leq E(|Y_n - Y|),$$
et par linéarité de l'espérance : $\boxed{E(|Y_n - Y|) \geq E(Y_n) - E(Y).}$
On a $E(Y_n) = \lambda^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $\lambda > 1$. Par théorème d'encadrement, en utilisant l'inégalité précédemment établie, on obtient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} E(|Y_n - Y|) \text{ existe et vaut } +\infty.}$

4. On a montré dans cet exercice que la convergence en moyenne implique la convergence en probabilité (on dit que c'est un mode de convergence plus fort). Et on a vu que la réciproque est fausse sur un exemple : une suite (Y_n) de variables aléatoires peut converger en probabilité, mais ne pas converger en moyenne.

Exercice 3 (Edhec 2011)

1. (a) T_1 correspond au rang du premier succès, à savoir la réalisation de l'évènement A : « constituer une paire », lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (des boules portant des numéros distincts étant remises dans l'urne). Donc T_1 suit une loi géométrique de paramètre $p = P(A)$.

   Déterminons $P(A)$. On est dans le cas équiprobable (puisque la probabilité d'obtenir deux boules lors d'un tirage est la même pour n'importe lesquelles de ces boules). Il y a $\binom{2n}{2}$ cas possibles (tirage de deux boules parmi $2n$), et n tirages favorables apportant une paire (puisque pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il y a $\binom{2}{2} = 1$ tirage comportant la paire numérotée i). On obtient :

$$P(A) = \frac{n}{\binom{2n}{2}} = \frac{n}{\frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}} = \frac{n}{\frac{(2n)(2n-1)}{2}} = \frac{1}{2n-1}.$$

   La variable aléatoire $\boxed{T_1 \text{ suit donc une loi } \mathscr{G}\left(\frac{1}{2n-1}\right).}$

   (b) Puisque T_1 suit une loi $\mathscr{G}\left(\frac{1}{2n-1}\right)$, on sait que $E(T_1)$ existe et vaut :

$$E(T_1) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2n-1}} \boxed{= 2n-1.}$$

2. (a) Renumérotons les boules de l'urne de sorte que les deux boules numérotées initialement 1 portent à présent les numéros 2 et 3, les deux boules numérotées initialement 2 portent à présent les numéros 4 et 5, etc. De manière générale, les deux boules portant initialement le numéro i sont à présent porteuses des numéros $2i$ et $2i + 1$.

   Les deux instructions `a=rd.randint...` et `b = rd.randint` permettent de simuler le tirage (avec remise) de deux boules de l'urne.
   À ce stade, `a` et `b` peuvent être égales : on peut avoir tiré deux fois la même boule. La boucle `while` permet si besoin de retirer le numéro de la boule `b` jusqu'à ce qu'il soit différent de celui de la boule `a`. Autrement dit, à l'issue de la boucle `while`, on a simulé le tirage simultané (ou ce qui revient au même, sans remise) de deux boules de cette urne.

   Enfin, la commande `a = np.floor(a/2)` permet de retrouver le numéro initial car $\lfloor 2i \rfloor = \lfloor 2i + 1 \rfloor = i$.

   La fonction `tirage` retourne donc à la fin un vecteur `[a,b]` de nombres qui sont les numéros (avant renumérotation) de deux boules tirées sans remise dans l'urne.

   (b) Il s'agit d'utiliser la fonction tirage jusqu'à obtenir deux boules portant des numéros identiques. On n'oubliera pas de compter le nombre de tirages en modifiant au fur et à mesure la valeur de `y`.

```
def T(n):
    y = 1
    V = tirage(n)
    while a<>b :
        V = tirage(n)
        y = y+1
    return y
```

3. (a) X_i représente le nombre de tirages nécessaires après l'obtention de $(i-1)$ paires pour obtenir la i-ème paire.

