DM13

Correction du devoir maison

Exercice 1 (Edhec 2012)

1. Il s'agit ici d'une question difficile qui nécessite de bien connaitre le théorème de division euclidienne des polynômes dont on rappelle l'énoncé :

> **Rappel. Théorème de la division euclidienne.**
> Soient A, B deux polynômes tels que $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :
> $$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$
> Q et R sont appelés le *quotient* et le *reste* de la *division euclidienne* de A par B.

Soit donc $P_1, P_2 \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. D'après le théorème de division euclidienne, il existe des couples (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) uniques tels que :

$$(1 - X + X^2)P_1 = (1 + X^3)Q_1 + R_1 \quad \text{avec} \quad \deg(R_1) \leq 2$$

et

$$(1 - X + X^2)P_2 = (1 + X^3)Q_2 + R_2 \quad \text{avec} \quad \deg(R_2) \leq 2.$$

Notons que par définition, on a $f(P_1) = R_1$ et $f(P_2) = R_2$.

En multipliant respectivement par λ_1 et λ_2 ces équations et en sommant, on a :

$$(1 - X + X^2)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = (1 + X^3)(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) + (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2).$$

De plus, on a $\deg(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) \leq 2$. Par unicité dans le théorème de division euclidienne, $(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2)$ est donc **le** reste de la division euclidienne du polynôme $(1 - X + X^2)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)$ par $1 + X^3$. Par définition de f, on obtient que :

$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2).$$

D'où la linéarité de f. Comme de plus $f(P)$ est un polynôme de degré ≤ 2 en tant que reste de la division euclidienne par $(1 + X^3)$, on a bien $f(P) \in E$. Ainsi $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$

2. (a) On effectue trois divisions euclidiennes (qu'on posera si nécessaire). On a :

$$(1 - X + X^2) \times 1 = (1 + X^3) \times 0 + (1 - X + X^2) \quad \Rightarrow \boxed{f(e_0) = 1 - X + X^2,}$$

$$(1 - X + X^2) \times X = X - X^2 + X^3 = (1 + X^3) \times 1 + (-X^2 + X - 1) \quad \Rightarrow \boxed{f(e_1) = -1 + X - X^2,}$$

$$(1 - X + X^2) \times X^2 = X^2 - X^3 + X^4 = (1 + X^3) \times (X - 1) + (X^2 - X + 1) \quad \Rightarrow \boxed{f(e_2) = 1 - X + X^2.}$$

En particulier, on a bien : $\boxed{f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2).}$

(b) On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_0), f(e_1), f(e_2)) = \mathrm{Vect}(1 - X + X^2)$ d'après la question précédente. Comme $1 - X + X^2 \neq 0_E$, $(1 - X + X^2)$ est une famille libre et génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$, et $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$.

(c) Par le théorème du rang, on a :

$$\dim(E) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) \quad \Rightarrow \quad \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim(E) - \dim \mathrm{Im}(f) = 3 - 1 \boxed{= 2.}$$

De plus on a (en utilisant la linéarité de f) :

$$f(e_0) = -f(e_1) \quad \Rightarrow \quad f(e_0 + e_1) = f(1 + X) = 0_E$$

et

$$f(e_0) = f(e_2) \quad \Rightarrow \quad f(e_2 - e_0) = f(X^2 - 1) = 0_E$$

Ainsi $X^2 - 1$ et $X + 1$ appartiennent à $\text{Ker}(f)$. Puisque $(X+1, X^2-1)$ est une famille de vecteurs de $\text{Ker}(f)$ libre car échelonnée en degré, de cardinal égal à $\dim \text{Ker}(f) = 2$, c'est donc une base de $\text{Ker}(f)$.

3. (a) D'après ce qui précède, on a $\text{Im}(f) = \text{Vect}(1 - X + X^2)$. Calculons $f(1 - X + X^2)$. Pour cela, on effectue la division euclidienne de $(1 - X + X^2)(1 - X + X^2) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$ par $1 + X^3$. On obtient (en posant la division) :

$$X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1 = (1 + X^3)(X - 2) + 3(X^2 - X + 1).$$

Ainsi on a $f(X^2 - X + 1) = 3(X^2 - X + 1)$. Plus généralement pour tout $P \in \text{Im}(f)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda(1 - X + X^2)$, et on a :

$$f(P) = \lambda f(X^2 - X + 1) = 3\lambda(X^2 - X + 1) \boxed{= 3P.}$$

Ainsi $\boxed{\text{3 est valeur propre de } f}$ et on a :

$$\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f - 3\text{Id}). \qquad (*)$$

D'après ce qui précède, 0 et 3 sont donc valeurs propres de f et on a :

$$\dim(E_0(f)) = 2 \quad \text{et} \quad \dim(E_3(f)) \geq 1.$$

Or d'après le cours, on a :

$$\dim(E_0(f)) + \dim(E_3(f)) \leq 3.$$

Ainsi on obtient que $\dim(E_3(f)) = 1 = \dim \text{Im}(f)$. Avec $(*)$, on a donc :

$$\boxed{\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - 3\text{Id}).}$$

(b) Avec ce qui précède, on a obtenu :

$$\dim(E_0(f)) + \dim(E_3(f)) = \dim(E).$$

Ainsi on a $\text{Sp}(f) = \{0, 3\}$ et $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$ d'après le cours.

