DM10

Correction du devoir maison type Maths 3 (facultatif)

Problème 1

Partie A

1. (a) Commencer par noter que $I_{a,b}$ est l'intégrale d'une fonction continue (elle est polynomiale) sur un segment. Donc cette intégrale est parfaitement définie.
Calculons $I_{a,0}$ pour tout $a \in \mathbb{N}$. On a immédiatement :

$$\forall a \in \mathbb{N},\ I_{a,0} = \int_0^1 x^a \mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}.$$

(b) Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{a+1}x^{a+1}$ et $x \mapsto (1-x)^b$ sont polynomiales donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Par intégration par parties sur un segment, on a:

$$\begin{aligned} I_{a,b} &= \left[\frac{1}{a+1}x^{a+1}(1-x)^b\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{a+1}x^{a+1}b(-1)(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x \\ &= 0 - 0 + \frac{b}{a+1}\int_0^1 x^{a+1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Ainsi : $\quad \forall (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ I_{a,b} = \frac{b}{a+1}I_{a+1,b-1}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on note $\mathcal{H}(k)$ la proposition : « $I_{n-k,k}, = \frac{(n-k)!\times k!}{(n+1)!}$ ». Montrons cette propriété par récurrence.

Init. Pour $k=0$, on sait déjà que :

$$I_{n,0} = \frac{1}{n+1} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!\,0!}{(n+1)!}$$

donc la proposition $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

Hér. Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$ tel que la proposition $\mathcal{H}(k)$ est vraie. Alors $n-(k+1) \in \mathbb{N}$ et $k+1 \in \mathbb{N}^*$, donc la question précédente assure que :

$$I_{n-(k+1),k+1} = \frac{k+1}{n-k}I_{n-k,k} = \frac{k+1}{n-k}\times\frac{(n-k)!\times k!}{(n+1)!} = \frac{(n-k-1)!\times(k+1)!}{(n+1)!}.$$

D'où la proposition $\mathcal{H}(k+1)$ vraie.

Par principe de récurrence, la proposition $\mathcal{H}(k)$ est vraie pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$. Pour $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, il reste à poser $n = a+b$ et $k = b \in [\![0,n]\!]$. On obtient :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \quad I_{a,b} = \frac{a!\times b!}{(a+b+1)!}.$$

(d) Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Montrons que $f_{a,b}$ est une densité de probabilité :

- $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ en tant que fonction polynomiale par morceaux ;
- $f_{a,b} \geq 0$ sur $\mathbb{R}$;
- Son intégrale est nulle en dehors de $[0,1]$ et :

$$\int_0^1 f_{a,b}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}x^a(1-x)^b\mathrm{d}x = \frac{1}{I_{a,b}}\int_0^1 x^a(1-x)^b\mathrm{d}x = \frac{1}{I_{a,b}}I_{a,b} = 1$$

Ainsi $f_{a,b}$ est une densité de probabilité pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{N}^2$.

2. (a) L'intégrale de $x \mapsto xf_{a,b}(x)$ étant nulle en dehors du segment $[0,1]$, et la fonction étant polynomiale sur $[0,1]$, il y a bien convergence absolue. Ainsi X admet une espérance. De plus :

$$E(X) = \frac{1}{I_{a,b}} \int_0^1 x^{a+1}(1-x)^b \mathrm{x} = \frac{1}{I_{a,b}} I_{a+1,b} = \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} \times \frac{(a+1)! \times b!}{(a+1+b+1)!}$$

Ainsi, $E(X) = \frac{a+1}{a+b+2}$.

(b) De même, X admet un moment d'ordre 2 donc X admet une variance. De plus :

$$E(X^2) = \frac{1}{I_{a,b}} I_{a+2,b} = \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} \times \frac{(a+2)! \times b!}{(a+2+b+1)!} = \frac{(a+2)(a+1)}{(a+b+3)(a+b+2)}$$

Par formule de Koenig-Huygens, on obtient :

$$\begin{aligned} V(X) = E(X^2) - E(X)^2 &= \frac{(a+2)(a+1)}{(a+b+3)(a+b+2)} - \left(\frac{a+1}{a+b+2}\right)^2 \\ &= \frac{a+1}{a+b+2}\left[\frac{a+2}{a+b+3} - \frac{a+1}{a+b+2}\right] = \frac{a+1}{a+b+2} \times \frac{(a+2)(a+b+2)-(a+1)(a+b+3)}{(a+b+3)(a+b+2)} \\ &= (a+1)\frac{a^2+ab+2a+2a+2b+4-a^2-ab-3a-a-b-3}{(a+b+3)(a+b+2)^2} \end{aligned}$$

Finalement, on obtient $V(X) = \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+3)(a+b+2)^2}$.