   (b) Entre l'obtention de la $(i-1)$-ème paire et celle de la i-ème paire, il y a exactement $2(n-i+1)$ boules dans l'urne, et ces boules se répartissent en $(n-i+1)$ paires de boules portant le même numéro. Quitte à les renuméroter, on peut suppose que ces boules portent alors des numéros de 1 à $n-i+1$, et on retrouve la situation de la question 1 : $\boxed{X_i \text{ suit une loi } \mathscr{G}\left(\frac{1}{2(n-i)+1}\right)}$, et donc : $\boxed{E(X_i) = 2(n-i)+1.}$

   (c) On a :

$$T_n = X_n + T_{n-1} = X_n + X_{n-1} + T_{n-2} = \cdots = X_n + \cdots + X_2 + T_1 = X_n + \cdots + X_1.$$

   Puisque les variables X_i admettent une espérance, il en est de même de T_n par linéarité, et on a :

$$E(T_n) = \sum_{i=1}^{n} E(T_i) = \sum_{i=1}^{n} (2(n-i)+1) = 2n^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + n = 2n^2 - 2\frac{n(n+1)}{2} + n \boxed{= n^2.}$$

4. (a) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note B_i l'évènement « lors du i-ème tirage, les deux boules tirées portent des numéros distincts ». On a :

$$[S_n = 0] = B_1 \cap \cdots \cap B_n.$$

   Par la formule des probabilités composées, on a :

$$P(S_n = 0) = P(B_1) P_{B_1}(B_2) \ldots P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(B_n).$$

   Or si l'évènement $B_1 \cap \cdots \cap B_{i-1}$ est réalisé, la composition de l'urne lors du i-ème tirage est encore la même que lors du premier tirage, donc $P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{i-1}}(B_i) = P(A_1) = 1 - \frac{1}{2n-1}$. On en déduit que :

$$P(S_n = 0) = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) \boxed{= \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^n.}$$

   (b) Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^n$.

   Mise en garde.

   $1^\infty = \exp(\infty \times \ln(1))$ est une forme indéterminée. Si $u_n \to 1$ et $v_n \to +\infty$, alors pour étudier $\lim u_n^{v_n}$, on repasse par la forme exponentielle : $u_n^{v_n} = \exp(v_n \ln(u_n))$.

   On a $\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)\right)$. Comme de plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$, on a en utilisant l'équivalent $\ln(1-u) \underset{u \to 0}{\sim} -u$ que :

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) \sim n \times \left(-\frac{1}{2n-1}\right) \sim -\frac{n}{2n} = -\frac{1}{2}.$$

   Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) = -\frac{1}{2}$, et en composant **les limites** par la fonction exponentielle qui est continue, on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} P(S_n = 0) = \lim_{n \to +\infty} \exp\left(n\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)\right) = e^{-1/2} \boxed{= \frac{1}{\sqrt{e}}.}$$

Mise en garde.

On ne compose pas des équivalents par la fonction exponentielle (ou une autre d'ailleurs) : si $u_n \sim v_n$, on a $\exp(u_n) \nsim \exp(v_n)$ en général.

(c) Notons qu'on ne peut constituer au plus qu'une seule paire à chaque tirage. Donc pour avoir constitué n paires au n-ème tirage (c'est-à-dire pour réaliser l'événement $[S_n = n]$), il faut nécessairement avoir tiré une paire à chacun des n tirages. Ainsi, on a :

$$[S_n = n] = \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_n}.$$

Par la formule des probabilités composées, on a :

$$P(S_n = n) = P(\overline{B_1}) P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) \dots P_{\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{n-1}}}(\overline{B_n}).$$

Nous savons déjà que $P(\overline{B_1}) = \dfrac{1}{2n-1}$.

Pour $i \geq 2$, si l'événement $\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{i-1}}$ est réalisé, alors il reste $2n - 2(i-1) = 2(n-i+1)$ boules dans l'urne, formant $n - i + 1$ paires. Donc lors du i-ème tirage, il y a $\binom{2(n-i+1)}{2} = (n-i+1)(2n-2i+1)$ tirages possibles, tous équiprobables, dont $n-i+1$ réalisant l'événement $\overline{B_i}$. Ainsi, on a :

$$P_{\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{i-1}}}(\overline{B_i}) = \frac{n-i+1}{(n-i+1)(2n-2i+1)} = \frac{1}{2n-2i+1}.$$