4. On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P, Q) de polynômes de E associe le réel $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$, où l'on a noté $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$.

(a) Montrons que φ est un produit scalaire défini sur E.

- **Linéarité à gauche.** Soient $P = a_0 + a_1X + a_2X^2, Q = b_0 + b_1X + b_2X^2, R = c_0 + c_1X + c_2X^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a $\lambda P + \mu Q = (\lambda a_0 + \mu b_0) + (\lambda a_1 + \mu b_1)X + (\lambda a_2 + \mu b_2)X^2$, d'où :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q, R) &= \sum_{i=0}^{2} (\lambda a_i + \mu b_i)c_i = \lambda \sum_{i=0}^{2} a_i c_i + \mu \sum_{i=0}^{2} b_i c_i \\ &= \lambda\varphi(P, R) + \mu\varphi(Q, R). \end{aligned}$$

- **Symétrie.** Soient $P = a_0 + a_1X + a_2X^2, Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$. On a :

$$\varphi(Q, P) = \sum_{i=0}^{2} b_i a_i = \sum_{i=0}^{2} a_i b_i = \varphi(P, Q)$$

Ainsi φ est symétrique, et donc aussi linéaire à droite.

- **Positivité.** Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in E$. On a :
$$\varphi(P,P) = \sum_{i=0}^{2} a_i^2 \geq 0.$$
- **Défini positif.** Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in E$. On a :
$$\varphi(P,P) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{2} \underbrace{a_i^2}_{\geq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_i = 0 \text{ pour } i = 0,1,2 \quad \Rightarrow \quad P = 0_E.$$

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est bien un produit scalaire sur } E.}$

(b) Rappelons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1+X, X^2-1)$ et que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(X^2 - X + 1)$. On a :
$$\varphi(1+X, 1-X+X^2) = 1-1+0 = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(-1+X^2, 1-X+X^2) = -1+0+1 = 0.$$
Ainsi on a $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)^{\perp}$. Comme de plus $\dim \mathrm{Im}(f)^{\perp} = \dim(E) - \dim \mathrm{Im}(f) = 3 - 1 = 2 = \dim \mathrm{Ker}(f)$, on a $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^{\perp}}$. En d'autres termes, $\mathrm{Ker}(f)$ est bien le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Im}(f)$ dans E pour φ.

5. (a) On sait déjà que $\mathscr{B}$ est une base de E. C'est de plus une famille orthonormale car :
$$\varphi(1,1) = 1,\ \varphi(1,X) = 0,\ \varphi(1,X^2) = 0,\ \varphi(X,X) = 1,\ \varphi(X,X^2) = 0,\ \varphi(X^2,X^2) = 1.$$
Donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base orthonormale pour le produit scalaire } \varphi.}$

(b) D'après les calculs faits en 2.(a), on a :
$$\boxed{M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$
Cette matrice est symétrique dans la base **orthonormée** $\mathscr{B}$ pour le produit scalaire φ. Donc f est un endomorphisme symétrique pour φ. Par le cours, on sait que f est diagonalisable (on retrouve le résultat de 3.(b)), et que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Ainsi $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id})$ sont orthogonaux pour φ. $\boxed{\text{Ils sont donc supplémentaires orthogonaux}}$ et on retrouve ainsi le résultat de la question 4.(b).

Exercice 2 (Ecricome 2006)

1. (a) La fonction $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[\mapsto 1 + xt$ est polynomiale donc $\mathscr{C}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Par composition avec $u \mapsto \sqrt{u}$ $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a que $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[\mapsto \sqrt{1+xt}$ est $\mathscr{C}^2$.
De même, $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[\mapsto -t^2$ est polynomiale donc $\mathscr{C}^2$, et $u \mapsto e^u$ est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[\mapsto e^{-t^2}$ est $\mathscr{C}^2$.
Par produit, on en déduit que $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^2 \text{ sur } [0,+\infty[\times[0,+\infty[.}$