(c) La fonction est polynomiale par morceaux donc de classe $\mathscr{C}^1$ sauf, peut-être, en 0 et en 1. De plus :

$$F(0) = (a+b+1)! \sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{0^k(1-0)^{a+b+1-k}}{k!(a+b+1-k)!} = (a+b+1)! \sum_{k=a+1}^{a+b+1} 0 = 0.$$

Donc F est continue en 0 (la continuité à droite en 0 est évidente puisque la fonction est polynomiale sur $[0,1]$). De même :

$$F(1) = (a+b+1)! \sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{1^k(1-1)^{a+b+1-k}}{k!(a+b+1-k)!} = (a+b+1)! \left[\sum_{k=a+1}^{a+b} 0 + \frac{0^0}{(a+b+1)!0!}\right] = 1.$$

Donc F est continue en 1. Ainsi, F est continue sur $\mathbb{R}$.
Enfin, par dérivation, F' est nulle sur $]-\infty,0[$ et sur $]1,+\infty[$ donc égale à $f_{a,b}$ sur ces intervalle et, pour $x \in]0,1[$:

$$F(x) = (a+b+1)! \left[\frac{x^{a+b+1}}{(a+b+1)!} + \sum_{k=a+1}^{a+b} \frac{x^k(1-x)^{a+b+1-k}}{k!(a+b+1-k)!}\right].$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= (a+b+1)! \left[\frac{x^{a+b}}{(a+b)!} + \sum_{k=a+1}^{a+b} \frac{kx^{k-1}(1-x)^{a+b+1-k} - (a+b+1-k)x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b+1-k)!}\right] \\ &= (a+b+1)! \left[\frac{x^{a+b}}{(a+b)!} + \sum_{k=a+1}^{a+b} \left(\frac{x^{k-1}(1-x)^{a+b-(k-1)}}{(k-1)!(a+b-(k-1))!} - \frac{x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b-k)!}\right)\right] \\ &= (a+b+1)! \left[\frac{x^{a+b}}{(a+b)!} + \frac{x^a(1-x)^b}{a!b!} - \frac{x^{a+b}}{(a+b)!}\right] = \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} x^a(1-x)^b = f_{a,b}(x). \end{aligned}$$

par télescopage. On peut donc conclure que F est la fonction de répartition de X.

Partie B

3. Chacun des n tirages peut amener ou non une nouvelle boule rouge donc $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

4. (a) On a une probabilité de $\frac{x}{x+y}$ de tirer une boule rouge. Donc le programme doit retourner 0 avec une probabilité $\frac{x}{x+y}$. Il faut donc que la condition soit satisfaite avec cette probabilité. On va pour cela prendre comme condition $r \leq \dfrac{x}{x+y}$ qui est satisfaite avec une probabilité de $P(R \leq \frac{x}{x+y}) \underset{\frac{x}{x+y}\in[0,1]}{=} \frac{x}{x+y}$ où $R \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$.

```python
def tirage(x,y):
    r = rd.random()
    if r <= x/(x+y) :
        res = 0
    else :
        res = 1
    return res
```

(b) Si $r = 0$ alors on ajoute une rouge sinon on ajoute une blanche, d'où `x = x+1` ou `y = y+1` ; le nombre de rouges ajoutées est donc la différence entre le nombre de boules rouges x au final et le nombre de boules rouges a au départ, soit `Xn = x-a`. Ainsi :

```python
def experience(a,b,n):
    x = a
    y = b
    for k in range(n):
        r = tirage(x,y)
        if r == 0 :
            x = x+1 #on a tiré une boule rouge
        else :
            y = y+1 #on a tiré une boule blanche
    Xn = x-a
    return Xn
```

(c) On va stocker (une approximation de) la loi de X_n dans la variable `loi`. Commençons par noter que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$, et qu'il nous faut une approximation des probabilités $P(X_n = k)$ pour tout $k = 0, \dots, n$. L'idée est habituelle : on répète l'expérience un grand nombre de fois (ici `m` fois), et on observe la fréquence de chaque issue, qui donnera une approximation de la probabilité théorique. On la stocke alors dans la k-ème composante `loi[k]` du vecteur `loi`. On renvoie alors ce vecteur.

