DM12

Correction du devoir maison facultatif

Exercice 1 (Ecricome 2005)

1. Tout d'abord, on montre par récurrence que la suite est bien définie (il se pourrait en effet qu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $u_{n-1} < n$ et que $u_n = \sqrt{u_{n-1}+n}$ ne soit pas défini) et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

   Init. u_0 est bien définie et $u_0 \geq 0$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

   Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$, et montrons la propriété au rang n.

   On a $u_{n-1} \geq 0$ par hypothèse de récurrence, donc $n + u_{n-1} \geq 0$. Ainsi $u_n = \sqrt{n+u_{n-1}}$ est bien défini, et positif. D'où la propriété au rang n.

   Concl. Par principe de récurrence, u_n est bien défini et positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Vérifions à présent l'inégalité demandée. On a $u_0 \geq 0 = \sqrt{0}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$n \leq n + u_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} \leq \sqrt{n+u_{n-1}} = u_n$$

   par croissance de la fonction racine carrée. Ainsi, on a bien $\boxed{u_n \geq \sqrt{n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

   On a $\sqrt{n} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Par théorème de comparaison, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \text{ existe et vaut } +\infty.}$

2. (a) Pour tout $x \geq 0$, on a :

   $$\frac{1+x}{2} - \sqrt{x} = \frac{1+x-2\sqrt{x}}{2} = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2} \boxed{\geq 0.}$$

   D'où l'inégalité souhaitée.

   (b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}$.

   Init. On a $u_0 \leq 0 + \dfrac{u_0}{2^0}$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

   Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$. Montrons qu'elle est vraie au rang n.

   On applique l'inégalité de la question précédente à $x = n + u_{n-1}$:

   $$u_n = \sqrt{n+u_{n-1}} \leq \frac{1+n+u_{n-1}}{2} = \frac{1+n}{2} + \frac{u_{n-1}}{2}.$$

   Or par hypothèse de récurrence, on a :

   $$u_{n-1} \leq n - 1 + \frac{u_0}{2^{n-1}}.$$

   En remplaçant dans l'expression précédente, on obtient :

   $$u_n \leq \frac{1+n}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{u_0}{2^n} = n + \frac{u_0}{2^n}.$$

   D'où la propriété au rang n.

   Concl. Par principe de récurrence, on a $\boxed{u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n-1} \leq n-1+\frac{u_0}{2^{n-1}} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{u_{n-1}}{n^2} \leq \frac{n-1}{n^2}+\frac{u_0}{n^2 2^{n-1}}$$

Puisque $\dfrac{n-1}{n^2}+\dfrac{u_0}{n^2 2^{n-1}} = \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{u_0}{n^2 2^{n-1}}$ converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n-1}}{n^2} \text{ existe et vaut } 0.}$

(c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_n}{n} = \frac{\sqrt{n+u_{n-1}}}{n} = \sqrt{\frac{n+u_{n-1}}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{u_{n-1}}{n^2}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}+\dfrac{u_{n-1}}{n^2} = 0$ par la question précédente. Donc $\boxed{\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1} \text{ converge bien vers } 0.}$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sqrt{n} \leq u_n = \sqrt{n+u_{n-1}}$$

d'où :

$$1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+u_{n-1}}{n}}$$

On a donc bien que, pour tout entier n non nul, $1 \leq \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1+\dfrac{u_{n-1}}{n}}$.

On a :

$$\frac{u_{n-1}}{n} = \frac{u_{n-1}}{n-1}\frac{n-1}{n}.$$

Or, on a par la question précédente que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n-1}}{n-1} = 0$, et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$, on obtient par produit des limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{n} = 0.$$

Ainsi on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{u_{n-1}}{n}} = 1$. Par le théorème des gendarmes, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\sqrt{n}}$ existe et vaut 1. Ainsi on a l'équivalent $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}.}$

3. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$.