(b) Pour tout $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, on a (en utilisant la formule $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$) :
$$\boxed{\partial_1 f(x,t) = e^{-t^2} \frac{t}{2\sqrt{1+xt}} = e^{-t^2} \frac{t}{2}(1+xt)^{-1/2}}$$
et (en utilisant la formule $(u^{\alpha})' = \alpha u' u^{\alpha-1}$) :
$$\boxed{\partial_{1,1}^2 f(x,t) = -e^{-t^2} \frac{t^2}{4}(1+xt)^{-3/2} = -e^{-t^2} \frac{t^2}{4(1+xt)^{3/2}}.}$$

(c) Pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, on a $1+xt \geq 1$, et donc :

$$\left|\partial^2_{1,1} f(x,t)\right| = e^{-t^2}\frac{t}{4}(1+xt)^{-3/2} = -e^{-t^2}\frac{t}{4(1+xt)^{3/2}} \boxed{\leq \frac{t^2}{4}e^{-t^2}.}$$

2. Soit $\alpha > 0$. La fonction $t \mapsto t^\alpha e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc l'intégrale est généralisée en $+\infty$. On a :

- $t^2 t^\alpha e^{-t^2} \underset{u=t^2}{=} u^{1+\alpha/2}e^{-u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, de sorte que $t^\alpha e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$;
- $\dfrac{1}{t^2} > 0$ pour tout $t > 0$;
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en $+\infty$ d'exposant $2 > 1$.

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

Pour $x = 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge comme intégrale de Gauss, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge également d'après l'étude précédente avec $\alpha = 1$.

Supposons $x > 0$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}\sqrt{1+xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc l'intégrale est généralisée en $+\infty$. Et on a :

- $e^{-t^2}\sqrt{1+xt} \underset{t\mapsto+\infty}{\sim} e^{-t^2}\sqrt{x}t^\alpha$ avec $\alpha = 1/2 > 0$;
- $e^{-t^2}t^\alpha \geq 0$ pour tout $t \geq 0$;
- l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (on vient de le faire).

Par théorème de comparaison, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,\mathrm{d}t \text{ converge pour tout } x \geq 0.}$

On conclut de la même manière avec l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}}\,\mathrm{d}t$, en remarquant que :

$$\frac{te^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}} \underset{t\mapsto+\infty}{\sim} = \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{xt}} = \frac{t^{1/2}e^{-t^2}}{\sqrt{x}}.$$

3. (a) Soient $x, y \in [0,+\infty[$ tels que $x \leq y$. On a pour tout $t \geq 0$:

$$1+xt \leq 1+yt \underset{u\mapsto\sqrt{u}\text{ croissante}}{\Rightarrow} \sqrt{1+xt} \leq \sqrt{1+yt} \underset{e^{-t^2}\text{ positive}}{\Rightarrow} e^{-t^2}\sqrt{1+xt} \leq e^{-t^2}\sqrt{1+yt}$$

Et par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+yt}\,\mathrm{d}t.$$

Donc $\boxed{g \text{ est croissante sur } [0,+\infty[.}$

(b) Soit $t \geq 0$ **fixé**. La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $x \mapsto \partial_1 f(x,t)$, et de dérivée seconde $x \mapsto \partial^2_{1,1} f(x,t)$ dont on a vu précédemment qu'elle est bornée par la quantité $\dfrac{t^2}{2}e^{-t^2}$.

Soit $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$. D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée entre x et x_0, on obtient :

$$\boxed{|f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\partial_1 f(x_0,t)| \leq \frac{t^2}{4}e^{-t^2}\frac{|x-x_0|^2}{2} = \frac{t^2}{8}e^{-t^2}|x-x_0|^2.}$$

(c) Intégrons l'inégalité précédente entre 0 et $+\infty$ (ce qui est légitime car l'intégrale du terme de droite converge d'après la question 2.) :

$$\int_0^{+\infty} |f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\partial_1 f(x_0,t)| \,\mathrm{d}t \leq \frac{|x-x_0|^2}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} \,\mathrm{d}t.$$

D'où par l'inégalité triangulaire (tout converge bien absolument par ce qui précède) :

$$\begin{aligned}\left| g(x) - g(x_0) - (x-x_0) \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0,t)\,\mathrm{d}t \right| &= \left| \int_0^{+\infty} f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\partial_1 f(x_0,t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} |f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\partial_1 f(x_0,t)| \,\mathrm{d}t \\ &\boxed{\leq \frac{|x-x_0|^2}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} \,\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

(d) Il s'agit de revenir à la définition de la dérivabilité : g est dérivable en x_0 si et seulement si la limite du taux d'accroissement existe. Or, en divisant la relation de la question précédente par $|x-x_0|$, il vient pour $x \neq x_0$ que :

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0,t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{|x-x_0|}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} \,\mathrm{d}t$$

Cette dernière intégrale est indépendante de x, et donc :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|x-x_0|}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} \,\mathrm{d}t = 0.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0,t)\,\mathrm{d}t \right| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0,t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi $\boxed{g \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et on a } g'(x_0) = \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0,t)\,\mathrm{d}t.}$ Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in [0, +\infty[$, on en déduit que g est dérivable sur cet intervalle.