Voici comment on va procéder plus concrètement :

- On initialise la variable `loi` en lui affectant un vecteur avec que des 0 à $n+1$ composantes (numérotées de 0 à n), à l'aide de la commande `loi = np.zeros(n+1)`.
- On répète l'expérience `m` fois à l'aide d'une boucle `for`. Pour chaque résultat `r = experience(a,b,n)` de l'expérience, on ajoute 1 à la r-ème composante du vecteur `loi`.
  Ainsi, à l'issue de la boucle `for`, le vecteur `loi` contient en k-ème composante, le nombre d'expériences (parmi les `m` effectuées) renvoyant l'issue `k`, c'est-à-dire le nombre d'expériences pour lesquelles k boules rouges ont été ajoutées à l'urne.
- Il reste alors à diviser par `m` le vecteur `loi` pour obtenir la fréquence de chaque issue, et donc une approximation de $P(X_n = k)$.

Voici une possibilité de programme :

```python
def simulation(a,b,n,m):
    loi = np.zeros(n+1) # initialisation
    for k in range(m):
        r = experience(a,b,n) # on effectue l'expérience
        loi[r] = loi[r]+1 # +1 à l'effectif de l'issue r
    loi = loi/m # pour obtenir les fréquences
    return loi
```

5. (a) La distribution des fréquences semble équiprobable. On peut conjecturer que $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$.

   (b) On a $[X_1 = 1] = R_1$ donc $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$, et $P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$. Donc $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, 1 \rrbracket)$.

   (c) Comme $a = 1$ et $b = 1$ alors, sachant que $[X_n = k]$ est réalisé, l'urne contient $1 + k$ boules rouges et $1 + n - k$ boules blanches avant le tirage $n + 1$. Ainsi :
$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = P_{[X_n=k]}(\overline{R_{n+1}}) = \frac{1 + n - k}{2 + n}.$$
$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k + 1) = P_{[X_n=k]}(R_{n+1}) = \frac{1 + k}{2 + n}.$$
$$\forall \ell \notin \{k, k + 1\}\,,\ P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = \ell) = 0.$$

   (d) Soit $\mathcal{H}(n)$ la proposition : « $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$ ».
   Montrons cette propriété par récurrence.

   Init. On a vu à la question 5.(b) que la proposition $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

   Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la proposition $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Soit $\ell \in \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$. Par formule des probabilités totales avec le système complet $([X_n = k])_{k\in\llbracket 0,n\rrbracket}$ et avec la question 5.(c) :
$$P(X_{n+1} = \ell) = \sum_{i=0}^{n} P(X_n = k)P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = \ell) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = \ell)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{n+1}P_{[X_n=n]}(X_{n+1} = n + 1) & \text{si } \ell = n + 1 \\ \frac{1}{n+1}\left(P_{[X_n=\ell]}(X_{n+1} = \ell) + P_{[X_n=\ell-1]}(X_{n+1} = \ell\right) & \text{si } 1 \leqslant \ell \leqslant n \\ \frac{1}{n+1}P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0) & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{n+1} \times \frac{1+n}{2+n} & \text{si } \ell = n + 1 \\ \frac{1}{n+1}\left(\frac{1+n-\ell}{2+n} + \frac{1+\ell-1}{2+n}\right) & \text{si } 1 \leqslant \ell \leqslant n \\ \frac{1}{n+1} \times \frac{1+n}{2+n} & \text{si } \ell = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{n+2} & \text{si } \ell = n + 1 \\ \frac{1}{n+2} & \text{si } 1 \leqslant \ell \leqslant n \\ \frac{1}{n+2} & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$$
   Donc $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n + 1 \rrbracket)$ c'est-à -dire que la proposition $\mathcal{H}(n + 1)$ est vraie.