On en déduit que :

$$P(S_n = n) = \frac{1}{2n-1} \times \frac{1}{2n-3} \times \cdots \times \frac{1}{1} = \frac{1}{(2n-1)(2n-3)\dots 1}.$$

En multipliant en haut et en bas par $2n \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2$, on a :

$$P(S_n = n) = \frac{2n \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2}{(2n)!} = \frac{2^n \times n \times \cdots \times 2 \times 1}{(2n)!} = \boxed{\frac{2^n n!}{(2n)!}}.$$

Problème (EML 2016)

Partie I :

1. Il s'agit de résoudre un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = I_3 \\ 4P_1 + 9P_2 = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5P_1 = 9I_3 - A \\ 5P_2 = A - 4I_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = \dfrac{1}{5}(9I_3 - A) \\ \\ P_2 = \dfrac{1}{5}(A - 4I_3) \end{cases}$$

On obtient : $\boxed{P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$

2. (a) On a $\boxed{P_1^2 = P_1,\ P_1P_2 = 0_3,\ P_2P_1 = 0_3 \text{ et } P_2^2 = P_2.}$

(b) Comme les matrices $4P_1$ et $9P_2$ **commutent**, la formule du binôme donne pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 4^i P_1^i 9^{k-i} P_2^{k-i} = 4^k P_1 + \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} 4^i 9^{k-i} P_1^i P_2^{k-i}}_{=0} + 9^k P_2 \boxed{= 4^k P_1 + 9^k P_2}$$

car en raison de 2(a) : $\forall i \geq 1, \forall j \geq 1, P_1^i = P_1$, $P_1^i P_2^j = 0$ et $P_2^j = P_2$.

3. Cherchons une telle matrice sous la forme $B = \lambda P_1 + \mu P_2$. On a alors :

$$B^2 = \lambda^2 P_1 + \lambda\mu P_1 P_2 = \lambda\mu P_2 P_1 + \mu^2 P_2^2 = \lambda^2 P_1 + \mu^2 P_2.$$

Si l'on prend par exemple[1] $\lambda = 2$ et $\mu = 3$, il vient :

$$B^2 = 2^2 P_1 + 3^2 P_2 = A.$$

Ainsi, $\boxed{B = 2P_1 + 3P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ convient.}}$

4. Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{4, 9\}.}$

Partie II : Étude des puissances de f

5. Soit $P = \sum_{i=0} m a_k x^k$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_m[x]$. Alors :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{m} a_k f^k = \sum_{k=0}^{m} a_k \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_i^k \right) p_i = \boxed{\sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i.}$$

6. On a $N(f) = \sum_{i=1}^{m} N(\lambda_i) p_i = \sum_{i=1}^{m} 0 p_i = \boxed{\tilde{0}}$ puisque les λ_i sont les racines de N.

7. (a) Soit $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$.
   - Si $i \neq j$, λ_j est une racine de M_i de sorte que $L_i(\lambda_j) = 0$ par définition de L_i.
   - Si $i = j$, $L_i(\lambda_j) = L_i(\lambda_i) = \dfrac{M_i(\lambda_i)}{M_i(\lambda_i)} = 1$.

   On obtient bien $\boxed{L_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}}$

   (b) Soit $i \in [\![1, m]\!]$. On a :

$$L_i(f) = \sum_{j=1}^{m} L_i(\lambda_j) p_j = L_i(\lambda_i) p_i + \underbrace{\sum_{j \neq i} L_i(\lambda_j) p_j}_{=\tilde{0}} = \boxed{p_i}$$

8. (a) Par hypothèse, on a :

$$e = f^0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 p_i = \boxed{\sum_{i=1}^{m} p_i}$$

[1] D'autres solutions sont possibles, par exemple $\lambda = 2$ et $\mu = -3$.

(b) Soit $x \in E$. Alors
$$x = e(x) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{p_i(x)}_{\in \operatorname{Im} p_i} \in \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im}(p_i).$$
Et donc $E \subset \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im}(p_i)$.