Enfin $t \mapsto \partial_1 f(x_0,t)$ est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+$, et donc par positivité de l'intégrale, $g'(x_0) \geq 0$, ce qui permet de retrouver le fait que $\boxed{g \text{ est croissante.}}$

Exercice 3 (Edhec 2010)

1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la fonction $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \dfrac{1}{x_i}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U comme quotient de fonctions polynomiales, donc $\mathscr{C}^2$ sur U, dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n$ est polynomiale donc $\mathscr{C}^2$ sur U. Par sommes et produit, on en déduit que $\boxed{f_n \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } U.}$

2. Calculons les dérivées partielles de f_n sur U. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\partial_i f_n(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) - \frac{1}{x_i^2}(x_1 + \cdots + x_n)$$

Cherchons les points critiques de f_n en résolvant :

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)-\frac{1}{x_1^2}(x_1+\cdots+x_n)=0 \\ \left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)-\frac{1}{x_2^2}(x_1+\cdots+x_n)=0 \\ \dots \\ \left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)-\frac{1}{x_n^2}(x_1+\cdots+x_n)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)-\frac{1}{x_1^2}(x_1+\cdots+x_n)=0 & (L_1) \\ \left(\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}\right)(x_1+\cdots+x_n)=0 & (L_2)-(L_1) \\ \dots \\ \left(\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_n^2}\right)(x_1+\cdots+x_n)=0 & (L_n)-(L_1) \end{cases}$$

$$\underset{x_1+\cdots+x_n\neq 0 \text{ sur } U}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)-\frac{1}{x_1^2}(x_1+\cdots+x_n)=0 \\ \frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}=0 \\ \dots \\ \frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_n^2}=0 \end{cases}$$

$$\underset{x_1,\dots,x_n>0 \text{ sur } U}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)-\frac{1}{x_1^2}(x_1+\cdots+x_n)=0 \\ x_1=x_2 \\ \dots \\ x_1=x_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n}{x_1}-\frac{1}{x_1^2}(nx_1)=0 \\ x_1=x_2 \\ \dots \\ x_1=x_n \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{f_n \text{ possède une infinité de points de critiques, à savoir tous les } (a,\dots,a) \text{ avec } a>0.}$

3. (a) Pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$ avec $i\neq j$:

$$\partial^2_{i,i} f(x_1,\dots,x_n) = -\frac{1}{x_i^2}-\frac{1}{x_i^2}-(-2)x_i^{-3}(x_1+\cdots+x_n)\boxed{=-\frac{2}{x_i^2}+2\frac{x_1+\cdots+x_n}{x_i^3},}$$

$$\boxed{\partial^2_{j,i} f(x_1,\dots,x_n) = -\frac{1}{x_j^2}-\frac{1}{x_i^2}.}$$

(b) Soit $(a,\dots,a)$ un point critique de f_n avec $a>0$. On a pour $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$ avec $i\neq j$:

$$\partial^2_{i,i} f(a,\dots,a) = -\frac{2}{a^2}+2\frac{na}{a^3}=\frac{2}{a^2}(n-1).$$

$$\partial^2_{j,i} f(a,\dots,a) = -\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2}=-\frac{2}{a^2}.$$

Ainsi :

$$\nabla^2 f(a,\dots,a) = \frac{2}{a^2}\begin{pmatrix} (n-1) & -1 & \dots & -1 \\ -1 & (n-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & (n-1) \end{pmatrix} \boxed{=\frac{2}{a^2}\left(nI_n-J_n\right).}$$

4. (a) Toutes les colonnes de J_n sont identiques et non nulles, donc $\boxed{\mathrm{rg}(J_n)=1.}$ Ainsi $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } J_n \text{ et } \dim(E_0(J_n))=n-\mathrm{rg}(J_n)=n-1.}$

(b) La matrice J_n étant symétrique réelle, elle est diagonalisable. De plus, 0 est valeur propre de J_n et $\dim(E_0(J_n)) = n-1$. Reste donc une valeur propre λ qu'il reste à déterminer, qu'on obtient en prenant la trace :

$$\lambda + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{(n-1) \text{ fois}} = \mathrm{Tr}(J_n) = n.$$

Ainsi $\lambda = n$, et $\boxed{\text{les valeurs propres de } J_n \text{ sont } 0 \text{ et } n.}$

