DM12

Devoir maison facultatif à rendre le 13/03/2023

Exercice 1

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n \geq \sqrt{n}$. Quelle est la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{x} \leq \dfrac{1+x}{2}$.

   (b) En déduire que pour tout entier n, $u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}$, puis que la suite $\left(\dfrac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

   (c) Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

   (d) En remarquant que, pour tout entier n non nul, $1 \leq \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \dfrac{u_{n-1}}{n}}$, en déduire un équivalent de u_n en $+\infty$.

3. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$.

   (a) À l'aide d'un développement limité en 0 de $\sqrt{1+x}$, montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ que l'on précisera.

   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n - u_{n-1})$.

   (c) Justifier alors qu'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout entier n, si $n \geq N_0$ alors $u_n \geq u_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

   (d) Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

4. Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def suite(n)` qui calcule le terme d'indice n de la suite lorsque $u_0 = 1$.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. On se place dans un espace euclidien E de dimension n et on note $\mathscr{B} = (e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n)$ une base orthonormale de E. Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

Partie 1 : définition de l'adjoint $u^\star$ d'un endomorphisme u de E.

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E.
On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté $u^\star$, qui à tout vecteur y de E associe le vecteur $u^\star(y)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$$

1. (a) Montrer que si $u^\star$ existe, alors on a, pour tout y de E :

$$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i.$$

(b) En déduire que si $u^\star$ existe, alors $u^\star$ est unique.

2. (a) Vérifier que l'application $u^\star$ définie par l'égalité établie à la question 1.(a) est effectivement un endomorphisme de E.
   (b) Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de E, appelé adjoint de u, vérifiant :
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle.$$

Partie 2 : étude des endomorphismes normaux.

On dit que u est un endomorphisme normale quand on a l'égalité :
$$u \circ u^\star = u^\star \circ u.$$

3. Soit f un endomorphisme symétrique de E. Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.

4. (a) Montrer que : $\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|u^\star(x)\|$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^\star)$.
5. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par $u^\star$.
6. On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous espace propre associé.
   (a) Montrer que E_λ est stable par $u^\star$.
   (b) Établir que $(u^\star)^\star = u$ puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Exercice 3

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Rappeler quelle est la loi suivie par S_n. Donner l'espérance et la variance de S_n.
2. À l'aide du théorème de la limite centrée, établir que $\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leq n) = \dfrac{1}{2}$.
3. En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
4. (a) Utiliser le résultat précédent pour montrer que $\displaystyle\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz}\,\mathrm{d}z \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2n^{n+1}}$.
   (b) On admet que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$. En déduire un nouvel équivalent de $\displaystyle\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz}\,\mathrm{d}z$.

Problème.

On effectue des lancers d'une pièce donnant « Pile » avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et donnant « Face » avec la probabilité $q = 1-p$, les différents lancers étant supposés indépendants.
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (resp. F_k) l'événement : « la pièce donne pile (resp. face) au k-ème lancer », on note également S_k le rang du k-ème pile et T_k le rang d'apparition du dernier pile de la première série de k piles consécutifs. On suppose que S_k et T_k sont deux variables aléatoires toutes deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Par exemple, si les lancers donnent $F_1, P_2, F_3, P_4, F_5, P_6, P_7, P_8$, alors S_1 et T_1 prennent la valeur 2, S_2 prend la valeur 4, T_2 prend la valeur 7, S_3 prend la valeur 6, T_3 prend la valeur 8, S_4 prend la valeur 7 et S_5 prend la valeur 8.

Partie I : simulations de S_k et T_k.

1. Compléter les lignes 7 et 9 du script **Python** suivant pour qu'il affiche la valeur prise par S_k lorsque k et p sont entrés par l'utilisateur :

```python
1 k = int(input('donnez une valeur pour k :'))
2 p = int(input('donnez une valeur pour p :'))
3 n = 0
4 c = 0
5 while c<k :
6         n=n+1
7         if --- :
8                 c = c+1
9 print(---)
```

2. On souhaite que le script précédent affiche la valeur prise par T_k. Remplacer la ligne 7 par les suivantes, dûment complétées :

```python
7         if --- :
8                 c = c+1
9         else :
10                ---
```

Partie 2 : calcul de l'espérance S_k.

3. Donner la loi de S_1 ainsi que son espérance.

4. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à k, on note X_{n-1} la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus lors des $n-1$ premiers lancers.

   (a) Donner la loi de X_{n-1}.

   (b) Donner $S_k(\Omega)$ puis écrire l'évènement $[S_k = n]$ à l'aide de la variable X_{n-1}.

   (c) En déduire que la loi de S_k est donnée par :

$$\forall n \geq k,\ P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.$$

5. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On pose $Z_1 = S_1$ et, pour tout entier naturel i supérieur ou égal à 2, on pose $Z_i = S_i - S_{i-1}$.
   On admet que $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

   (a) Donner la loi des variables aléatoires Z_i.

   (b) Exprimer S_k à l'aide de certaines des variables Z_i.

   (c) En déduire que S_k possède une espérance et donner sa valeur.

6. Estimation.
   On suppose le paramètre p inconnu et on souhaite trouver un estimateur de p. On admet que, si une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire Y, alors pour toute fonction f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $P(Y \in I) = 1$, la suite $(f(Y_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $f(Y)$.

(a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on pose $\overline{Z_k} = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} Z_i$.

Montrer que la suite $\left(\overline{Z_k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité.

(b) En déduire que $\dfrac{k}{S_k}$ est un estimateur convergent de p.

(c) Donner sans calcul la valeur de $\displaystyle\sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1} = j)$. Monter alors que la variable aléatoire $\dfrac{k-1}{S_k - 1}$ possède une espérance et que l'on a : $E\left(\dfrac{k-1}{S_k-1}\right) = p$.

(d) En déduire que $\dfrac{k}{S_k}$ est un estimateur biaisé de p.

Partie 3 : calcul de l'espérance de T_k.

7. Comparer les variables aléatoires S_1 et T_1.

8. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On admet que T_k possède une espérance que l'on se propose de déterminer.

   (a) Justifier, en utilisant la variable aléatoire W égale au rang du premier face lors de l'expérience décrite au début de ce problème, que les évènements $F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2 \cap F_3, P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4, \dots, P_1 \cap \dots \cap P_{k-1} \cap F_k$ et $P_1 \cap \dots \cap P_{k-1} \cap P_k$, forment un système complet d'évènements.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à k, on a $P_{F_1}(T_k = n) = P(T_k = n-1)$, puis en déduire que l'espérance conditionnelle $E(T_k|F_1)$ est égale à $1 + E(T_k)$.

   (c) De la même façon, déterminer, pour tout i de $[\![2, k]\!]$, la valeur de $E(T_k|P_1 \cap \dots \cap P_{i-1} \cap F_i)$.

   (d) Justifier que $E(T_k|P_1 \cap \dots \cap P_k) = k$.

9. (a) Déduire des questions précédentes, la relation :

$$E(T_k) = \sum_{j=0}^{k-1}(j+1)p^j q + E(T_k)\sum_{j=0}^{k-1} p^j q + kp^k.$$

   (b) Établir finalement que :

$$E(T_k) = \frac{1-p^k}{qp^k}.$$

10. Justifier que $E(S_k) \leq E(T_k)$ puis utiliser certains résultats des parties 2 et 3 pour établir, sans étude de fonction, que l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in]0,1[, \quad (k-1)p^k \geq kp^{k-1} - 1.$$