   Par principe de récurrence, on a donc montré que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket).$$

6. On revient au cas général où a et b sont deux entiers strictement positifs.

   (a) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Notons p_n la probabilité demandée. La formule des probabilités composées donne :
$$p_n = P(R_1)P_{R_1}(R_2)\dots P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_k}(\overline{R_{k+1}})\dots P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_k\cap\overline{R_{k+1}}\cap\overline{R_{k+2}}\cap\cdots\cap\overline{R_{n-1}}}(\overline{R_n})$$
$$= \frac{a}{a+b} \times \frac{a+1}{a+b+1} \times \cdots \times \frac{a+k-1}{a+b+k-1} \times \frac{b}{a+b+k} \times \frac{b+1}{a+b+k+1} \times \cdots \times \frac{b+n-k-1}{a+b+n-1}$$
   donc :
$$P(R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_k\cap\overline{R_{k+1}}\cap\overline{R_{k+2}}\cap\cdots\cap\overline{R_n}) = \frac{(a+k-1)! \times (b+n-k-1)! \times (a+b-1)!}{(a-1)! \times (b-1)! \times (a+b+n-1)!}$$

   On notera que ce résultat est encore valable lorsque $k = 0$.

(b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Les produits commutent dans les fractions des calculs ci-dessus donc le résultat est indépendant de l'ordre des R_k et $\overline{R_i}$, et dépend seulement du nombre de chacun d'entre d'eux. Justement, pour calculer $P(X_n = k)$, il convient de dénombrer les possibilités d'ordre pour obtenir k nouvelles boules rouges et $n-k$ nouvelles boules blanches puisque l'on vient de calculer la probabilité commune d'obtenir l'un de ces ordres. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de positionner les k boules rouges parmi les rangs de tirages $1, \dots, n$. On peut donc conclure que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}.$$

(c) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \frac{n!(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(n-k)!k!(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!} \\ &= \frac{(a+k-1)!}{k!(a-1)!} \times \frac{(b+n-k-1)!}{(n-k)!(b-1)!} \times \frac{n!(a+b-1)!}{(a+b+n-1)!} \end{aligned}$$

On a donc : $\quad \forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X_n = k) = \dfrac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}.$

(d) Par théorème de transfert :

$$E(a + X_n) = \sum_{k=0}^{n} (a+k) P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n} (a+k) \frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}$$

Par formules sur les coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned} E(a + X_n) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a\binom{a+k}{a}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\frac{a+b}{a+b+n}\binom{a+b+n}{a+b}} = \frac{a(a+b+n)}{a+b} \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{a+k}{a}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n}{a+b}} \\ &= \frac{a(a+b+n)}{a+b} \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{(a+1)+k-1}{(a+1)-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{(a+1)+b+n-1}{(a+1)+b-1}} \end{aligned}$$

La dernière somme écrite correspond à la somme des probabilités des événements du système complet $([X_n = k])_{k \in [\![0,n]\!]}$ avec $a+1$ boules rouges et b boules blanches initialement. On peut donc conclure que :

$$E(a + X_n) = \frac{a(a+b+n)}{a+b}.$$

Par linéarité de l'espérance, on en déduit que :

$$a + E(X_n) = \frac{a(a+b+n)}{a+b} \quad \text{donc} \quad E(X_n) = \frac{a(a+b+n)}{a+b} - \frac{a(a+b)}{a+b}.$$

On peut donc conclure que $E(X_n) = \dfrac{na}{a+b}$.

Partie C

7. (a) Soit $x < 0$. On a: $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(X_n \leqslant nx)$. Comme $nx < 0 = \min(X_n(\Omega))$, on en déduit que :

$$\forall x < 0, \quad F_n(x) = 0.$$

(b) Soit $x \geqslant 1$. On a :

$$F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(X_n \leqslant nx).$$

Comme $nx \geqslant n = \max(X_n(\Omega))$, on en déduit que

$$\forall x \geqslant 0, \quad F_n(x) = 1.$$

8. (a) On a déjà vu que $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(X_n \leqslant nx)$. Comme $\lfloor nx \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à nx, comme $0 < nx < n$ et comme X_n ne prend que des valeurs entières comprises entre 0 et n alors
$$F_n(x) = P(X_n \leqslant \lfloor nx \rfloor).$$

