DM10

Devoir Maison type Maths 3 (facultatif)

Problème 1

Partie A

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on note $I_{a,b}$ le réel défini par :

$$I_{a,b} = \int_0^1 x^a(1-x)^b dx$$

et on note $f_{a,b}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(x) = \begin{cases} \dfrac{(a+b+1)!}{a! \times b!} x^a(1-x)^b & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

1. (a) Calculer $I_{a,0}$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.

   (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

   $$\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad I_{a,b} = \frac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}$$

   (c) En déduire que :

   $$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \quad I_{a,b} = \frac{a! \times b!}{(a+b+1)!}$$

   (d) Justifier que pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

2. Dans toute la suite de cette partie, on fixe $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et on considère une variable aléatoire réelle X admettant $f_{a,b}$ pour densité. On dit que X **suit la loi *beta* de paramètres** a **et** b.

   (a) Montrer que X admet une espérance et que :

   $$E(X) = \frac{a+1}{a+b+2}$$

   (b) Montrer que X admet une variance et que :

   $$V(X) = \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+3)(a+b+2)^2}$$

   (c) Soit F la fonction définie par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (a+b+1)! \displaystyle\sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{x^k(1-x)^{a+b+1-k}}{k!(a+b+1-k)!} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   Montrer que F est la fonction de répartition de X.

Partie B

Soient a, b deux entiers strictement positifs. Une urne contient initialement a boules rouges et b boules blanches. On effectue une succession d'épreuves, chaque épreuve étant constituée des trois étapes suivantes :

- on pioche une boule au hasard dans l'urne,
- on replace la boule tirée dans l'urne,
- on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle qui vient d'être piochée

Après n épreuves, l'urne contient donc $a + b + n$ boules.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges qui ont été **ajoutées** dans l'urne (par rapport à la composition initiale) à l'issue des n premières épreuves.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera R_n l'événement "on pioche une boule rouge au n-ième tirage".

3. Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X_n en fonction de n.

4. On souhaite simuler l'expérience grâce à `Python`.

   (a) Compléter la fonction suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant x boules rouges et y boules blanches et qui retourne la valeur 0 si la boule est rouge et 1 si elle est blanche.

```python
def tirage(x,y):
    r = rd.random()
    if ........... :
        res = 0
    else :
        res = 1
    return res
```

   (b) Compléter la fonction suivante, qui simule n tirages successifs dans une urne contenant initialement a boules rouges et b boules blanches (selon le protocole décrit ci-dessus) et qui retourne la valeur de X_n :

```python
def experience(a,b,n):
    x = a
    y = b
    for k in range(n):
        r = tirage(x,y)
        if r == 0 :
            x = .........
        else :
            ............
    Xn = .........
    return Xn
```

   (c) Écrire une fonction `simulation(a,b,n,m)` qui fait appel `m` fois à la fonction précédente pour estimer la loi de X_n. Le paramètre de sortie sera un vecteur à $n+1$ composantes contenant les approximations de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1), \dots, P(X_n = n)$.

5. On s'intéresse au cas où $a = b = 1$. On rappelle les commandes suivantes :

   - Si `x` et `y` sont des vecteurs de même taille, `plt.bar(x,y)` trace le diagramme en bâtons d'abscisses contenues dans `x` et d'ordonnées dans `y`.

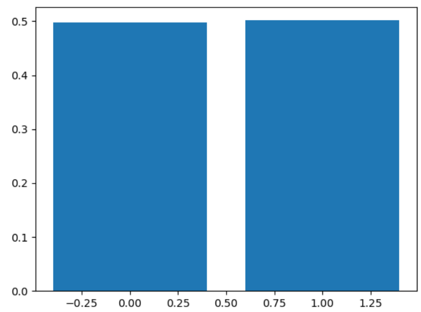
- `plt.figure(n)` ouvre une fenêtre graphique et trace la figure `n` dans celle-ci.