(a) On a le développement limité usuel suivant en 0 :

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x+o(x).$$

On en déduit en particulier l'équivalent suivant :

$$\sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} w_n = u_n - \sqrt{n} &= \sqrt{n+u_{n-1}} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}-1\right) \end{aligned}$$

Or on a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n-1}}{n} = 0$, donc :

$$\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{u_{n-1}}{n}.$$

Enfin on a vu que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$, donc que $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n-1}$. On obtient donc :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{u_{n-1}}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{\sqrt{n-1}}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2}.$$

La suite $\boxed{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet bien la limite } \ell = \frac{1}{2} \text{ lorsque } n \to +\infty.}$

(b) On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}.$$

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) = 0.}$

On a $u_n = w_n + \sqrt{n}$ pour tout n, d'où en remplaçant :

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= (w_n + \sqrt{n}) - (w_{n-1} + \sqrt{n-1}) \\ &= (w_n - w_{n-1}) + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \end{aligned}$$

Or on a $\lim w_n = \frac{1}{2}$, donc $\lim w_{n-1} = \frac{1}{2}$, et par différence $\lim w_n - w_{n-1} = 0$. On peut donc conclure avec le calcul de la limite à la question précédente que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(u_n - u_{n-1}) = 0.}$$

(c) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - u_{n-1}) = 0$, on a $u_n - u_{n-1} \geq -\frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout entier n :

$$\boxed{n \geq N_0 \quad \Rightarrow \quad u_n \geq u_{n-1} - \frac{1}{2}.}$$

(d) On a en utilisant la définition de la suite (u_n) que :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+u_n} - \sqrt{n-1+u_{n-1}}$$

On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(\sqrt{n+u_n} - \sqrt{n-1+u_{n-1}})(\sqrt{n+u_n} + \sqrt{n-1+u_{n-1}})}{\sqrt{n+u_n} + \sqrt{n-1+u_{n-1}}} \\ &= \frac{(n+u_n)-(n-1+u_{n-1})}{\sqrt{n+u_n} + \sqrt{n-1+u_{n-1}}} = \frac{1+u_n-u_{n-1}}{\sqrt{n+u_n} + \sqrt{n-1+u_{n-1}}}. \end{aligned}$$

La quantité au dénominateur étant toujours positive, $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$. Or pour $n \geq N_0$, on a :

$$1 + u_n - u_{n-1} \geq 1 - 1/2 = 1/2 \geq 0$$

On a donc pour tout $n \geq N_0$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. En d'autres termes, la suite $\boxed{(u_n) \text{ est croissante à partir d'un certain rang}}$ (le rang N_0).

4. On peut proposer la fonction suivante :

```
def suite(n):
        U = 1
        for k in range(n)
    U = np.sqrt(U+k); # sqrt est la fonction racine
carré
    return(U)
```

Exercice 2 (Edhec 2019)

Partie 1 : définition de l'adjoint $u^\star$ d'un endomorphisme u de E.

1. (a) Supposons qu'un tel endomorphisme $u^\star$ de E existe, alors on a :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$$

Fixons $y \in R$, et soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a pour $x = e_i$:

$$\langle u(e_i), y\rangle = \langle e_i, u^\star(y)\rangle.$$

Or $\mathscr{B}$ étant une base **orthonormée**, on sait d'après le cours que :

$$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n}\langle e_i, u^\star(y)\rangle e_i.$$

Ce qui donne donc avec les égalités précédentes :

$$\boxed{u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n}\langle u(e_i), y\rangle e_i.}$$

(b) Si $u^\star$ existe, alors pour tout $y \in E$, on a obtenu les coordonnées du vecteur $u^\star(y)$ dans la base $\mathscr{B}$. Ainsi le vecteur $u^*(y)$ est déterminé de manière unique pour tout $y \in E$, et donc $\boxed{u^\star \text{ est unique.}}$

2. (a) Pour tout $y \in E$, on a :

$$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n}\langle e_i, u^\star(y)\rangle e_i \in E.$$

