DM13

Correction du devoir maison

Exercice 1 (Edhec 2018)

1. (a) Toutes les colonnes de J_n sont identiques et non nulles, donc $\boxed{rg(J_n) = 1}$. Ainsi 0 est valeur propre de J_n et $\boxed{\dim(E_0(J_n)) = n - rg(J_n) = n - 1}$.

   (b) On a $J_n V_n = n V_n$. Donc V_n (qui est non nul) est un vecteur propre de J_n associé à la valeur propre n.

   (c) On a obtenu deux valeurs propres 0 et n de J_n et on a $\dim(E_n(J_n)) \geq 1$ et $\dim(E_0(J_n) = n$. On a donc :

$$n = (n-1) + 1 \leq \dim(E_0(J_n)) + \dim(E_n(J_n)) \leq \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(J_n)} \dim(E_\lambda(J_n)) \underset{\text{cours}}{\leq} n.$$

   Ainsi on a $\dim(E_0(J_n)) + \dim(E_n(J_n)) = n$, et donc $\dim(E_n(J_n)) = 1$, J_n est diagonalisable (ce qu'on pouvait deviner puisque J_n est symétrique réelle), et surtout que $\boxed{\mathrm{Sp}(J_n) = \{0, n\}}$.

2. Les applications $x \mapsto -\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ et $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k$ sont polynomiales donc $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. Par composition avec $u \mapsto e^u$ qui est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et par produit, $\boxed{f_n \text{ est aussi de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^n.}$

3. (a) Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$\partial_i(f_n)(x) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)(-2x_i)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \boxed{= \left(1 - 2x_i \sum_{k=1}^{n} x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)}.$$

   (b) On résout le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_1 f_n(x) = 0 \\ \vdots \\ \partial_n f_n(x) = 0 \end{cases} \underset{\exp>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1 = 2x_1 \sum_{k=1}^{n} x_k \\ \vdots \\ 1 = 2x_n \sum_{k=1}^{n} x_k \end{cases}$$

   De ce système, on déduit en particulier que $\sum_{k=1}^{n} x_k \neq 0$. Ainsi x est un point critique de f_n si et seulement si :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2\sum_{k=1}^{n} x_k} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{2\sum_{k=1}^{n} x_k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2nx_1} \\ x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{2\sum_{k=1}^{n} x_k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{1}{2n} \\ x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{2\sum_{k=1}^{n} x_k} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} \quad \text{ou } x_1 = \cdots = x_n = -\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$\boxed{f_n \text{ possède donc deux points critiques } a = \frac{1}{\sqrt{2n}}(1, 1, \ldots, 1) \text{ et } b = -a.}$$

4. (a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\partial^2_{i,i}(f)(x) = \left(-2\sum_{k=1}^{n} x_k - 2x_i\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) + \left(1 - 2x_i\sum_{k=1}^{n} x_k\right)(-2x_i)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$$
$$\boxed{= \left(-4x_i + (4x_i^2 - 2)\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)}$$

Et pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $j \neq i$, on a :

$$\partial^2_{j,i}(f)(x) = -2x_i\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) + \left(1 - 2x_i\sum_{k=1}^{n} x_k\right)(-2x_j)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$$
$$\boxed{= \left(-2x_i - 2x_j + 4x_ix_j\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)}$$

(b) On a pour tout $i, j \in [\![1,n]\!]$ tels que $i \neq j$:

$$\partial^2_{i,i}f(a) = \left(-\frac{4}{\sqrt{2n}} + (\frac{4}{2n} - 2)\frac{n}{\sqrt{2n}}\right)\exp\left(-\frac{n}{2n}\right) = \left(-\frac{4}{\sqrt{2n}} + \frac{2-2n}{\sqrt{2n}}\right)\frac{1}{\sqrt{e}}$$
$$= \frac{-2-2n}{\sqrt{2ne}} = \frac{-2}{\sqrt{2ne}} + \frac{-2n}{\sqrt{2ne}}$$

et

$$\partial^2_{j,i}f(a) = \left(-\frac{4}{\sqrt{2n}} + \frac{4}{2n}\frac{n}{\sqrt{2n}}\right)\exp\left(-\frac{n}{2n}\right) = \frac{-2}{\sqrt{2ne}}.$$

Ainsi la Hessienne de f_n en a est donc :

$$H_n(a) = \frac{-2}{\sqrt{2ne}}J_n + \frac{-2n}{\sqrt{2ne}}I_n \boxed{= \frac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n).}$$

(c) Déterminons tout d'abord les valeurs propres de $nI_n + J_n$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(nI_n + J_n) &\Leftrightarrow \mathrm{rg}((nI_n + J_n) - \lambda I_n) < n\\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}(J_n - (\lambda - n)I_n) < n\\ &\Leftrightarrow (n - \lambda) \in \mathrm{Sp}(J_n) = \{0, n\}\end{aligned}$$

Ainsi on a $\mathrm{Sp}(nI_n + J_n) = \{n, 2n\}$, et donc $\boxed{\mathrm{Sp}(H_n(a)) = \left\{\frac{-2n}{\sqrt{2ne}}, \frac{-4n}{\sqrt{2ne}}\right\}}$.