Autre méthode. Puisque $J_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, n est valeur propre et $\dim(E_n(J_n)) \geq 1$. On obtient :

$$(n-1) + 1 \leq \dim(E_0(J_n)) + \dim(E_n(J_n)) \underbrace{\leq}_{\text{Cours}} n.$$

Ainsi, $\dim(E_0(J_n)) + \dim(E_n(J_n)) = n$. On retrouve donc que J_n est diagonalisable, et surtout que $\boxed{Sp(J_n) = \{0, n\}.}$

On a $K_n = nI_n - J_n$, donc $\boxed{\text{les valeurs propres de } K_n \text{ sont } n-0=n \text{ et } n-n=0}$. En effet, si on note P une matrice inversible telle que $P^{-1}J_nP = diag(0, \ldots, 0, n$, alors on a :

$$P^{-1}K_nP = nI_n - diag(0, \ldots, 0, n) = diag(n, \ldots, n, 0)$$

et les valeurs propres sont bien 0 et n.

(c) Il n'est donc pas possible de conclure ici car 0 est valeur propre de la hessienne, et que toutes les autres valeurs propres sont positives.

5. **Étude du cas $n = 2$.**

(a) Calculons :

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Ainsi $\boxed{(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2.}$

(b) D'après la question précédente :

$$f_2(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)(x_1 + x_2) = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1x_2} \geq 4.$$

De plus, $f_2(a, a) = \dfrac{(2a)^2}{a^2} = 4$ pour tout $a > 0$. Ainsi f_2 admet un minimum global sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ qui vaut 4, atteint en tout point critique (a, a) avec $a > 0$.

6. Rappelons que l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique s'écrit pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|, \qquad \text{soit} \qquad \left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2},$$

soit encore en élevant au carré,

$$\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right).$$

Afin de faire apparaitre f_n, appliquons cette inégalité avec $x = (\sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_n})$ et $y = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$.

On obtient :

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j}\right) \qquad \text{soit encore} \qquad n^2 \leq f_n(x).$$

De plus, en tout point critique $(a, \ldots, a)$ où $a > 0$:

$$f_n(a, \ldots, a) = \frac{n}{a} \times (na) = n^2.$$

Ainsi $\boxed{f_n \text{ admet un minimum global sur } U, \text{ égal à } n^2}$, atteint en chacun de ses points critiques $(a, \ldots, a)$ $(a > 0)$.

Problème (Edhec 2018)

Partie I : simulations de S_k et T_k.

1. Étant donné la structure du programme (tant que $c < k$, $n = n+1$), on observe que n correspond au nombre de lancers de la pièce, et que c représente le nombre de piles obtenus lors de ces n lancers. Le paramètre c augmente de 1 lorsque la pièce tombe sur pile, ce qui survient avec une probabilité p. Il nous faut donc une instruction qui a une probabilité p de se réaliser, et alors on augmentera c de 1, et $1 - p$ d'échouer, et c restera alors inchangé. Une manière de le faire est d'utiliser l'instruction `rd.random()<p` dans la boucle `if`. En effet `rd.random()` renvoie une réalisation d'une variable suivant une loi $\mathscr{U}([0, 1])$. Cette réalisation est donc $\leq p$ avec une probabilité p, ce qui correspond bien à la probabilité d'obtenir un pile avec la pièce au n-ième lancer.

   La boucle `while` s'arrête lorsque le compteur c est égal à k, ce qui correspond à obtenir k piles. La variable n contient alors le nombre de lancers nécessaires à l'obtention des k piles, ce qui correspond à une réalisation de S_k.

   On obtient donc le code suivant :

```python
k = int(input('donnez une valeur pour k :'))
p = int(input('donnez une valeur pour p :'))
n = 0
c = 0
while c<k :
        n=n+1
        if rd.random()<)p :
                c = c+1
print(n)
```

2. De même, n représente le nombre de lancers. Mais ici, la variable c doit contenir le nombre de piles **consécutifs**, et on s'arrête lorsqu'on a obtenu k piles consécutifs, c'est-à-dire lorsque $c = k$, pour renvoyer n encore. On doit donc augmenter c de 1 lorsqu'on obtient un pile, ce qu'on simulera encore par `rd.random()<=p`. Si par contre on obtient un face, ce qui correspondra au cas où `rd.random()<=p` n'est pas réalisé, alors on remet le compteur c à 0 (la série de piles obtenue étant de longueur $< k$). On obtient donc le code suivant :

```python
        if rd.random()<=p :
                c = c+1
        else :
                c = 0
```

Partie 2 : calcul de l'espérance S_k.

