DM12

Devoir Maison type Maths 1 (facultatif)

Dans tout le problème :

• On note n et k deux entiers vérifiant $2 \leq k \leq n$ et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ qui est donc un espace euclidien.

• On note 0_E et $0_{\mathscr{L}(E)}$ respectivement le vecteur nul de E et l'endomorphisme nul de E.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. L'endomorphisme identité de E est noté Id_E.

• Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on note $F^\perp$ l'orthogonal de F et p_F le projecteur orthogonal d'image F, c'est-à-dire l'unique endomorphisme de E vérifiant : $\forall x \in F,\ p_F(x) = x$ et $\forall x \in F^\perp,\ p_F(x) = 0_E$.
On note $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à n lignes et m colonnes (avec $m \geq 1$).
La transposée d'une matrice est notée ${}^tA$.

• Pour tout $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k) \in \mathbb{R}^k$, On note $\mathrm{Diag}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k)$ la matrice diagonale de $\mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ dans cet ordre.

• On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que la **somme** de k sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_k$ de E est le sous-espace vectoriel de E noté $\sum_{i=1}^{k} F_i$ défini par : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} F_i = \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i \ ;\ \text{où } x_i \in F_i \text{ pour tout } i \in [\![1, k]\!] \right\}$.

On rappelle que $F_1, F_2, \ldots, F_k$ sont en **somme directe** si chaque vecteur de $\sum_{i=1}^{k} F_i$ admet une unique décomposition de la forme précédente. Dans ce cas particulier, la somme $\sum_{i=1}^{k} F_i$ est notée $\bigoplus_{i=1}^{k} F_i$.

L'objet de ce problème est la mise en évidence de quelques propriétés algébriques dont les conséquences fondent les test statistiques qui permettent de mesurer l'influence effective d'une ou de plusieurs variables explicatives sur une variable endogène.

La partie II est indépendante de la partie I.

Partie I. Partition de l'identité

Soient k endomorphismes $u_1, u_2, \ldots, u_k$ de E.
On dit que $u_1, u_2, \ldots, u_k$ constituent une partition de l'identité de E si : $u_1 + u_2 + \cdots + u_k = \mathrm{Id}_E$.

1. **Exemple 1 :**

   Dans cette question, $n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A dans la base canonique.

   (a) Préciser le spectre de la matrice A et montrer que A n'est pas diagonalisable.

   (b) Montrer que le polynôme Q tel que $Q(X) = X^3 + X^2$ est un polynôme annulateur de A.

   (c) Existe-t-il un polynôme de degré 2 annulateur de A ?

   (d) Trouver deux polynômes Q_1 et Q_2 de $\mathbb{R}[X]$ pour lesquels les deux endomorphismes $Q_1(f)$ et $Q_2(f)$ sont des projecteurs et constituent une partition de l'identité de $\mathbb{R}^3$.

2. **Exemple 2 :**
On considère dans cette question un endomorphisme f de E diagonalisable et possédant k valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ on note :
 - L_i le polynôme tel que : $L_i(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k \\ j \neq i}} \left(\dfrac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right)$
 - $E_{\lambda_i}(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i.
 - v_i l'endomorphisme de E défini par $v_i = L_i(f)$.

 (a) Justifier l'égalité : $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f)$. En déduire que $\prod_{j=1}^{k} (X - \lambda_j)$ est un polynôme annulateur de f.
 (b) Établir pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ l'inclusion $\mathrm{Im}(v_i) \subset E_{\lambda_i}(f)$.
 (c) Pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, calculer la somme : $\sum_{i=1}^{k} L_i(\lambda_j)$. En déduire que les endomorphismes $v_1, v_2, \dots, v_k$ constituent une partition de l'identité de E.
 (d) Établir pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ l'égalité : $\mathrm{Im(v_i) = E_{\lambda_i}}$. Identifier l'endomorphisme v_i.

3. Soient k endomorphismes de E, $u_1, u_2, \dots, u_k$, constituant une partition de l'identité de E. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note r_i le rang de u_i.