Donc $u^\star$ est bien à valeurs dans E. Montrons que cette application est linéaire. Soit pour cela $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} u^\star(\lambda x + \mu y) &= \sum_{i=1}^{n}\langle u(e_i), \lambda x + \mu y\rangle e_i \\ &= \lambda\sum_{i=1}^{n}\langle u(e_i), x\rangle e_i + \mu\sum_{i=1}^{n}\langle u(e_i), y\rangle e_i \quad \text{par lin. à droite de } \langle\cdot,\cdot\rangle \\ &= \lambda u^\star(x) + \mu u^\star(y) \end{aligned}$$

Donc $u^\star$ est bien linéaire. C'est bien un $\boxed{\text{endomorphisme de } E.}$

(b) Reste à montrer que cet endomorphisme est effectivement solution du problème posé. Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \langle x, u^\star(y)\rangle &= \langle x, \sum_{i=1}^{n}\langle u(e_i), y\rangle e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle u(e_i), y\rangle\langle x, e_i\rangle \quad \text{par lin. à droite de } \langle\cdot,\cdot\rangle \\ &= \langle\sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle u(e_i), y\rangle \quad \text{par lin. à gauche de } \langle\cdot,\cdot\rangle \\ &= \langle u\left(\sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i\right), y\rangle \quad \text{par lin. de } u \\ &= \langle u(x), y\rangle \end{aligned}$$

car $x = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i\rangle$ puisque $\mathscr{B}$ est une base orthonormée.

Ainsi $\boxed{\text{l'endomorphisme } u^\star \text{ est bien solution du problème posé}}$, et $\boxed{\text{c'est l'unique solution}}$ d'après la question 1. On appelle *adjoint* de u cet endomorphisme.

Partie 2 : étude des endomorphismes normaux.

3. Puisque f un endomorphisme symétrique de E, on a pour tout $x, y \in E$:
$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$
Ainsi f est un endomorphisme de E solution du problème posé à la partie 1. Or, on vient de le voir, ce problème admet une unique solution, qui n'est autre que $f^\star$, l'adjoint de f. Par unicité de la solution de ce problème, on a donc $\boxed{f = f^\star.}$

De plus on a :
$$f^\star \circ f = f \circ f = f \circ f^\star.$$
Donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme normal.}}$

4. (a) Pour tout $x \in E$, on a :
$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, u^\star(u(x))\rangle && \text{par déf. de l'adjoint} \\ &= \langle x, u^\star \circ u(x)\rangle = \langle x, u \circ u^\star(x)\rangle && \text{car } u \text{ et } u^\star \text{ commutent} \\ &= \langle x, u(u^\star(x))\rangle = \langle u^\star(x), u^\star(x)\rangle && \text{par déf. de l'adjoint} \\ &= \|u^\star(x)\|^2. \end{aligned}$$
Ainsi on a bien $\boxed{\text{pour tout } x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^\star(x)\|.}$

(b) On a :
$$x \in \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_E \Leftrightarrow \|u(x)\| = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{quest. 4.(a)}} \|u^\star(x)\| = 0 \Leftrightarrow u^\star(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(u^\star).$$
Ainsi on a bien $\boxed{\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^\star).}$

5. Supposons que F soit un sous-espace vectoriel stable par u, c'est-à-dire :
$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F.$$
Montrons que $F^\perp$ est stable par $u^\star$. Prenons pour cela $y \in F^\perp$ et montrons que $u^\star(y) \in F^\perp$. On a pour tout $x \in F$:
$$\langle x, u^\star(y)\rangle \underbrace{=}_{\text{def. de l'adjoint}} \langle \underbrace{u(x)}_{\in F}, \underbrace{y}_{\in F^\perp}\rangle = 0$$
Ainsi on a bien $u^\star(y) \in F^\perp$, et donc $\boxed{F^\perp \text{ est stable par } u^\star.}$

6. (a) Comme u et $u^\star$ commutent, on sait par le cours que les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. Redémontrons le ici. Soit donc $x \in E_\lambda$. Montrons que $u^\star(x) \in E_\lambda$:
$$u(u^\star(x)) = u \circ u^\star(x) = u^\star \circ u(x) = u^\star(\lambda \cdot x) = \lambda u^\star(x)$$
par linéarité de $u^\star$. Ainsi on a bien $u^\star(x) \in E_\lambda$, et $\boxed{E_\lambda \text{ est stable par } u^\star.}$