(b) On en déduit que :
$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} = \frac{1}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}$$
On applique alors la formule proposée en introduction de cette partie avec $p = a + \lfloor nx \rfloor$ ce qui donne bien $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant a$ et $p \leqslant a + n \leqslant a + b + n - 1$ puisque $b > 0$. Ainsi :
$$F_n(x) = \frac{1}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{a + \lfloor nx \rfloor}{i}\binom{a+b+n-1-a+\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i}.$$

(c) Soit $j \in \mathbb{N}$ fixé. Pour $m \geqslant j$, on a :
$$\binom{m}{j} = \frac{m(m-1)\dots(m-j+1)}{j!} \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{m \times m \times \dots \times m}{j!}.$$
Ainsi, on a l'équivalent :
$$\forall j \in \mathbb{N},\ \binom{m}{j} \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{m^j}{j!}.$$

(d) Comme $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$ alors $1 - \frac{1}{nx} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{nx} \leqslant 1$. Par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{nx}$ existe et vaut 1, ce qui se récrit $\lfloor nx \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} nx$.

De même avec $1 - x > 0$:
$$n(1-x) \leqslant \lfloor n - nx \rfloor = n - \lfloor nx \rfloor < n(1-x) + 1.$$
D'où l'encadrement :
$$1 \leqslant \frac{n - \lfloor nx \rfloor}{n(1-x)} < 1 + \frac{1}{n(1-x)}.$$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n - \lfloor nx \rfloor}{n(1-x)} = 1$, on en déduit par théorème des gendarmes l'équivalent
$$n - \lfloor nx \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} n(1-x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$
Alors, pour tout entier $i \in [\![a, a+b-1]\!]$, d'après la question précédente, on a :
$$\begin{aligned}\frac{\binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i}\binom{a+b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lfloor nx \rfloor^i}{i!} \times \frac{(n - \lfloor nx \rfloor)^{a+b-1-i}}{(a+b-1-i)!} \times \frac{(a+b-1)!}{n^{a+b-1}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(a+b-1)!}{i!(a+b-1-i)!} \times \frac{n^i x^i \times n^{a+b-1-i}(1-x)^{a+b-1-i}}{n^{a+b-1}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \binom{a+b-1}{i} x^i (1-x)^{a+b-1-i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \binom{a+b-1}{i} x^i (1-x)^{a+b-1-i}\end{aligned}$$
Par somme des limites réelles, on en conclut que :
$$\forall x \in \,]0,1[\,,\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{i} x^i (1-x)^{a+b-1-i}.$$

9. On a :
$$F_n(0) = P(X_n \leqslant 0) = P(X_n = 0) = \frac{\binom{a+0-1}{a-1}\binom{b+n-0-1}{b-1}}{\binom{a+b-1+n}{a+b-1}} = \frac{\binom{b-1+n}{b-1}}{\binom{a+b-1+n}{a+b-1}}$$
$$F_n(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{b-1}}{(b-1)!} \times \frac{(a+b-1)!}{n^{a+b-1}} = \frac{(a+b-1)!}{(b-1)!} \times \frac{1}{n^a}$$
Comme $a > 0$ alors : $F_n(0) = \frac{\binom{b-1+n}{b-1}}{\binom{a+b-1+n}{a+b-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

10. On en déduit que :
$$F_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{i} x^i (1-x)^{a+b-1-i} & \text{si } x \in \,]0,1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{i=a}^{(a-1)+(b-1)+1} \binom{(a-1)+(b-1)+1}{i} x^i (1-x)^{(a-1)+(b-1)+1-i} & \text{si } x \in \,]0,1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$
On reconnaît la fonction de répartition F définie en partie A (en 0, c'est la même valeur) avec les paramètres $a-1$ et $b-1$ en lieux et places respectives de a et b. On peut donc conclure que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\beta(a-1, b-1)$.