3. S_1 correspond au rang du premier pile dans une succession de lancers. C'est donc le rang du premier succès (« obtenir pile »), avec probabilité de succès p, dans une succession d'épreuves de

Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi $\boxed{S_1 \text{ suit une loi } \mathscr{G}(p)}$. En particulier $E(S_1)$ existe et vaut $\boxed{E(S_1) = \frac{1}{p}}$.

4. (a) X_{n-1} est égal au nombre de piles obtenus lors des $n-1$ premiers lancers. Il s'agit donc du nombre de succès lors de $n-1$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes avec probabilité de succès p. Donc $\boxed{X_{n-1} \text{ suit une loi } \mathscr{B}(n-1,p).}$

   (b) S_k est le rang d'apparition du k-ème pile. Pour cela, on doit donc avoir lancer au moins k fois la pièce. Ainsi $S_k \geq k$. De plus pour tout $n \geq k$, l'évènement $[S_k = n]$ est bien réalisable puisqu'on peut obtenir $n-k$ « faces » suivis de k « piles ». Ainsi on a $\boxed{S_k(\Omega) = [\![k, +\infty[\![= \{n \in \mathbb{N},\ n \geq k\}}$.

   L'évènement $[S_k = n]$ est réalisé si et seulement si on obtient le k-ème « pile » au n-ème lancer, soit si et seulement si on a obtenu $k-1$ « pile » parmi des $n-1$ premiers lancers et pile lors du n-ème lancer. Ainsi on a :

$$\boxed{[S_k = n] = [X_{n-1} = k-1] \bigcap P_n.}$$

   (c) Les évènements $[X_{n-1} = k-1]$ et P_n étant indépendants, puisque les lancers le sont, on a :

$$P(S_k = n) = P([X_{n-1} = k-1] \bigcap P_n) = P(X_{n-1} = k-1)P(P_n) = \left(\binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}\right) p$$

   car $X_{n-1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n-1,p)$. On obtient donc que :

$$\boxed{\forall n \geq k, \quad P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.}$$

5. (a) Z_i représente le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du i-ème « pile » après l'obtention du $(i-1)$-ème « pile ». Il s'agit donc du nombre de lancers nécessaires à l'obtention d'un pile. Les lancers étant indépendants, $\boxed{Z_i \text{ suit donc une loi } \mathscr{G}(p).}$

   Cette justification conviendrait très bien lors du concours. En détails, au cas où l'argument précédent ne vous convainc pas totalement, on peut aussi le retrouver par le calcul suivant : on applique la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $([S_{i-1} = n])_{n \geq i-1}$. On obtient que pour tout $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
P(Z_i = k) &= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(Z_i = k,\ S_{i-1} = n) = \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_i = k+n,\ S_{i-1} = n) \\
&= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P([S_{i-1} = n] \cap F_{n+1} \cap \cdots \cap F_{n+k-1} \cap P_{n+k}) \\
&= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_{i-1} = n)P(F_{n+1}) \ldots P(F_{n+k-1})P(P_{n+k}) \quad \text{par indépendance des lancers} \\
&= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_{i-1} = n)(1-p)^{k-1}p = (1-p)^{k-1}p \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_{i-1} = n) = (1-p)^{k-1}p
\end{aligned}$$

   On retrouve bien que $Z_i \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

   (b) Par télescopage :

$$S_k = (S_k - S_{k-1}) + (S_{k-1} - S_{k-2}) + \cdots + (S_2 - S_1) + S_1 \boxed{= Z_k + Z_{k-1} + \cdots + Z_2 + Z_1.}$$

   (c) Puisque pour tout $1 \leq i \leq k$, Z_i possède une espérance qui vaut $\frac{1}{p}$, $E(S_k)$ existe par linéarité de l'espérance et vaut $E(S_k) = \sum_{i=1}^{k} E(Z_k) \boxed{= \frac{k}{p}.}$

6. (a) Les Z_i admettent toutes une même espérance $\frac{1}{p}$ et une même variance. De plus elles sont indépendantes (admis dans l'énoncé). Par la loi faible des grands nombres, on peut donc conclure que $\boxed{\overline{Z_k} \text{ converge en probabilité vers } \frac{1}{p}.}$

(b) La fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a $\frac{1}{p} \in \mathbb{R}_+^*$. Par la propriété admise dans l'énoncé (qui généralise l'une des propriétés du cours), on obtient que $\frac{1}{\overline{Z_k}} = \frac{k}{S_k} \xrightarrow{P} p$.