(b) Pour tout $x, y \in E$, on a par définition de l'adjoint de u :
$$\langle u^\star(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle.$$
Or on sait par la partie 1 qu'il existe un **unique** endomorphisme $(u^\star)^\star$, l'adjoint de $u^\star$, satisfaisant :
$$\forall x, y \in E, \quad \langle u^\star(x), y\rangle = \langle x, (u^\star)^\star(y)\rangle.$$
Par unicité de l'endomorphisme solution du problème de la partie 1, on a donc $\boxed{(u^\star)^\star = u.}$

On sait par la question précédente que E_λ est stable par u. D'après la question 5., le sous-espace $\boxed{E_\lambda^\perp \text{ est donc stable par } (u^\star)^\star = u}$, d'où le résultat voulu.

Exercice 3 (Edhec 2007)

1. Les X_i sont indépendants et suivent tous une loi $\mathscr{E}(1) = \gamma(1)$. Par stabilité de la loi gamma par somme, on a $\boxed{S_n \hookrightarrow \gamma(n)}$. On en déduit que :

$$\boxed{E(S_n) = n} \quad \text{et} \quad \boxed{V(S_n) = n}.$$

2. Les variables X_i sont indépendantes et identiquement distribuées. Elles admettent toutes une espérance (qui vaut 1) et une variance (qui vaut 1 également). Par le théorème central limite, on sait que :

$$S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} S \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1).$$

On en déduit en particulier que :

$$P(S_n \leq n) = P(S_n - n \leq 0) = P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P(X \leq 0) = \Phi(0) \boxed{= \frac{1}{2}}$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathscr{N}(0,1)$.

3. Comme S_n suit une loi $\gamma(n)$, une densité de S_n est donnée par :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

Pour tout $n \geq 1$, on a donc :

$$P(S_n \leq n) = \int_{-\infty}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Avec la question précédente, on peut donc conclure que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.}$$

4. (a) Les bornes de l'intégrale ainsi que le terme dans l'exponentielle nous incite à faire le changement de variables $t = nz$. Ce changement de variable est affine, donc licite, et on a :

$$\mathrm{d}t = n\mathrm{d}z, \quad z : 0 \to 1 \quad \text{lorsque} \quad t : 0 \to n.$$

Par le théorème de changement de variables, les intégrales $\displaystyle\int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{(nz)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-nz} n\mathrm{d}z$ sont de même nature, c'est-à-dire convergente car la première converge, et on a :

$$\int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{n^n}{(n-1)!} \int_0^1 z^{n-1} e^{-nz}\mathrm{d}z.$$

Par la question précédente, on a :

$$\frac{n^n}{(n-1)!} \int_0^1 z^{n-1} e^{-nz}\mathrm{d}z = \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}.$$

On en déduit par opération sur les équivalents (quotient en l'occurrence) que :

$$\boxed{\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz}\mathrm{d}z \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n-1)!}{2n^n} = \frac{n!}{2n^{n+1}}.}$$

(b) En utilisant que $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$, on obtient :

$$\frac{n!}{2n^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}{2n^{n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}e^{-n}.$$

On obtient donc le nouvel équivalent suivant :

$$\boxed{\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}\,\mathrm{d}z \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}e^{-n}.}$$

Problème (Edhec 2018)

Partie I : simulations de S_k et T_k.

1. Étant donné la structure du programme (tant que $c < k$, $n = n+1$), on observe que n correspond au nombre de lancers de la pièce, et que c représente le nombre de piles obtenus lors de ces n lancers. Le paramètre c augmente de 1 lorsqu'on la pièce tombe sur pile, ce qui survient avec une probabilité p. Il nous faut donc une instruction qui a une probabilité p de se réaliser, et alors on augmentera c de 1, et $1-p$ d'échouer, et c restera alors inchangé. Une manière de le faire est d'utiliser l'instruction `rd.random()<p` dans la boucle `if`. En effet `rd.random()` renvoie une réalisation d'une variable suivant une loi $\mathscr{U}([0,1])$. Cette réalisation est donc $\leq p$ avec une probabilité p, ce qui correspond bien à la probabilité d'obtenir un pile avec la pièce au n-ème lancer.