On exécute le code suivant :

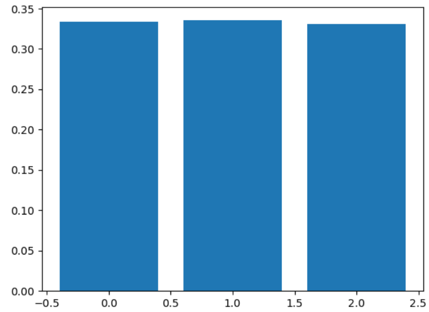
```
for n in range(1,6):
    x = np.arange(n+1)
    y = simulation(1,1,n,100000)
    plt.figure(n)
    plt.bar(x,y)
plt.show()
```

On obtient les figures suivantes :

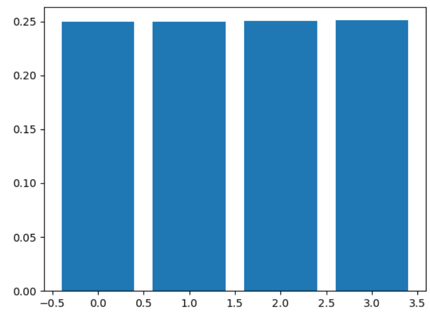
`Figure 1`



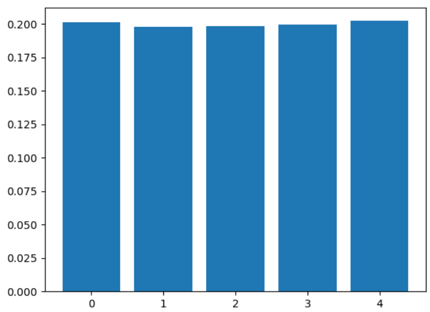
`Figure 2`



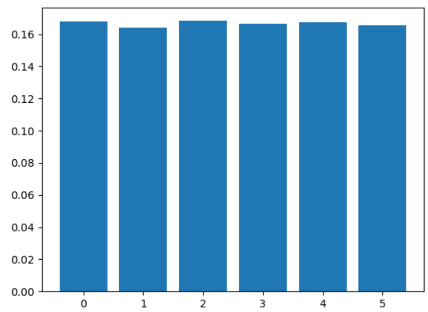
`Figure 3`



`Figure 4`



`Figure 5`



(a) À l'aide de ces résultats, conjecturer la loi de X_n.

(b) Déterminer la loi de X_1.

(c) Soient k et n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k+1), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=\ell) \quad \text{avec } \ell \notin \{k, k+1\}$$

(d) En raisonnant par récurrence sur n, prouver la conjecture émise au 5(a).

6. On revient au cas général où a et b sont deux entiers strictement positifs.

(a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Calculer la probabilité suivante :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \cap \overline{R_{k+2}} \cap \cdots \cap \overline{R_n})$$

(b) Justifier alors que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ P(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}$$

(c) En déduire que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X_n = k) = \frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}$$

(d) Calculer $E(a + X_n)$, puis en déduire que : $E(X_n) = \dfrac{na}{a+b}$

Partie C

On admettra dans cette partie que si a, b et n sont trois entiers strictement positifs, alors pour tout entier naturel $p \in [\![a, a+b+n-1]\!]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{p-a} \binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1} = \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{p}{i}\binom{a+b+n-1-p}{a+b-1-i}$$

On reprend pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire X_n étudiée dans la partie précédente, et on note $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.
On note F_n la fonction de répartition de Y_n.