$\boxed{\frac{k}{S_k} \text{ est donc un estimateur convergent de } p.}$

(c) Puisque $\{[S_{k-1} = j],\ j \geq k-1\}$ est un SCE, la série $\sum_{j \geq k-1} P(S_{k-1} = j)$ converge et sa somme vaut $\boxed{\sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1} = j) = 1.}$

Par le théorème de transfert, la variable aléatoire $\frac{k-1}{S_k - 1}$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{j \in S_k(\Omega)} \frac{k-1}{j-1} P(S_k = j) = \sum_{j \geq k} \frac{k-1}{j-1} \binom{j-1}{k-1} p^k q^{j-k}$ converge absolument. Puisque cette série est à termes positifs, on étudie sa convergence. On a (en utilisant la formule de Pascal et le fait que $k \geq 2$) :

$$\begin{aligned}\frac{k-1}{j-1}\binom{j-1}{k-1} p^k q^{j-k} &= \binom{j-2}{k-2} p^k q^{j-k} = p \binom{j-2}{k-2} p^{k-1} q^{(j-1)-(k-1)} \\ &= pP(S_{k-1} = j-1)\end{aligned}$$

Il s'agit du terme général d'une série convergente, donc $\boxed{\frac{k-1}{S_k - 1} \text{ admet bien une espérance}}$ et on a :

$$E\left(\frac{k-1}{S_k - 1}\right) = p \sum_{j=k}^{+\infty} P(S_{k-1} = j-1) = p \sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1} = j) \boxed{= p.}$$

D'où le résultat souhaité.

(d) On a :

$$\begin{aligned}E\left(\frac{k}{S_k}\right) - p &= E\left(\frac{k}{S_k}\right) - E\left(\frac{k-1}{S_k - 1}\right) = E\left(\frac{k(S_k - 1) - (k-1)S_k}{S_k(S_k - 1)}\right) \\ &= E\left(\frac{S_k - k}{S_k(S_k - 1)}\right)\end{aligned}$$

Or $S_k \geq k$, donc $T_k = \frac{S_k - k}{S_k(S_k - 1)} \geq 0$. De plus par le calcul précédent, T_k admet une espérance, et par le théorème de transfert :

$$E(T_k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n-k}{n(n-1)} P(S_k = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n-k}{n(n-1)} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} > 0.$$

Ainsi $b_\theta\left(\frac{k}{S_k}\right) > 0$, et $\boxed{\frac{k}{S_k} \text{ est un estimateur biaisé de } p.}$

Partie 3 : calcul de l'espérance de T_k.

7. S_1 désigne le rang d'apparition du premier « pile », alors que T_1 désigne le dernier « pile » de la première série de 1 « pile ». Ainsi on a $\boxed{S_1 = T_1}$.

8. (a) Pour tout $1 \leq j \leq k$, on a :
$$P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_{j-1} \cap F_j = [W = j]$$
et
$$P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap P_k = [W \geq k+1].$$
Or $\{[W = j],\ 1 \leq j \leq k\} \cup \{[W \geq k+1]\}$ est un système complet d'évènements puisque $W(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (W suit une loi $\mathscr{G}(1-p)$). D'où le résultat.

(b) Rappelons que T_k est le rang d'apparition du dernier pile de la première série de k piles consécutifs. Supposons qu'on ait fait « face » au premier lancer. Ce lancer ne contribue pas à une série de « pile ». Ainsi pour obtenir pour la première fois une série de k « pile » consécutifs au n-ème lancer, il faudra donc obtenir cette série pour la première fois au bout de $n-1$ lancers (entre le deuxième lancer et le n-ème lancer). Or la probabilité d'obtenir k « pile » consécutifs pour la première fois au $(n-1)$-ème lancer est précisément $P(T_k = n-1)$. On a donc :
$$\boxed{\forall n \geq k, \quad P_{F_1}(T_k = n) = P(T_k = n-1).}$$
On admet que T_k admet une espérance, de sorte que toutes les espérances conditionnelles considérées existent bien aussi. Notons de plus que $T_k(\Omega) = [\![k, +\infty[\![$ (même argument que pour $S_k(\Omega)$). On a :
$$\begin{aligned}
E(T_k|F_1) &= \sum_{n=k}^{+\infty} nP_{F_1}(T_k = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} nP(T_k = n-1) \\
&= \underbrace{kP(T_k = k-1)}_{=0} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} nP(T_k = n-1) = \sum_{n=k}^{+\infty}(n+1)P(T_k = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} nP(T_k = n) + \sum_{n=k}^{+\infty} P(T_k = n) \qquad \text{car toutes les séries convergent} \\
&\boxed{= E(T_k) + 1}
\end{aligned}$$
car $\{[T_k = n],\ n \geq k\}$ est un SCE. D'où le résultat voulu.