   La boucle `while` s'arrête lorsque le compteur c est égal à k, ce qui correspond à obtenir k piles. La variable n contient alors le nombre de lancers nécessaires à l'obtention des k piles, ce qui correspond à une réalisation de S_k.

   On obtient donc le code suivant :

```python
k = int(input('donnez une valeur pour k :'))
p = int(input('donnez une valeur pour p :'))
n = 0
c = 0
while c<k :
        n=n+1
        if rd.random()<=p :
                c = c+1
print(n)
```

2. De même, n représente le nombre de lancers. Mais ici, la variable c doit contenir le nombre de piles **consécutifs**, et on s'arrête lorsqu'on a obtenu k piles consécutifs, c'est-à-dire lorsque $c = k$, pour renvoyer n encore. On doit donc augmenter c de 1 lorsqu'on obtient un pile, ce qu'on simulera encore par `rd.random()<=p`. Si par contre on obtient un face, ce qui correspondra au cas où `rd.random()<=p` n'est pas réalisé, alors on remet le compteur c à 0 (la série de piles obtenue étant de longueur $< k$). On obtient donc le code suivant :

```python
        if rd.random()<=p :
                c = c+1
        else :
                c=0
```

Partie 2 : calcul de l'espérance S_k.

3. S_1 correspond au rang du premier pile dans une succession de lancers. C'est donc le rang du premier succès (« obtenir pile »), avec probabilité de succès p, dans une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi $\boxed{S_1 \text{ suit une loi } \mathscr{G}(p)}$. En particulier $E(S_1)$ existe et vaut $\boxed{E(S_1) = \frac{1}{p}}$.

4. (a) X_{n-1} est égal au nombre de piles obtenus lors des $n-1$ premiers lancers. Il s'agit donc du nombre de succès lors de $n-1$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes avec probabilité de succès p. Donc $\boxed{X_{n-1} \text{ suit une loi } \mathscr{B}(n-1,p).}$

   (b) S_k est le rang d'apparition du k-ème pile. Pour cela, on doit donc avoir lancer au moins k fois la pièce. Ainsi $S_k \geq k$. De plus pour tout $n \geq k$, l'évènement $[S_k = n]$ est bien réalisable puisqu'on peut obtenir $n-k$ « faces » suivis de k « piles ». Ainsi on a $\boxed{S_k(\Omega) = [\![k, +\infty[\![= \{n \in \mathbb{N},\ n \geq k\}}$.

   L'évènement $[S_k = n]$ est réalisé si et seulement si on obtient le k-ème « pile » au n-ème lancer, soit si et seulement si on a obtenu $k-1$ « pile » parmi des $n-1$ premiers lancers et pile lors du n-ème lancer. Ainsi on a :

$$\boxed{[S_k = n] = [X_{n-1} = k-1] \bigcap P_n.}$$

   (c) Les évènements $[X_{n-1} = k-1]$ et P_n étant indépendants, puisque les lancers le sont, on a :

$$P(S_k = n) = P([X_{n-1} = k-1] \bigcap P_n) = P(X_{n-1} = k-1)P(P_n) = \left(\binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}\right) p$$

   car $X_{n-1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n-1,p)$. On obtient donc que :

$$\boxed{\forall n \geq k, \quad P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.}$$

5. (a) Z_i représente le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du i-ème « pile » après l'obtention du $(i-1)$-ème « pile ». Il s'agit donc du nombre de lancers nécessaires à l'obtention d'un pile. Les lancers étant indépendants, $\boxed{Z_i \text{ suit donc une loi } \mathscr{G}(p).}$