 (a) Établir les relations : $E = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im(u_i)}$ et $n \leq \sum_{i=1}^{k} r_i$.
 (b) Montrer que les sous-espace vectoriels $\mathrm{Im}(u_1)$, $\mathrm{Im}(u_2)$, ..., $\mathrm{Im}(u_k)$ sont en somme directe dans E si, et seulement si, $n = \sum_{i=1}^{k} r_i$.
 (c) Dans cette question, on cherche à montrer l'équivalence des propriétés (1) , (2) et (3) suivantes :
 (1) : $n = \sum_{i=1}^{k} r_i$.
 (2) : Les endomorphismes $u_1, u_2, \dots, u_k$ sont des projecteurs.
 (3) : Pour tout $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ avec $i \neq j$, on a : $u_i \circ u_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 i. En utilisant la trace des matrices de projecteurs, justifier l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1).
 ii. À l'aide de la question 3.(b) et en écrivant, pour $x \in E$ les vecteurs $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_k(x)$ comme des sommes de k vecteurs, montrer l'implication (1) $\Longrightarrow$ (3).
 iii. Conclure en établissant une troisième implication.

Partie II. Représentation matricielle d'un projecteur orthogonal

4. (a) Soit p un endomorphisme de E et P sa matrice dans la base $\mathscr{B}$.
Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si : $P^2 = P$ et ${}^tP = P$.
 (b) Soit f un endomorphisme de E et M sa matrice dans la base $\mathscr{B}$. Établir :
il existe un réel α et un projecteur orthogonal p tels que $f = \alpha\, p$ si, et seulement si :
$\mathrm{tr}(M)\, M^2 = \mathrm{tr}(M^2)\, M$ et ${}^tM = M$, où $\mathrm{tr}(M)$ et $\mathrm{tr}(M^2)$ sont les traces des deux matrices.

5. (a) Écrire une fonction `Python` d'entête `def tr(A)`, calculant la trace d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
 (b) La fonction `issym` suivante permet de tester si une matrice carrée de taille n donnée est symétrique.

```python
1 def issym(A):
2     b = True #affectation de la valeur booléenne True à la variable b
3     for i in range(n-1):
4         for j in range(i+1,n):
5             b = b and (A[i,j] == A[j,i])
6     return(b)
```

Préciser la signification de la ligne 5 du code et donner un exemple d'utilisation de la fonction `issym` en indiquant les valeurs d'entrée et la valeur de sortie obtenue.

(c) La fonction `orthoproj` suivante, dont une ligne de code est incomplète, permet de tester si, pour une matrice carrée M de taille n donnée, il existe un réel α et un projecteur orthogonal p pour lesquels M est la matrice de l'endomorphisme $\alpha\, p$ dans la base $\mathscr{B}$. Cette fonction utilise les deux fonctions précédentes (questions 5.(a) et 5.(b)) et utilise la condition nécessaire et suffisante de la question 4.(b).

```python
1 def orthoproj(n,M):
2     A = np.dot(tr(M)*M,M)
3     B = tr(np.dot(M,M))*M
4     b = issym(n,M)
5     if b :
6         for i in range(n):
7             for j in range(i,n):
8                 b =
9     return(b)
```

Compléter la ligne 8 du code et donner les valeurs de sortie obtenues par application de cette fonction aux deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les définitions et notations suivantes concernent les questions 6 à 9.

Pour tout vecteur $x \in E$, on note X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.
Soit $\mathscr{F} = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ une famille de k vecteurs de E et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{F}$.
On note S la matrice de $\mathscr{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $S_1, S_2, \ldots, S_k$ dans cet ordre.
On rappelle que p_F est le projecteur orthogonal d'image F.

6. (a) Montrer que les deux matrices S et ${}^tS\,S$ ont même rang.

   (b) Soit $y \in E$. Montrer que $y \in F$ si, et seulement si, il existe une matrice $Z \in \mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ telle que $Y = S\,Z$.