Les $\operatorname{Im}(p_i)$ étant des sous-espaces vectoriels de E, on a évidemment $\sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im}(p_i) \subset E$, et donc $\boxed{E = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im}(p_i).}$

9. (a) On a :
$$N = \prod_{\ell=1}^{m}(X-\lambda_\ell) = (X-\lambda_i)\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{m}(X-\lambda_\ell) = (X-\lambda_i)M_i = \boxed{(X-\lambda_i)M_i(\lambda_i)L_i.}$$

(b) Soit $x \in \operatorname{Im}(p_i)$. Alors il existe $z \in E$ tel que $x = p_i(z)$.
Et alors (en utilisant que $p_i = L_i(f)$ d'après 7.(b)) :
$$(f-\lambda_i e)(x) = (f-\lambda_i e)(p_i(z)) = ((f-\lambda_i e)\circ L_i(f))(z).$$
Mais d'après la question 9.(a), $(X-\lambda_i)L_i = \frac{1}{M_i(\lambda_i)}N$, de sorte que $(f-\lambda_i e)\circ L_i(f) = \frac{1}{M_i(\lambda_i)}N(f)$.
On en déduit donc que
$$(f-\lambda_i e)(x) = \frac{1}{M_i(\lambda_i)}N(f)(z) = \frac{1}{\lambda_i}0 = 0.$$
Ainsi, $x \in \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e)$ et donc $\boxed{\operatorname{Im}(p_i) \subset \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e).}$

10. Soit $x \in E$. Alors il existe $x_1 \in \operatorname{Im}(p_1), \dots, x_m \in \operatorname{Im}(p_n)$ tels que $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$.

Mais puisque $x_i \in \operatorname{Im}(p_i) \subset \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e)$, on en déduit que $x \in \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e)$.

Et donc $E = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e)$.

De plus, les $\operatorname{Ker}(f-\lambda_i e)$ ne sont pas réduits à $\{0\}$ car $\operatorname{Im}(p_i) \subset \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e)$, et les p_i sont tous non nuls. Ce sont donc des sous-espaces propres de f.

D'autre part, les sous-espaces propres de f sont en somme directe, donc $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e)$, de sorte que $\dim E = \sum_{i=1}^{m} \dim \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e)$. Comme de plus on a, comme toujours, $\dim E \geq \sum_{\lambda \in \operatorname{Spec}(f)} E_\lambda(f)$, f ne possède donc pas d'autres valeurs propres que les $\lambda_i, 1 \leq i \leq m$ et donc E est somme des sous-espaces propres de f : $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

Enfin, puisque $E = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im}(p_i)$, alors $\dim E \leq \sum_{i=1}^{m} \dim \operatorname{Im}(p_i)$.

Comme d'autre part, on a $\dim \operatorname{Im}(p_i) \leq \dim \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e)$ et $\sum_{i=1}^{m} \dim \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e) = \dim E$, on en déduit que :
$$\forall i \in [\![1, m]\!],\ \dim \operatorname{Im}(p_i) = \dim \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e).$$

Et puisque $\mathrm{Im}\,(p_i) \subset \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i e)$, ces deux sous-espaces vectoriels de E sont donc égaux :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, m]\!],\ E_{\lambda_i}(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i e) = \mathrm{Im}\,(p_i)\,.}$$

11. (a) Soit $x \in E$. Alors $p_j(x) \in \mathrm{Im}\,(p_j) \subset \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_j e)$, de sorte que $f\,(p_j(x)) = \lambda_j p_j(x)$.
Donc pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}[X], P(f)\,(p_j(x)) = P\,(\lambda_j) \cdot p_j(x)$.
En particulier, si $P = L_i$, il vient

$$p_i\,(p_j(x)) = L_i(f)\,(p_j(x)) = \underbrace{L_i\,(\lambda_j)}_{=0 \text{ car } i \neq j}\ p_j(x) = 0.$$

Et donc $\boxed{p_i \circ p_j = 0.}$

Remarque. Nous venons de prouver que p_i est un projecteur, d'image égale à $E_{\lambda_i}(f)$. La question précédente permettrait de prouver qu'on a également $\mathrm{Ker}\, p_i = \bigoplus\limits_{j \neq i} E_{\lambda_j}(f)$. Et donc p_i est la projection sur $E_{\lambda_i}(f)$ parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres. On parle de projecteur spectral.