   Cette justification conviendrait très bien lors du concours. En détail, au cas où l'argument précédent ne vous convainc pas totalement, on peut aussi le retrouver par le calcul suivant : on applique la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $([S_{i-1} = n])_{n \geq i-1}$. On obtient que pour tout $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
P(Z_i = k) &= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(Z_i = k,\ S_{i-1} = n) = \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_i = k+n,\ S_{i-1} = n) \\
&= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P([S_{i-1} = n] \cap F_{n+1} \cap \cdots \cap F_{n+k-1} \cap P_{n+k}) \\
&= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_{i-1} = n)P(F_{n+1}) \dots P(F_{n+k-1})P(P_{n+k}) \quad \text{par indépendance des lancers} \\
&= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_{i-1} = n)(1-p)^{k-1}p = (1-p)^{k-1}p \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_{i-1} = n) = (1-p)^{k-1}p
\end{aligned}$$

   On retrouve bien que $Z_i \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

(b) On a :

$$S_k = (S_k - S_{k-1}) + (S_{k-1} - S_{k-2}) + \cdots + (S_2 - S_1) + S_1 \boxed{= Z_k + Z_{k-1} + \cdots + D_2 + D_1.}$$

(c) Puisque pour tout $1 \leq i \leq k$, Z_i possède une espérance qui vaut $\frac{1}{p}$, on en déduit par linéarité de l'espérance que $E(S_k)$ existe aussi et vaut :

$$E(S_k) = \sum_{i=1}^{k} E(Z_k) \boxed{= \frac{k}{p}.}$$

6. (a) Les Z_i admettent toutes une même espérance $\dfrac{1}{p}$ et une même variance. De plus elles sont indépendantes (admis dans l'énoncé). Par la loi faible des grands nombres, on peut donc conclure que $\boxed{\overline{Z_k} \text{ converge en probabilité vers } \dfrac{1}{p}.}$

(b) La fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a $\dfrac{1}{p} \in \mathbb{R}_+^*$. Par la propriété admise dans l'énoncé (qui généralise l'une des propriétés du cours), on obtient que $\dfrac{1}{\overline{Z_k}} = \dfrac{k}{S_k} \xrightarrow{P} p$.

$\boxed{\dfrac{k}{S_k} \text{ est donc un estimateur convergent de } p.}$

(c) Puisque $\{[S_{k-1} = j],\ j \geq k-1\}$ est un SCE, la série $\displaystyle\sum_{j \geq k-1} P(S_{k-1} = j)$ converge et sa somme vaut $\boxed{\displaystyle\sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1} = j) = 1.}$

Par le théorème de transfert, la variable aléatoire $\dfrac{k-1}{S_k - 1}$ admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{j \in S_k(\Omega)} \frac{k-1}{j-1} P(S_k = j) = \sum_{j \geq k} \frac{k-1}{j-1} \binom{j-1}{k-1} p^k q^{j-k}$ converge absolument. Puisque cette série est à termes positifs, on étudie sa convergence. On a (en utilisant la formule de Pascal et le fait que $k \geq 2$) :

$$\begin{aligned} \frac{k-1}{j-1} \binom{j-1}{k-1} p^k q^{j-k} &= \binom{j-2}{k-2} p^k q^{j-k} = p \binom{j-2}{k-2} p^{k-1} q^{(j-1)-(k-1)} \\ &= pP(S_{k-1} = j-1) \end{aligned}$$

Il s'agit du terme général d'une série convergente, donc $\boxed{\dfrac{k-1}{S_k - 1} \text{ admet bien une espérance}}$ et on a :

$$E\left(\frac{k-1}{S_k - 1}\right) = p \sum_{j=k}^{+\infty} P(S_{k-1} = j-1) = p \sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1} = j) \boxed{= p.}$$

D'où le résultat souhaité.