   (c) Soit $y \in E$. Montrer que $y \in F^{\perp}$ si, et seulement si, la matrice colonne ${}^tS\,Y$ est nulle.

   (d) Soit $x \in E$ et $y = p_F(x)$. Etablir l'existence d'une matrice $Z \in \mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ telle que $Y = S\,Z$ et ${}^tS\,X = {}^t S\,S\,Z$.

   (e) En déduire l'expression de la matrice de p_F dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de S quand la famille $\mathscr{F}$ est libre.

7. Soit M une matrice symétrique de $\mathscr{M}_k(\mathbb{R})$. On appelle ***inverse de Penrose-Moore de*** M toute matrice N de $\mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

$$M\,N\,M = M \quad ; \quad N\,M\,N = N \quad ; \quad {}^t(M\,N) = M\,N \quad ; \quad {}^t(N\,M) = N\,M$$

(a) Établir l'existence d'une matrice $Q \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ et de réels $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ tels que $M = Q\ \mathrm{Diag}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k)\ {}^tQ$.

(b) On note h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R}$; $h(t) = \begin{cases} 1/t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

On note $M^{(-)}$ la matrice définie par : $M^{(-)} = Q\ \mathrm{Diag}(h(\rho_1), h(\rho_2), \ldots, h(\rho_k))\ {}^tQ$.
Montrer que $M^{(-)}$ est une inverse de Penrose-Moore de M.

(c) Soit N une inverse de Penrose-Moore de M.

i. Justifier les égalités : $N = M\,{}^tN\,N$ et $M^2\,N = M$.

ii. Soit U une matrice de $\mathscr{M}_k(\mathbb{R})$. On suppose que $M^2\,U$ est nulle. Montrer que $M\,U$ est nulle.

iii. On pose $U = N - M^{(-)}$. Justifier que $M^{(-)}$ est l'unique inverse de Penrose-Moore de M.

8. On note $({}^tS\,S)^{(-)}$ l'unique inverse de Penrose-Moore de la matrice ${}^tS\,S$ et on pose : $P = S\,({}^tS\,S)^{(-)}\,{}^tS$.

(a) Montrer que les matrices S et P ont même rang.

(b) Justifier que P est la matrice de p_F dans la base $\mathscr{B}$ et que son expression généralise la formule trouvée dans la question 6.(e) lorsque la famille $\mathscr{F}$ est libre.

9. **Exemple :** on suppose que :
$k = 2$, $s_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $s_2 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, $s_1 \neq 0_E$ et ${}^tS\,S$ non inversible.

(a) Établir l'existence d'un réel θ tel que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, on a : $\beta_i = \theta\,\alpha_i$.

(b) Déterminer une matrice carrée Q pour laquelle la matrice ${}^tQ\,{}^tS\,S\,Q$ est diagonale.

(c) En déduire l'inverse de Penrose-Moore de la matrice ${}^tS\,S$.

(d) Soit $x = x_1\,e_1 + x_2\,e_2 + \cdots + x_n\,e_n$ un vecteur de E. Calculer $p_F(x)$.

Partie III. Application probabiliste

Dans cette partie, $E = \mathbb{R}^n$ et on suppose que toutes les variables aléatoires et tous les vecteurs aléatoires considérés sont définis sur le même espace probabilisé.
Pour tout entier $d \geq 1$, on dit qu'une variable aléatoire $\mathcal{C}$ suit la loi du khi-deux de paramètre d, notée $\chi^2(d)$, si la variable aléatoire $\dfrac{\mathcal{C}}{2}$ suit la loi $\gamma\left(\frac{d}{2}\right)$.
On appelle variable Gaussienne toute variable aléatoire X qui suit une loi normale, ou qui est certaine. On note sa loi $\mathcal{G}(\mu, \sigma^2)$, où μ est l'espérance de X et σ son écart-type. Autrement dit, si $\sigma > 0$, la loi $\mathcal{G}(\mu, \sigma^2)$ est la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, et si $\sigma = 0$, la loi $\mathcal{G}(\mu, \sigma^2)$ est celle d'une variable certaine égale à μ.

