DM10

Devoir maison à rendre le 20/02/2023

Exercice 1

On définit sur l'intervalle $]0,1]$ les deux fonctions $f : x \mapsto x\ln(x)$ et $g : x \mapsto x^x = e^{x\ln(x)}$.

1. (a) Les fonctions f et g admettent-t-elles des limites en 0 ?
   (b) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g sur $]0,1]$.
   (c) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. On notera I sa valeur.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\quad u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (t\ln(t))^n\,\mathrm{d}t \quad$ et $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   (c) Calculer u_0 et u_1.
   (d) À l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.
   (e) Montrer que la série de terme général u_n converge.
   (f) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def somme(n):` qui prend comme paramètre d'entrée un entier naturel n et qui produit en paramètre de sortie la valeur de S_n.

3. (a) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre n appliquée à la fonction exponentielle, montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ et tout entier naturel n :
$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$
   (b) En déduire que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |I - S_n| \leq \dfrac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$.
   (c) Montrer que : $\quad I = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$.
   (d) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def estimation(eps):` qui prend comme paramètre d'entrée un réel strictement positif ε et qui produit en paramètre de sortie une valeur approchée de I à ε près.

Exercice 2

- On admet que si une suite $(T_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires converge en probabilité, alors la limite de cette suite est une variable aléatoire presque sûrement unique.

  Plus précisément, si l'on a $T_n \xrightarrow{P} T$ et $T_n \xrightarrow{P} T'$, alors $P(T = T') = 1$.

- On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires converge en moyenne vers une variable aléatoire U si et seulement si : pour tout entier naturel n, la variable aléatoire $|U_n - U|$ possède une espérance et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(|U_n - U|) = 0$.

- On rappelle l'inégalité de Markov, valable pour une variable V à valeurs positives et possédant une espérance mathématique :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(V > \varepsilon) \leq \frac{E(V)}{\varepsilon}.$$

1. Dans cette question, on considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et une variable aléatoire X, elle aussi définie sur cet espace probabilisé.

   Montrer que, si la suite (X_n) converge en moyenne vers X, alors elle converge en probabilité vers X.

On se propose, dans la suite, d'étudier un exemple montrant que la réciproque de cette propriété est fausse. Pour ce faire, on considère une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre λ (avec $\lambda > 1$).

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} Z_k$.

2. (a) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer $P(Y_n \neq 0)$.
   (b) Soit ε un réel strictement positif. Comparer les évènements $(Y_n > \varepsilon)$ et $(Y_n \neq 0)$.
   (c) En déduire que la suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

3. (a) Montrer que, si la suite (Y_n) convergeait en moyenne vers une variable aléatoire Y, alors on aurait $P(Y = 0) = 1$.
   (b) Calculer l'espérance de Y_n.
   (c) Établir que $E(|Y_n - Y|) \geq E(Y_n) - E(Y)$, puis déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(|Y_n - Y|)$.

4. Conclure.

Exercice 3

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n, chaque boule apparaissant deux fois. On effectue au hasard une succession de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- À chaque tirage de deux boules, si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne remet pas les deux boules dans l'urne et on dit qu'une paire est constituée.
- Si les deux boules tirées portent des numéros différents, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$ et tout entier naturel k non nul, on pose $T_i = k$ si k tirages exactement ont été nécessaires pour constituer i paires.

On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ permettant de modéliser cette expérience et que, pour tout entier i de $[\![1, n]\!]$, T_i est une variable aléatoire définie sur cet espace.

1. (a) Déterminer la loi de T_1 et reconnaitre cette loi.
   (b) Donner, sans calcul, la valeur de l'espérance de T_1.

2. On suppose avoir importé les librairies `numpy` (avec le préfixe `np`) et `numpy.random` (avec le préfixe `rd`)

   (a) Expliquer pourquoi la fonction `Python` suivante, qui prend comme paramètre l'entier n, simule le tirage simultané de deux boules dans cette urne.

```python
def tirage(n):
    a = rd.randint(2,2*n+2)
    b = rd.randint(2,2*n+2)
    while b == a :
        b = rd.randint(2,2*n+2)
    a = np.floor(a/2)
    b = np.floor(b/2)
    return np.array([a,b])
```

(b) Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la variable T_1 :

```
def T(n):
    y = 1
    V = tirage(n)
    while ***** :
        V = tirage(n)
        *****
    return y
```

3. On pose $X_1 = T_1$ et pour tout i de $[\![2, n]\!]$: $X_i = T_i - T_{i-1}$.

   (a) Que représente la variable X_i ?