(d) On a :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{k}{S_k}\right) - p &= E\left(\frac{k}{S_k}\right) - E\left(\frac{k-1}{S_k - 1}\right) = E\left(\frac{k(S_k - 1) - (k-1)S_k}{S_k(S_k - 1)}\right) \\ &= E\left(\frac{S_k - k}{S_k(S_k - 1)}\right) \end{aligned}$$

Or on a $S_k \geq k$, donc $T_k = \dfrac{S_k - k}{S_k(S_k-1)} \geq 0$. De plus par le calcul précédent, T_k admet une espérance, et par le théorème de transfert :

$$E(T_k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n-k}{n(n-1)} P(S_k = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n-k}{n(n-1)} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} > 0.$$

Ainsi $E_\theta\left(\dfrac{k}{S_k}\right) - p > 0$, et $\boxed{\dfrac{k}{S_k} \text{ est un estimateur biaisé de } p.}$

Partie 3 : calcul de l'espérance de T_k.

7. S_1 désigne le rang d'apparition du premier « pile », alors que T_1 désigne le dernier « pile » de la première série de 1 « pile ». Ainsi on a $\boxed{S_1 = T_1}$.

8. (a) Pour tout $1 \leq j \leq k$, on a :

$$P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_{j-1} \cap F_j = [W = j]$$

et

$$P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap P_k = [W \geq k+1].$$

Or $\{[W = j],\ 1 \leq j \leq k\} \cup \{[W \geq k+1]\}$ est un système complet d'évènements puisque $W(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (W suit une loi $\mathscr{G}(1-p)$). D'où le résultat.

(b) Rappelons que T_k est le rang d'apparition du dernier pile de la première série de k piles consécutifs. Supposons qu'on ait fait « face » au premier lancer. Ce lancer ne contribue pas à une série de « pile ». Ainsi pour obtenir pour la première fois une série de k « pile » consécutifs au n-ème lancer, il faudra donc obtenir cette série pour la première fois au bout de $n-1$ lancers (entre le deuxième lancer et le n-ème lancer). Or la probabilité d'obtenir k « pile » consécutifs pour la première fois au $(n-1)$-ème lancer est précisément $P(T_k = n-1)$. On a donc :

$$\boxed{\forall n \geq k, \quad P_{F_1}(T_k = n) = P(T_k = n-1).}$$

On admet que T_k admet une espérance, de sorte que toutes les espérances conditionnelles considérées existent bien aussi. Notons de plus que $T_k(\Omega) = [\![k, +\infty[\![$ (même argument que pour $S_k(\Omega)$). On a :

$$\begin{aligned}
E(T_k|F_1) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n P_{F_1}(T_k = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} n P(T_k = n-1) \\
&= \underbrace{kP(T_k = k-1)}_{=0} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} n P(T_k = n-1) = \sum_{n=k}^{+\infty} (n+1) P(T_k = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} n P(T_k = n) + \sum_{n=k}^{+\infty} P(T_k = n) \qquad \text{car toutes les séries convergent} \\
&\boxed{= E(T_k) + 1}
\end{aligned}$$

car $\{[T_k = n],\ n \geq k\}$ est un SCE. D'où le résultat voulu.

(c) Soit $i \in [\![2, k]\!]$. De la même façon si $P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i$ est réalisé, les i-premiers lancers ne contribuent pas à la constitution d'une série de k-lancers. Ainsi la probabilité d'obtenir pour la première fois k « piles » consécutifs au n-ème lancer sachant $P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i$ réalisé est égal à la probabilité d'obtenir pour la première fois k « piles » consécutifs en exactement $n-i$ lancers (du $(i+1)$-ème lancer au n-ème). Ainsi on a :

$$\forall n \geq k, \quad P_{P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i}(T_k = n) = P(T_k = n-i).$$