10. Soit $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Montrer que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2$ suit la loi $\chi^2(n)$.

Si $G_1, G_2, \ldots, G_n$ sont des variables aléatoires réelles telles que pour tout $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i\,G_i$ est une ***variable gaussienne centrée***, alors on dit que le vecteur aléatoire $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ est un ***vecteur gaussien*** et on note G la matrice colonne de composantes $G_1, G_2, \ldots, G_n$.

11. Soit $(G_1, G_2, \dots, G_n)$ un vecteur gaussien, M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ un vecteur aléatoire tel que la matrice colonne H de composantes $H_1, H_2, \dots, H_n$ vérifie : $H = M\,G$.
   (a) Montrer que $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ est un vecteur gaussien.
   (b) Justifier que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, la variable aléatoire $G_i\,G_j$ admet une espérance notée $E(G_i\,G_j)$.

   On note alors $\Lambda(G)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\Lambda(G) = (E(G_i\,G_j))_{1\leq i,j\leq n}$ et on admet pour la suite que la loi d'un vecteur gaussien $(G_1, G_2, \dots, G_n)$ est caractérisée par la matrice $\Lambda(G)$. Autrement dit, si $(G_1, G_2, \dots, G_n)$ et $(R_1, R_2, \dots, R_n)$ sont deux vecteurs gaussiens tels que $\Lambda(G) = \Lambda(R)$, alors ils ont la même loi, c'est à dire que $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[G_i \leq x_i]\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[R_i \leq x_i]\right)$.

12. Soient $G_1, G_2, \dots, G_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
   (a) Montrer que $(G_1, G_2, \dots, G_n)$ est un vecteur gaussien. Déterminer $\Lambda(G)$.
   (b) Soit Q une matrice orthogonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ un vecteur aléatoire tel que la matrice colonne H de composantes $H_1, H_2, \dots, H_n$ vérifie : $H = Q\,G$.
   Montrer que les variables aléatoires $H_1, H_2, \dots, H_n$ sont mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

13. Soit $(G_1, G_2, \dots, G_n)$ un vecteur gaussien dont les composantes $G_1, G_2, \dots, G_n$ sont mutuellement indépendantes et de variance égale à 1.
   Soient $P_1, P_2, \dots, P_k$ des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rangs respectifs $r_1, r_2, \dots, r_k$.
   On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} P_i = I_n$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} r_i = n$.
   (a) Justifier que $P_1, P_2, \dots, P_k$ sont des matrices de projecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et dont les images sont deux à deux orthogonales.
   (b) En déduire l'existence d'une matrice orthogonale Q de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle chacune des matrices $Q\,P_i\,{}^tQ$, où $1 \leq i \leq k$, est diagonale.
   (c) On suppose que $r_1 \neq 0$. Montrer que la variable aléatoire ${}^tG\,P_1\,G$ suit la loi $\chi^2(r_1)$.
   (d) Montrer que les variables aléatoires ${}^tG\,P_1\,G$, ${}^tG\,P_2\,G$, , ${}^tG\,P_k\,G$ sont mutuellement indépendantes.

14. Soient q et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2 et $(X_{i,j})_{1\leq i\leq q\ ,\ 1\leq j\leq m}$ une famille de $q \times m$ variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
   On pose : $\displaystyle\overline{X} = \frac{1}{q \times m}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m} X_{i,j}$ et pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, $\displaystyle Z_j = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} X_{i,j}$.
   (a) Déterminer les lois respectives des variables aléatoires $\overline{X}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}(X_{i,j} - \overline{X})^2$ et établir l'indépendance de ces deux variables aléatoires.
   (b) Déterminer les lois respectives des variables aléatoires $\displaystyle\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}(X_{i,j} - Z_j)^2$ et $\displaystyle q\sum_{j=1}^{m}(Z_j - \overline{X})^2$ et établir l'indépendance de ces deux variables aléatoires.