(c) Soit $i \in [\![2, k]\!]$. De la même façon si $P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i$ est réalisé, les i-premiers lancers ne contribuent pas à la constitution d'une série de k-lancers. Ainsi la probabilité d'obtenir pour la première fois k « piles » consécutifs au n-ème lancer sachant $P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i$ réalisé est égal à la probabilité d'obtenir pour la première fois k « piles » consécutifs en exactement $n-i$ lancers (du $(i+1)$-ème lancer au n-ème). Ainsi on a :
$$\forall n \geq k, \quad P_{P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i}(T_k = n) = P(T_k = n-i).$$
Notons d'ailleurs que $P(T_k = n-i) = 0$ si $n - i < k$. On obtient alors :
$$\begin{aligned}
E(T_k|P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i) &= \sum_{n=k}^{+\infty} nP_{P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i}(T_k = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} nP(T_k = n-i) \\
&= \sum_{n=k+i}^{+\infty} nP(T_k = n-i) = \sum_{n=k}^{+\infty}(n+i)P(T_k = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} nP(T_k = n) + i\sum_{n=k}^{+\infty} P(T_k = n) \qquad \text{car toutes les séries convergent} \\
&= E(T_n) + i.
\end{aligned}$$
Ainsi $\boxed{E(T_k|P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i) = E(T_n) + i \text{ pour tout } i \in [\![2, k]\!].}$

(d) Si l'évènement $P_1 \cap \cdots \cap P_k$ est réalisé, alors on a obtenu une succession de k « pile » consécutifs lors des k premiers lancers, et donc $T_k = k$. Ainsi la loi conditionnelle de T_k sachant l'évènement $P_1 \cap \cdots \cap P_k$ est la loi certaine égale à k. On obtient donc que :

$$E(T_k|P_1 \cap \cdots \cap P_k) = E(k|P_1 \cap \cdots \cap P_k) \boxed{= k.}$$

9. (a) D'après la formule de l'espérance totale appliquée au système complet d'évènements de la question 8.(a), on a (en admettant que $E(T_k)$ existe) :

$$\begin{aligned} E(T_k) &= \left(\sum_{i=1}^{k} E(T_k|P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i) P(P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i) \right) \\ &\quad + E(T_k|P_1 \cap \cdots \cap P_k) P(P_1 \cap \cdots \cap P_k) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} (E(T_k) + i) p^{i-1}(1-p) \right) + kp^k \\ &= E(T_k) \sum_{i=1}^{k} p^{i-1}(1-p) + \sum_{i=1}^{k} ip^{i-1}(1-p) + kp^k \\ &\boxed{= E(T_k) \sum_{j=0}^{k-1} p^j q + \sum_{j=0}^{k-1} (j+1)p^j(1-p) + kp^k} \end{aligned}$$

(b) Pour la première somme (progression géométrique de raison $p \neq 1$) :

$$\sum_{j=0}^{k-1} p^j q = q\frac{1-p^k}{1-p} = 1 - p^k.$$

Calculons à présent $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} (j+1)p^j$. On reconnait ici la « dérivée » de la somme d'une progression géométrique $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$ avec $x \in \,]-1, 1[$.

En dérivant par rapport à x (possible car tout est dérivable) :

$$\sum_{i=1}^{k} ix^{i-1} = \frac{-(k+1)x^k(1-x) + (1-x^{k+1})}{(1-x)^2} = \frac{1-(k+1)x^k + kx^{k+1}}{(1-x)^2}.$$

D'où pour $x = p$:

$$\sum_{j=0}^{k-1} (j+1)p^j = \frac{1-(k+1)p^k + kp^{k+1}}{(1-p)^2}.$$

On obtient alors en substituant dans l'expression de la question précédente :

$$E(T_k) = E(T_k)(1-p^k) + \frac{1-(k+1)p^k + kp^{k+1}}{(1-p)} + kp^k$$

soit encore :

$$E(T_k)p^k = \frac{1-(k+1)p^k + kp^{k+1} + kp^k - kp^{k+1}}{(1-p)}$$

D'où finalement $\boxed{E(T_k) = \dfrac{1-p^k}{qp^k}.}$

10. Lorsque la première série de k « piles » consécutifs s'achève, alors on a déjà obtenu au minimum k « piles », et donc $S_k \leq T_k$. Par croissance de l'espérance, on obtient $\boxed{E(S_k) \leq E(T_k)}$. On en déduit avec les calculs précédents que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in]0, 1[$:

$$\frac{k}{p} \leq \frac{1-p^k}{qp^k} \Leftrightarrow k(1-p)p^{k-1} \leq 1-p^k \Leftrightarrow kp^{k-1} - kp^k \leq 1-p^k \Leftrightarrow \boxed{kp^{k-1} - 1 \leq kp^k - p^k = (k-1)p^k.}$$