   (b) Déterminer, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la loi de X_i ainsi que son espérance.

   (c) En déduire que T_n admet une espérance et que l'on a : $\quad E(T_n) = n^2$.

4. On effectue une suite de n tirages de deux boules selon le protocole précédent. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de paires constituées lors de ces n tirages.

   (a) Calculer $P(S_n = 0)$.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = 0)$.

   (c) Montrer que: $P(S_n = n) = \frac{n!2^n}{(2n)!}$.

Problème

Partie I :

On considère, dans cette partie, les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver, en fonction de I_3 et de A, deux matrices P_1 et P_2 de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :
$$P_1 + P_2 = I_3 \quad \text{et} \quad 4P_1 + 9P_2 = A.$$
   Expliciter ensuite les coefficients de P_1 et ceux de P_2.

2. (a) Calculer les matrices P_1^2, P_1P_2, P_2P_1 et P_2^2.

   (b) En déduire : $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ A^k = 4^k P_1 + 9^k P_2$.

3. Trouver au moins une matrice B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont on explicitera les coefficients, telle que $B^2 = A$.

4. Quelles sont les valeurs propres de A ?

Dans toute la suite du problème, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 1 et f un endomorphisme de E.
On note e l'endomorphisme identité de E qui, à chaque élément de E, associe lui-même, et $\tilde{0}$ l'endomorphisme nul de E qui, à chaque élément de E, associe l'élément nul de E.
On suppose qu'il existe un entier m de $\mathbb{N}^*$, des réels $\lambda_1, ..., \lambda_m$ deux à deux distincts et des endomorphismes $p_1, ..., p_m$ de E tous différents de $\tilde{0}$, tels que : $\forall k \in [\![0; m]\!],\ f^k = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$.
Enfin on considère les polynômes :
$$N = \prod_{\ell=1}^{m} (X - \lambda_\ell) \text{ et pour tout } i \text{ de } [\![1; m]\!],\ M_i = \prod_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant m \\ \ell\neq i}} (X - \lambda_\ell) \text{ et } L_i = \frac{1}{M_i(\lambda_i)} M_i.$$

On admet que, pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[x]$: $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

Partie II : Étude des puissances de f

5. Montrer, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_m[x]$: $P(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i)p_i$.

6. En déduire : $N(f) = \tilde{0}$.

7. (a) Montrer que, pour tout couple (i, j) de $[\![1; m]\!]^2$, $L_i(\lambda_j)$ est égale à 1 si $i = j$ et égal à 0 si $i \neq j$.

   (b) En déduire, pour tout i de $[\![1; m]\!]$: $L_i(f) = p_i$.

8. (a) Montrer : $e = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i$.

   (b) En déduire que E est la somme des m sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(p_1), ..., \mathrm{Im}(p_m)$.

9. Soit i appartenant à $[\![1; m]\!]$.

   (a) Vérifier : $N = M_i(\lambda_i)(x - \lambda_i)L_i$.

   (b) En déduire, en utilisant le résultat de la question **6.** : $\mathrm{Im}(p_i) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_i\, e)$.

10. Déduire des questions précédentes que f est diagonalisable, que les valeurs propres de f sont les réels $\lambda_1, ..., \lambda_m$ et que, pour i de $[\![1; m]\!]$, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i est $\mathrm{Im}(p_i)$.

11. (a) Montrer, pour tout couple (i, j) de $[\![1; m]\!]^2$ tel que $i \neq j$: $\quad p_i \circ p_j = \tilde{0}$.

    (b) En déduire, en utilisant le résultat de la question 8.(a), pour i de $[\![1; m]\!]$: $\quad p_i \circ p_i = p_i$.

    (c) Établir, pour tout i de $[\![1; m]\!]$: $\quad p_i \circ f = \lambda_i \cdot p_i$.

12. Montrer : $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ f^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda^k p_i,\quad$ puis, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[x]$: $\quad P(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i)p_i$.

Partie III : Intervention de produit scalaire

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$.
On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $(x, y) \in E \times E$, par

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), p_i(y) \rangle.$$

13. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

    On remarquera qu'ainsi E est muni de deux produits scalaires, $\langle ., . \rangle$ et φ.

14. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E pour le produit scalaire φ.
    Quel résultat de la partie II peut-on alors retrouver sans calcul ?

15. Démontrer que, pour tout i de $[\![1; m]\!]$, p_i est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(p_i)$ pour le produit scalaire φ.