11. Par linéarité de l'espérance :
$$E(Y_n) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{n} \times \frac{na}{a+b} = \frac{a}{a+b}$$
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n) = \dfrac{a}{a+b}$.
Or l'espérance de la loi $\beta(a-1, b-1)$ vaut $\frac{(a-1)+1}{(a-1)+(b-1)+2}$ d'après la question 2.(a) donc :
$$E\left(\beta(a-1, b-1)\right) = \frac{a}{a+b}.$$
En conclusion, la convergence en loi conserve l'espérance dans cette situation (la limite de l'espérance est l'espérance de la limite, ce résultat n'est pas toujours vrai).

Problème 2

Partie I. Deux exemples

1. Calculons :
$$(R_\theta)^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = I_2.$$
Or, pour $\theta, \theta' \in]0, \pi[$, on a $\sin\theta \neq \sin\theta'$ et donc $R_\theta \neq R_{\theta'}$. Ainsi, il existe une infinité de matrices deux à deux distinctes de la forme R_θ. Toutes sont des racines carrées de I_2 et donc I_2 admet une infinité de racines carrées.

2. Supposons par l'absurde que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une racine carrée de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+cb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par identification des coefficients, on obtient $c(a+d) = 0$.

Puisque $b(a+d) = 1$, nécessairement $a+d \neq 0$ et donc $c = 0$.

Mais alors $a^2 = 0$ et $d^2 = 0$, donc $a = d = 0$, ce qui contredit $a+d \neq 0$.

Donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

Partie II. Racines carrées d'une matrice de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente

3. On a $\sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2}$ et donc
$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{t^2}{2!} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{t^3}{3!} + o\left(t^3\right) = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{1}{16}t^3 + o\left(t^3\right)$.

4. Calculons $1 + x - \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right)^2$:

$$1 + x - \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16}x^3\right)^2 = 1 + x - \left(1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{256} + x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^5}{64}\right)$$
$$= -\frac{5}{64}x^4 + \frac{x^5}{64} - \frac{x^6}{256} = x^4\left(-\frac{5}{64} + \frac{x}{64} - \frac{x^2}{256}\right).$$

Ainsi, si on pose $Q(x) = \left(-\frac{5}{64} + \frac{x}{64} - \frac{x^2}{256}\right) \in \mathbb{R}[x]$, on a bien

$$1 + x = \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right)^2 + x^4Q(x).$$

5. Si $N^4 = 0$, alors

$$I_n + N = \left(I_n + \frac{N}{2} - \frac{N^2}{8} + \frac{1}{16}N^3\right)^2 + \underbrace{N^4Q(N)}_{=0}$$

Et donc une racine carrée de $I_n + N$ est $I_n + \frac{N}{2} - \frac{N^2}{8} + \frac{1}{16}N^3$.

Partie III. Racines carrées d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres strictement positives et deux à deux distinctes

6. (a) Soit $\lambda \in \operatorname{Spec}(f)$, et soit $x \in E_\lambda(f)$. Alors

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

Ainsi, $g(x)$ appartient à $E_\lambda(f)$, et $E_\lambda(f)$ est stable par g.

(b) Notons que par hypothèse, f possède n valeurs propres distinctes, donc ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.
Soit x un vecteur propre de f, et soit λ la valeur propre associée. Puisque x est non nul (en tant que vecteur propre) et que $\dim E_\lambda(f) = 1$, il suit que $E_\lambda(f) = \operatorname{Vect}(x)$.
De plus, nous avons prouvé à la question précédente que $g(x) \in E_\lambda(f) = \operatorname{Vect}(x)$. Et donc il existe un réel μ tel que $g(x) = \mu \cdot x$. x apparait comme un vecteur propre de g pour la valeur propre μ. Ainsi, tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.

(c) f est diagonalisable car il possède n valeurs propres distinctes.

Si $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f, alors par la question précédente, c'est aussi une base de vecteurs propres de g. Et donc la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale.

Puisque f est diagonalisable, une telle base $\mathscr{B}$ existe, et donc la matrice de g dans cette base est diagonale : g est diagonalisable.

7. (a) A possède n valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable : il existe une matrice Q inversible et une matrice D diagonale telles que $A = Q^{-1}DQ$. Et si l'on pose $P = Q^{-1}$, alors $A = PDP^{-1}$ et donc $P^{-1}AP = D$ est diagonale.

(b) Notons $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, de sorte que les λ_i sont les valeurs propres de A, et donc sont strictement positifs par hypothèse.