(d) Puisque $\mathrm{Sp}(H_n(a)) \subset \mathbb{R}_-^*$, $\boxed{f_n \text{ admet un maximum local en } a.}$

(e) Comme a est un maximum local, il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathscr{B}(a,r), \quad f_n(x) \leq f_n(a).$$

Notons d'autre part que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $f_n(-x) = -f_n(x)$. On obtient donc que pour tout $x \in \mathscr{B}(b,r)$, $-x$ appartient à $\mathscr{B}(a,r)$ et on a :

$$f(-x) \leq f(a) = f(-b) \quad \Rightarrow \quad -f(x) \leq -f(b) \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(b).$$

Ainsi $\boxed{f \text{ admet un minimum local en } b.}$

Autre méthode. On peut aussi observer que $H_n(b) = -H_n(a)$. Donc les valeurs propres de $H_n(b)$ sont toutes positives, et on retrouve que f_n admet un minimum local en b.

5. (a) La fonction h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions qui le sont, et on a :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad h'(t) = e^{-t^2}(1-2t^2).$$
On a $h(t) \geq 0$ si et seulement si $0 \leq t \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On obtient le tableau de variations suivant :

t	0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$	0

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) \underset{u=t^2}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} u^{1/2}e^{-u} = 0$ par croissance comparée. et $h(1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2e}$.

(b) Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, on a :
$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$
D'où en élevant au carré :
$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \times y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right).$$
Étant donné l'inégalité demandée, prenons $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$. On obtient :
$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right).}$$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :
$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left|\sum_{k=1}^n x_k\right| \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \\ &\leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \qquad \text{d'après la question précédente} \\ &= \sqrt{n} \cdot h\left(\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\right) \leq \sqrt{n} \cdot h(1/\sqrt{2}) = \sqrt{\frac{n}{2e}} \end{aligned}$$
Ainsi on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:
$$f_n(b) = -\sqrt{\frac{n}{2e}} \leq f_n(x) \leq \sqrt{\frac{n}{2e}} = f_n(a).$$
Donc $\boxed{f_n \text{ admet un minimum global en } b \text{ et un maximum global en } a.}$

6. (a) Rappelons que $H_n(a) = -\sqrt{\dfrac{2}{ne}}(nI_n + J_n)$, que la commande `np.eye(n,m)` crée la matrice identité de taille $n \times m$ (éventuellement complétée par des lignes ou des colonnes de 0 si $n \neq m$), et que la commande `np.ones((n,m))` crée une matrice de taille $n \times m$ ne contenant que des 1. On propose le script suivant.

```
n = input('Entrer n')
H = np.sqrt(2/(n*np.e))*(n*np.eye(n,n)+np.ones((n,n)))
print(H)
```

(b) La nappe tracée correspond à une fonction qui possède un maximum local (qui est probablement global, même si on ne connait le graphe de la fonction que localement) et un minimum local. De plus, le maximum local est atteint en un point dont les deux coordonnées sont positives, qui pourrait donc être $a = (1/2, 1/2)$, et de même le minimum local semble atteint en un point qui pourrait être $b = -a$. Notons enfin qu'on a bien graphiquement la symétrie donnée par l'égalité $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Avec les informations dont on dispose, on peut donc dire qu' $\boxed{\text{il est plausible que la nappe soit une représentation de la fonction } f_2.}$

Exercice 2 (Edhec 2016)

1. Calculons :

$$\boxed{L(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} e^{-\dfrac{(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2}} = \frac{1}{(2\pi\theta_2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\theta_2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}.}$$

Donc :

$$\boxed{\ln(L(\theta_1, \theta_2)) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\theta_2) - \frac{1}{2\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2}$$

2. (a) f est bien de classe $\mathscr{C}^2$ somme composée et quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ (polynômes) dont le dénominateur ne s'annule pas sur U et composée de la fonction ln qui est bien $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) On calcule les dérivées partielles d'ordre 1 :

$$\partial_1(f)(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)$$

et :

$$\partial_2(f)(\theta_1, \theta_2) = -\frac{n}{2\theta_2} + \frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2$$

On cherche les points critiques en résolvant :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(\theta_1,\theta_2) = 0 \\ \\ \partial_2(f)(\theta_1,\theta_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1) = 0 \\ n\theta_2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = n\theta_1 \\ n\theta_2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\theta_1 + \theta_1^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ n\theta_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\theta_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + n\theta_1^2 \end{cases}$$

Or, d'après la première ligne $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = n\theta_1$ donc en remplaçant dans la deuxième ligne, on obtient :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(\theta_1,\theta_2) = 0 \\ \\ \partial_2(f)(\theta_1,\theta_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ n\theta_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\theta_1^2 \end{cases}$$

On remarque alors que θ_1 est uniquement déterminé par les $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et θ_2 est lui aussi uniquement déterminé par les $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et θ_1 (qui est unique).

