BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2013

Conceptions : H.E.C. – E.S.C.P. / EUROPE

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Mardi 7 mai 2013, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs réelles.

L'objectif du problème est d'introduire une famille de lois de probabilité discrètes, dites lois de Poisson mélangées, qui jouent un rôle important en mathématique de l'assurance, car elles permettent de modéliser le nombre d'apparitions d'événements aléatoires provenant de sources hétérogènes.

Partie I. Polynômes factoriels ascendants et lois binomiales négatives

Pour tout réel x et tout entier naturel n, on pose : $x^{<n>} = \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x+k-1) & \text{si } n \geqslant 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$.

On associe aux fonctions polynomiales $x \mapsto x^{<n>}$, les polynômes $X^{<n>}$ $(n \in \mathbb{N})$ de $\mathbb{R}[X]$, dits polynômes factoriels ascendants.

1.a) Vérifier les égalités : $X^2 = X^{<2>} - X^{<1>}$ et $X^3 = X^{<3>} - 3X^{<2>} + X^{<1>}$.

b) Exprimer X^4 comme combinaison linéaire des polynômes $X^{<4>}, X^{<3>}, X^{<2>}$ et $X^{<1>}$.

c) Justifier plus généralement que les polynômes $X^n (n \in \mathbb{N})$ de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ sont tous des combinaisons linéaires de polynômes factoriels ascendants.

2. Soit (r, s) un couple de réels et n un entier naturel.

a) Exprimer $r^{<n+1>}$ en fonction de $r^{<n>}$.

b) En déduire pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la relation : $(r+s+n)\, r^{<k>} s^{<n-k>} = r^{<k+1>} s^{<n-k>} + r^{<k>} s^{<n-k+1>}$.

c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(r+s)^{<n>} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^{<k>} s^{<n-k>}$.

3. Dans cette question, r est un réel strictement positif et x est un réel fixé de $]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{r^{<n+1>}\, x^{n+1}}{n!(1-x)^{r+1}} \qquad \text{et} \qquad R_n = \frac{r^{<n+1>}}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}}\, dt \, .$$

   a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

   b) En déduire l'existence d'un entier naturel N tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_{N+n} \leqslant u_N \left(\dfrac{1+x}{2}\right)^n$.

   c) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   d) À l'aide d'une formule de Taylor que l'on citera avec ses hypothèses, justifier pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité :

$$(1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^{n} \frac{r^{<k>}}{k!} x^k + R_n \, .$$

   e) Montrer que pour tout $t \in [0,x]$, on a : $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité : $R_n \leqslant u_n$.

   f) Déduire des résultats précédents que la série de terme général $\dfrac{r^{<n>}}{n!} x^n$ est convergente et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^{<n>}}{n!} x^n = \frac{1}{(1-x)^r} \, .$$

4. Vérifier que pour tout couple (r,p) de réels tels que $r > 0$ et $0 < p < 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{<k>}}{k!} p^r (1-p)^k = 1$.

Dans toute la suite du problème, on dit qu'une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit la loi binomiale négative de paramètres r $(r > 0)$ et p $(0 < p < 1)$, si pour tout entier naturel k, on a :
$P\big([X = k]\big) = \dfrac{r^{<k>}}{k!} p^r (1-p)^k$. Cette loi est notée $BN(r,p)$.

5. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $BN(r,p)$.

   a) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que la variable aléatoire X_n définie par $X_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - k + 1)$ admet une espérance égale à $r^{<n>} \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^n$.

   b) En déduire que X admet des moments de tous ordres. Calculer l'espérance et la variance de X.

6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois $BN(r,p)$ et $BN(s,p)$, respectivement. On pose : $Z = X + Y$. Montrer que Z suit la loi $BN(r+s,p)$.

Partie II. Inégalités stochastiques

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que X *est stochastiquement inférieure à* Y lorsque pour tout réel x, on a : $P\big([X \geqslant x]\big) \leqslant P\big([Y \geqslant x]\big)$.

7. Montrer que si les deux variables aléatoires X et Y vérifient pour tout $\omega \in \Omega$ l'inégalité $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$, alors X est stochastiquement inférieure à Y.

8. On suppose que X suit la loi normale d'espérance égale à -1 et de variance égale à 1, que Y suit la loi normale d'espérance égale à 1 et de variance égale à 1 et que X et Y sont indépendantes.

   a) Exprimer $P\big([X \geqslant 0] \cap [Y < 0]\big)$ à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.

   b) Montrer que X est stochastiquement inférieure à Y.

   c) A-t-on pour tout $\omega \in \Omega$, l'inégalité $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$?