(b) Le même raisonnement que précédemment prouve que pour tout $x \in E$,

$$p_i \circ p_i(x) = L_i\,(\lambda_i)\,p_i(x) = p_i(x)$$

et donc $\boxed{p_i \circ p_i = p_i.}$

(c) En combinant les résultats des deux questions précédentes, il vient

$$p_i \circ f = p_i \circ \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \underbrace{p_i \circ p_j}_{=0 \text{ si } i \neq j} = \boxed{\lambda_i p_i.}$$

12. Prouvons le résultat par récurrence sur k. La récurrence est déjà largement initialisée puisque par hypothèse, le résultat est vrai pour $k \in [\![0, m]\!]$.

Supposons donc que $f^k = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$. Alors

$$f^{k+1} = f \circ f^k = \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i\right) \circ f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i \circ f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \lambda_i p_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{k+1} p_i.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $k+1$, et par le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N},\ f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i.}$$

Enfin, si $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k x^k \in \mathbf{R}[x]$, alors, de même qu'à la question 5 , il vient :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k = \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda_i^k\right) p_i = \boxed{\sum_{i=1}^{m} P\,(\lambda_i)\,p_i.}$$

Partie III : Intervention de produit scalaire

13. Soient $x, y \in E$. Alors

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), p_i(y) \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(y), p_i(x) \rangle = \varphi(y,x).$$

Donc φ est symétrique.

Soient $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda x + y, z) &= \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(\lambda x + y), p_i(z) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle \lambda p_i(x) + p_i(y), p_i(z) \rangle \qquad \text{par lin. des } p_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda \langle p_i(x), p_i(z) \rangle + \langle p_i(y), p_i(z) \rangle \qquad \text{par lin. à gauche du prod. scal.} \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), p_i(z) \rangle + \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(y), p_i(z) \rangle = \lambda \varphi(x,z) + \varphi(y,z).
\end{aligned}$$

Ainsi φ est linéaire à gauche, et étant symétrique, elle est bilinéaire symétrique.

Soit $x \in E$. Alors $\varphi(x,x) = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), p_i(x) \rangle = \sum_{i=1}^{m} \|p_i(x)\|^2 \geq 0$.

De plus, une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ses termes est nul, donc

$$\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,m]\!], \|p_i(x)\|^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,m]\!], p_i(x) = 0.$$

Mais alors, d'après le résultat de la question 8.a, $x = e(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i(x) = 0$. Donc $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$ et la réciproque est toujours vérifiée.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est bien un produit scalaire sur } E.}$

14. Soient $x, y \in E$. Alors

$$\varphi(x, f(y)) = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), p_i(f(y)) \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), \lambda_i p_i(y) \rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle p_i(x), p_i(y) \rangle .$$

De même, on a $\varphi(f(x), y) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle p_i(x), p_i(y) \rangle$, donc $\varphi(f(x), y) = \varphi(x, f(y))$ et donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire } \varphi.}$

On retrouve ainsi le fait que $\boxed{f \text{ est un endomorphisme diagonalisable.}}$

15. Nous savons déjà que p_i est un projecteur d'après la question 11.(b), et c'est donc un projecteur sur $\operatorname{Im}(p_i)$. De plus, pour tous $x, y \in E$, on a

$$\varphi(p_i(x), y) = \sum_{j=1}^{m} \langle p_j(p_i(x)), p_i(y) \rangle = \langle p_i(x), p_i(y) \rangle .$$

De même, on a $\varphi(x, p_i(y)) = \langle p_i(x), p_i(y) \rangle$, et donc p_i est un endomorphisme symétrique. Mais nous savons qu'un projecteur est symétrique si et seulement si c'est un projecteur orthogonal, et donc $\boxed{p_i \text{ est le projecteur orthogonal sur } \operatorname{Im} p_i.}$