Soit $D_1 = \operatorname{Diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right)$. Alors

$$\left(PD_1P^{-1}\right) = PD_1^2P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

(c) Si R est une racine carrée de A, alors $A = R^2$, et donc A est un polynôme en R, qui commute donc avec R.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A, et soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est R.

Alors f possède n valeurs propres distinctes et f et g commutent car A et R commutent. Soit $\mathscr{B}$ la base de $\mathbb{R}^n$ telle que P soit la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}$. Alors, par la formule de changement de base,

$$P^{-1}AP = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_{can}} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) P_{\mathscr{B}_{can},\mathscr{B}} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$$

Et donc la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale : $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f. Et donc par la question 6.(c), $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ est diagonale.

Or, $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = P^{-1}RP$: $P^{-1}RP$ est une matrice diagonale.

(d) Si R est une racine carrée de A, alors

$$\left(P^{-1}RP\right)^2 = P^{-1}R^2P = P^{-1}AP = D.$$

De plus, $P^{-1}RP$ est une matrice diagonale, donc de la forme $\operatorname{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

On en déduit que $\operatorname{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)^2 = \operatorname{Diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2) = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Et donc $\mu_1^2 = \lambda_1, \dots, \mu_n^2 = \lambda_n$. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mu_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$.

Inversement, il est facile de vérifier que toute matrice de la forme $P \operatorname{Diag}(a_1, \dots, a_n) P^{-1}$, avec $a_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$ est une racine carrée de A.

Et donc A admet exactement 2^n racines carrées.

Partie IV. Racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

8. Soit λ une valeur propre de S et soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Alors

$$^tXSX = {}^tX(SX) = {}^tX\lambda X = \lambda {}^tXX.$$

Mais si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors ${}^tXX = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geqslant 0$. Puisque X est non nul, l'un au moins des x_i est non nul et donc ${}^tXX > 0$.

D'autre part, puisque S est une matrice symétrique positive, on sait que ${}^tXSX \geqslant 0$.

On en déduit que $\lambda = \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} \geqslant 0$.

Et donc toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

9. Puisque S est symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormée : il existe P orthogonale telle que $P^{-1}SP$ soit diagonale.

10. Notons $D = \text{Diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, de sorte que les λ_i sont les valeurs propres de S.

Posons alors $D_1 = \text{Diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ et $R = P^{-1}D_1P$.

Alors, $R^2 = P^{-1}D_1^2P = P^{-1}DP = S$ et

$$ {}^tR = {}^t\left(P^{-1}D_1P\right) = {}^tP{}^tD_1{}^tP^{-1} = {}^tPD_1{}^tP^{-1}. $$

Puisque P est orthogonale, on a $P^{-1} = {}^tP$ et donc ${}^tP^{-1} = {}^t\left({}^tP\right) = P$ de sorte que ${}^tR = P^{-1}D_1P = R$. Ainsi, R est symétrique, et c'est donc une racine carrée de S symétrique. Enfin, notons $X_1, \dots, X_n$ une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de R, telle que $RX_i = \sqrt{\lambda_i}X_i$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il existe des réels $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que $X = \sum_{i=1}^n \mu_i X_i$. Alors

$$ {}^tXRX = \left(\sum_{i=1}^n \mu_i{}^tX_i\right) R \left(\sum_{j=1}^n \mu_jX_j\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \mu_i\mu_j{}^tX_i\,(RX_j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \mu_i\mu_j\lambda_j{}^tX_iX_j. $$

Or, $(X_1, \dots, X_n)$ étant orthonormée, on a ${}^tX_iX_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

Et donc ${}^tXRX = \sum_{i=1}^n \lambda_i\mu_i^2 \underbrace{{}^tX_iX_i}_{=\|X_i\|^2 \geqslant 0} \geqslant 0$.

Ceci prouve donc que R est une matrice symétrique positive. Et donc S admet une racine carrée symétrique positive.

11. (a) Soit X un vecteur propre de R associé à la valeur propre λ. Alors $RX = \lambda X$, de sorte que

$$ SX = R^2X = R(RX) = R(\lambda X) = \lambda RX = \lambda^2 X. $$

Donc X^2 est valeur propre de S. De plus, pour tout $X \in \text{SEP}(R, \lambda)$, on a $SX = \lambda^2X$, de sorte que $X \in \text{SEP}\left(S, \lambda^2\right)$.