Notons d'ailleurs que $P(T_k = n-i) = 0$ si $n-i<k$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} E(T_k|P_1\cap\cdots\cap P_{i-1}\cap F_i) &= \sum_{n=k}^{+\infty} nP_{P_1\cap\cdots\cap P_{i-1}\cap F_i}(T_k=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} nP(T_k=n-i)\\ &= \sum_{n=k+i}^{+\infty} nP(T_k=n-i) = \sum_{n=k}^{+\infty}(n+i)P(T_k=n)\\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} nP(T_k=n) + i\sum_{n=k}^{+\infty}P(T_k=n) \quad \text{car toutes les séries convergent}\\ &= E(T_n)+i. \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{on a } E(T_k|P_1\cap\cdots\cap P_{i-1}\cap F_i) = E(T_n)+i \text{ pour tout } i\in[\![2,k]\!].}$

(d) Si l'évènement $P_1\cap\cdots\cap P_k$ est réalisé, alors on a obtenu une succession de k « pile » consécutifs lors des k premiers lancers, et donc $T_k = k$. Ainsi la loi conditionnelle de T_k sachant l'évènement $P_1\cap\cdots\cap P_k$ est la loi certaine égale à k. On obtient donc que :

$$E(T_k|P_1\cap\cdots\cap P_k) = E(k|P_1\cap\cdots\cap P_k)\boxed{=k.}$$

9. (a) D'après la formule de l'espérance totale appliquée au système complet d'évènements de la question 8.(a), on a (en admettant que $E(T_k)$ existe) :

$$\begin{aligned} E(T_k) &= \left(\sum_{i=1}^{k} E(T_k|P_1\cap\cdots\cap P_{i-1}\cap F_i)P(P_1\cap\cdots\cap P_{i-1}\cap F_i)\right)\\ &\quad + E(T_k|P_1\cap\cdots\cap P_k)P(P_1\cap\cdots\cap P_k)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{k}(E(T_k)+i)p^{i-1}(1-p)\right)+kp^k\\ &= E(T_k)\sum_{i=1}^{k}p^{i-1}(1-p)+\sum_{i=1}^{k}ip^{i-1}(1-p)+kp^k\\ &\boxed{= E(T_k)\sum_{j=0}^{k-1}p^jq+\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)p^j(1-p)+kp^k} \end{aligned}$$

D'où le résultat voulu.

(b) On a (somme des termes d'une progression géométrique de raison $p\neq 1$) :

$$\sum_{j=0}^{k-1}p^jq = q\frac{1-p^k}{1-p} = 1-p^k.$$

Il faut à présent calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)p^j$. On reconnait ici la « dérivée » de la somme d'une suite géométrique. Soit donc $x\in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{i=0}^{k}x^i = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}.$$

D'où en dérivant par rapport à x (possible car tout est dérivable), on a :

$$\sum_{i=1}^{k}ix^{i-1} = \frac{-(k+1)x^k(1-x)+(1-x^{k+1})}{(1-x)^2} = \frac{1-(k+1)x^k+kx^{k+1}}{(1-x)^2}.$$

D'où pour $x = p$, on a :

$$\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)p^j = \frac{1-(k+1)p^k + kp^{k+1}}{(1-p)^2}.$$

On obtient alors en substituant dans l'expression de la question précédente :

$$E(T_k) = E(T_k)(1-p^k) + \frac{1-(k+1)p^k + kp^{k+1}}{(1-p)} + kp^k$$

soit encore :

$$E(T_k)p^k = \frac{1-(k+1)p^k + kp^{k+1} + kp^k - kp^{k+1}}{(1-p)}$$

D'où finalement le résultat voulu :

$$\boxed{E(T_k) = \frac{1-p^k}{qp^k}.}$$

10. Lorsque la première série de k « piles » consécutifs s'achève, alors on a déjà obtenu au minimum k « piles », et donc $S_k \leq T_k$. Par croissance de l'espérance, on obtient $\boxed{E(S_k) \leq E(T_k)}$. On en déduit avec les calculs précédents que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in]0,1[$:

$$\frac{k}{p} \leq \frac{1-p^k}{qp^k} \Leftrightarrow k(1-p)p^{k-1} \leq 1-p^k \Leftrightarrow kp^{k-1} - kp^k \leq 1-p^k \Leftrightarrow \boxed{kp^{k-1} - 1 \leq kp^k - p^k = (k-1)p^k.}$$

D'où le résultat.