9. On suppose que X et Y sont discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X est stochastiquement inférieure à Y si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $P([X \leqslant k]) \geqslant P([Y \leqslant k])$.

10. Soit θ et λ deux réels vérifiant $0 < \theta < \lambda$, et soit X et Z deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi de Poisson de paramètre θ et la loi de Poisson de paramètre $\lambda - \theta$.
   a) Rappeler la loi de $X + Z$ en citant précisément le résultat de cours utilisé.
   b) Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que X est stochastiquement inférieure à Y.

11. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $t > 0$, on pose : $F(t,k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{t^j}{j!} e^{-t}$.
   a) Écrire en Scilab une fonction suite(t,k) qui permet de calculer F(t,k).
   b) Établir pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $\beta \in]0,1[$, l'existence d'un unique réel strictement positif $M(\beta,k)$ vérifiant l'égalité suivante : $F(M(\beta,k),k) = \beta$.

12. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction de répartition G.

   On note V et W les deux applications de Ω dans $[0,1]$, définies par : $\forall \omega \in \Omega$, $\begin{cases} V(\omega) = G(X(\omega) - 1) \\ W(\omega) = G(X(\omega)) \end{cases}$.

   Soit α un réel vérifiant $0 < \alpha < 1$.
   a) Justifier l'existence de $L_\alpha = \mathrm{Min}\{k \in \mathbb{N}; G(k) \geqslant \alpha\}$ et comparer les réels α, $G(L_\alpha - 1)$ et $G(L_\alpha)$.
   b) Montrer que $[W < \alpha]$ et $[V \geqslant \alpha]$ sont des événements. Qu'en déduit-on pour les applications V et W ?
   c) Exprimer $P([W < \alpha])$ et $P([V \geqslant \alpha])$ à l'aide de G et L_α.
   d) Soit U une variable aléatoire à densité qui suit la loi uniforme sur le segment $[0,1]$.
   Montrer que V est stochastiquement inférieure à U et que U est stochastiquement inférieure à W.

Cubes uniquement

13. Pour n entier supérieur ou égal à 2, soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon i.i.d. (indépendant, identiquement distribué) de la loi de Poisson de paramètre inconnu $\theta > 0$. On pose pour tout $n \geqslant 2$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

   Les notations F et M sont celles de la question 11.
   a) Proposer un estimateur sans biais de θ.
   b) Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 1$.
   À l'aide de la question 12, établir les deux inégalités suivantes :

$$P\left(\left[F(n\theta, S_n) < \frac{\alpha}{2}\right]\right) \leqslant \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad P\left(\left[F(n\theta, S_n - 1) \geqslant 1 - \frac{\alpha}{2}\right]\right) \leqslant \frac{\alpha}{2}.$$

   c) On pose : $J(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{1}{n} M\left(\frac{\alpha}{2}, S_n\right)$ et $I(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \begin{cases} \frac{1}{n} M\left(1 - \frac{\alpha}{2}, S_n - 1\right) & \text{si } S_n \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } S_n = 0 \end{cases}$.

   Déduire des questions précédentes que $I(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $J(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sont les bornes d'un intervalle de confiance de risque inférieur ou égal à α pour le paramètre inconnu θ.

Tournez la page S.V.P.

Partie III. Lois de Poisson mélangées

Dans cette partie, T est une variable aléatoire à densité dont une densité f est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

14. Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$.

15. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k$.

  a) Soit A un réel strictement positif et X_A une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre A. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement suivant : $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant P([X_A > n]) + \displaystyle\int_A^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

  b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} z_n$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = 1$.

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit la loi de Poisson mélangée associée à la densité f, notée $\mathcal{P}_f$, si pour tout entier naturel n, on a : $P([X = n]) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$.

16. La notation exp désigne la fonction exponentielle. Soit r un réel strictement positif et p un réel vérifiant $0 < p < 1$. On suppose dans cette question qu'une densité f de T est donnée par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(r)} \left(\dfrac{p}{1-p}\right)^r t^{r-1} \exp\left(-\dfrac{pt}{1-p}\right) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}.$$

  a) Montrer que f est une densité.

  b) Déterminer la loi suivie par $\frac{p}{1-p}T$. En déduire l'espérance et la variance de T.

  c) Montrer que $\mathcal{P}_f$ est la loi binomiale négative $BN(r,p)$.

17. Soit (r,p) et (s,q) deux couples de réels vérifiant $0 < r < s$ et $0 < q < p < 1$. On note Y, Z et W trois variables aléatoires qui suivent les lois $BN(r,p)$, $BN(s,p)$ et $BN(s,q)$, respectivement.

  a) Montrer que Y est stochastiquement inférieure à Z.

  b) À l'aide de la question 16, en déduire que Y est stochastiquement inférieure à W.