On a donc bien $\text{SEP}(R, \lambda) \subset \text{SEP}\left(S, \lambda^2\right)$.

(b) Notons que les $\text{SEP}\,(R, \lambda_i)$ sont en somme directe car R est symétrique, donc ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux et donc en somme directe.

Il en est de même pour les $\text{SEP}\left(S, \lambda_i^2\right)$, car les λ_i étant positifs et deux à distincts, il en est de même de λ_i^2.

Enfin, si $x \in \bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}\,(R, \lambda_i)$, alors il existe $x_1 \in \text{SEP}\,(R, \lambda_1)\,, \dots, x_p \in \text{SEP}\,(R, \lambda_p)$ tels que $x = x_1 + \dots + x_p$. Mais alors

$$ x = \underbrace{x_1}_{\in \text{SEP}\left(S, \lambda_1^2\right)} + \dots + \underbrace{x_p}_{\in \text{SEP}\left(S, \lambda_p^2\right)} \in \bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}\left(S, \lambda_i^2\right) $$

Et donc

$$ \bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}\,(R, \lambda_i) \subset \bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}\left(S, \lambda_i^2\right) $$

(c) La dimension d'une somme directe de sous-espaces vectoriels est la somme des dimensions, donc

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} EP\left(R,\lambda_i\right)\right) \leqslant \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}\left(S,\lambda_i^2\right)\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}\left(R,\lambda_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}\left(S,\lambda_i^2\right).$$

De plus, R est diagonalisable car symétrique réelle, et donc

$$\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}\left(R,\lambda_i\right) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}\left(R,\lambda_i\right) = n$$

Enfin, $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}\left(S,\lambda_i^2\right) \subset \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc $\sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}\left(S,\lambda_i^2\right) \leqslant n$. Ainsi

$$n \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}\left(R,\lambda_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}\left(S,\lambda_i^2\right) \leqslant n$$

(d) Les inégalités de la question précédente sont nécessairement des égalités, et donc

$$\sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}\left(R,\lambda_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}\left(S,\lambda_i^2\right) = n$$

Puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres de S doit être égale à n, les $\mathrm{SEP}\left(S,\lambda_i^2\right), 1 \leqslant i \leqslant p$ sont les seuls sous-espaces propres de S, et donc $\lambda_1^2,\ldots,\lambda_p^2$ sont les seules valeurs propres de S.
Puisque $\forall i \in [\![1,p]\!]$, on a $\dim \mathrm{SEP}\left(R,\lambda_i\right) \leqslant \dim \mathrm{SEP}\left(S,\lambda_i^2\right)$, on en déduit que

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \quad \dim \mathrm{SEP}\left(R,\lambda_i\right) = \dim \mathrm{SEP}\left(S,\lambda_i^2\right)$$

et donc

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \quad \mathrm{SEP}\left(R,\lambda_i\right) = \mathrm{SEP}\left(S,\lambda_i^2\right).$$

(e) P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à une base $\mathscr{B}$, orthonormée, et formée de vecteurs propres de S. Elle est donc également formée de vecteurs propres de R. Si f est l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique est R, alors $P^{-1}RP$ est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$, qui est formée de vecteurs propres : c'est une matrice diagonale : $P^{-1}RP$ est diagonale.

(f) D'après ce qui précède, $P^{-1}RP$ est diagonale, à coefficients diagonaux positifs, et $\left(P^{-1}RP\right)^2 = P^{-1}R^2P = P^{-1}SP = D$. Donc si $D = \mathrm{Diag}\left(a_1,\ldots,a_n\right)$, nécessairement

$$P^{-1}RP = \mathrm{Diag}\left(\sqrt{a_1},\ldots,\sqrt{a_n}\right).$$

Et donc

$$R = P\,\mathrm{Diag}\left(\sqrt{a_1},\ldots,\sqrt{a_n}\right)P^{-1}.$$

Ainsi, il existe au plus une racine carrée de S qui soit symétrique positive, et nous avons déjà prouvé à la question 10 qu'il en existe une : S possède une unique racine carrée symétrique positive.