7. (a) Soit $x < 0$. Que vaut $F_n(x)$?
   (b) Soit $x \geqslant 1$. Que vaut $F_n(x)$?
8. On fixe $x \in]0, 1[$. Pour tout réel y, on note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière de y, c'est-à-dire le plus grand entier m tel que $m \leqslant y$. On rappelle qu'alors on a $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y$.
   (a) Justifier que $F_n(x) = P(X_n \leqslant \lfloor nx \rfloor)$.
   (b) A l'aide de la formule sommatoire admise en début de la partie C, prouver que :
   $$F_n(x) = \frac{\sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i}\binom{b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}$$
   (c) Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé, déterminer un équivalent simple de $\binom{m}{j}$ lorsque m tend vers $+\infty$.
   (d) Déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ (On obtiendra un résultat sous forme d'une somme qu'on ne tentera pas de calculer).
9. Déterminer $F_n(0)$ puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.
10. Déduire de ce qui précède que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi Beta dont on explicitera les paramètres.
11. A l'aide du résultat de la question 6(d) de la partie B, déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $E(Y_n)$ et commenter ce résultat à la lumière de la question précédente.

Problème 2

Notations et définitions
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

- La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée 0_n.
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est nilpotente s'il existe un entier naturel non nul p tel que $M^p = 0_n$.
- Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de M. On note $\mathrm{SEP}(M, \lambda)$ le sous-espace propre de M associé à λ.
- On dit qu'une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive lorsqu'elle est symétrique et vérifie :
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ {}^tXSX \geq 0.$$
- Soient $A, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que R est une racine carrée de A lorsqu'elle vérifie $R^2 = A$.

Le but de ce problème est d'étudier la notion de racine carrée d'une matrices dans quelques cas particuliers.

Partie I. Deux exemples

1. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.
   Calculer $(R_\theta)^2$ et en déduire que la matrice I_2 admet une infinité de racines carrées.
2. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

Partie II. Racines carrées d'une matrice de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente

1. Donner le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de $t \longmapsto \sqrt{1+t}$.
   On note $\sqrt{1+t} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^3)$ ce développement limité.
2. Montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que :
$$1 + X = (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3)^2 + X^4 Q(X).$$
3. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $N^4 = 0_n$. Déduire de la question précédente une racine carrée de $I_n + N$.

Partie III. Racines carrées d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres strictement positives et deux à deux distinctes

1. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$. On suppose deux plus que f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.
   (a) Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g.
   (b) En déduire que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
   (c) Justifier que f est diagonalisable.
   Montrer que, pour tout base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f, la matrice associée à g relativement à la base $\mathcal{B}$ est diagonale. En déduire que g est diagonalisable.
2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles strictement positives et deux à deux distinctes.

(a) Justifier l'existence d'une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

(b) Donner un exemple de racine carrée de A. (On l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D.)

(c) Soit R une racine carrée de A. Vérifier que $AR = RA$.
En déduire que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.

(d) Établir que A admet exactement 2^n racines carrées.

Partie IV. Racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit S une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive.

1. Montrer que toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

2. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1}SP$ soit diagonale.

3. Déterminer une racine carrée de S qui soit symétrique positive. (On l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D.)

4. On veut montrer que S admet une unique racine carrée symétrique positive.
Soit R une matrice symétrique positive telle que $R^2 = S$.

   (a) Soit λ une valeur propre de R. Montrer que λ^2 est valeur propre de S et que les sous-espaces propres associés vérifient : $\mathrm{SEP}(R, \lambda) \subset \mathrm{SEP}(S, \lambda^2)$.

   On note p le nombre de valeurs propres deux à deux distinctes de R et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les p valeurs propres deux à deux distinctes de R.

   (a) Justifier : $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(R, \lambda_i) \subset \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(S, \lambda_i^2)$.

   (b) En déduire : $\displaystyle n = \sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{SEP}(R, \lambda_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{SEP}(S, \lambda_i^2)\right) \leq n$.

   (c) Montrer que $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_p^2$ sont les seules valeurs propres de S et que
$$\forall i \in \{1, \ldots, p\},\ \mathrm{SEP}(R, \lambda_i) = \mathrm{SEP}(S, \lambda_i^2).$$

   (d) Montrer que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.

   (e) En déduire que S admet une unique racine carrée symétrique positive.