Ainsi f admet un unique point critique $A = \left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$ sur U donné par :

$$\boxed{\widehat{\theta_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ et } \widehat{\theta_2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \widehat{\theta_1}^2.}$$

(c) Calculons les dérivées partielles d'ordre 2 de f :

$$\partial^2_{1,1}(f)(\theta_1, \theta_2) = -\frac{n}{\theta_2}; \qquad \partial^2_{2,2}(f)(\theta_1, \theta_2) = \frac{n}{2\theta_2^2} - \frac{1}{\theta_2^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2 \quad \text{et}$$
$$\partial^2_{1,2}(f)(\theta_1, \theta_2) = -\frac{1}{\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)$$

Donc en $A = \left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$, avec par définition $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{\theta_1}) = 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{\theta_1})^2 = n\widehat{\theta_2}$ (voir 2.(b)), on obtient :

$$\boxed{\partial^2_{1,1}(f)(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}) = -\frac{n}{\widehat{\theta_2}}; \quad \partial^2_{1,2}(f)(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}) = 0 \quad \text{et} \quad \partial^2_{2,2}(f)(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}) = \frac{n}{2\widehat{\theta_2}^2} - \frac{n\widehat{\theta_2}}{\widehat{\theta_2}^3} = \frac{-n}{2\widehat{\theta_2}^2}}$$

(d) La matrice hessienne de f en A est donc diagonale et ses valeurs propres : $-\dfrac{n}{\widehat{\theta_2}}$ et $\dfrac{-n}{2\widehat{\theta_2}^2}$ sont strictement négatives, $\boxed{f \text{ admet donc un maximum local en } A.}$

(e) f admet donc un maximum local en A signifie qu'il existe un voisinage V de A tel que :

$$\forall (\theta_1, \theta_2) \in V,\ f(\theta_1, \theta_2) \leqslant f(A)$$

Or $L = \exp(f)$ et la fonction exponentielle étant croissante, on a

$$\forall (\theta_1, \theta_2) \in V,\ L(\theta_1, \theta_2) \leqslant L(A).$$

$\boxed{L \text{ admet donc bien un maximum local en } A.}$

3. Puisque $E(\overline{X_n}) \overset{E \text{ lin.}}{=} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} m = m$, $\boxed{\overline{X_n} \text{ est bien un estimateur sans biais de } m.}$

4. Rappelons que $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (Koenig-Huygens), et donc $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \sigma^2 + m^2$. De plus :

$$V(\overline{X_n}) \overset{\text{indép.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} E(Z_n) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - E(\overline{X_n}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X^2) - E(\overline{X_n}^2) \\ &= E(X^2) - (V(\overline{X_n}) + E(\overline{X_n})^2) = (m^2 + \sigma^2) - (\frac{\sigma^2}{n} + m^2) \boxed{= \frac{n-1}{n}\sigma^2.} \end{aligned}$$

Ainsi Z_n est un estimateur biaisé de σ^2. Puisque :

$$E(Z_n) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sigma^2,$$

l'erreur moyenne que commet Z_n en tant qu'estimateur de σ^2 tend vers 0.

5. (a) Les variables $(X_1, \ldots, X_n)$ étant indépendantes et admettant une même espérance m et une même variance, $\boxed{\overline{X_n} \text{ est un estimateur convergent de } m}$ par la loi faible des grands nombres.

(b) X possède un moment d'ordre 4 si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge (l'intégrande étant positive). La fonction $x \mapsto x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)$ étant continue, cette intégrale est généralisée en $\pm\infty$. On remarque que :

- par croissance comparée, $x^6\varphi_{m,\sigma^2}(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
- $\dfrac{1}{x^2} \geq 0$ sur $[1,+\infty[$ et sur $]-\infty,-1]$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ convergent

Par théorème de comparaison, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)\mathrm{d}x$ convergent. Ainsi $\boxed{X \text{ admet bien un moment d'ordre 4.}}$

Les variables $X_1^2,\dots,X_n^2$ sont indépendantes (par lemme de coalition), et ont même espérance $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \sigma^2 + m^2$ et même moment d'ordre 2 (qui existe bien puisque X admet un moment d'ordre 4). Par la loi faible des grands nombres, $\boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \text{ converge en probabilité vers } \sigma^2+m^2.}$

On a montré que :

- d'après 5.(b), $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ converge en probabilité vers $\sigma^2 + m^2$;
- d'après 5.(a), $(\overline{X_n})$ converge en probabilité vers m. Et puisque $x \mapsto -x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, $-\overline{X_n}^2$ converge en probabilité vers $-m^2$.

Par compatibilité de la convergence en probabilité avec la somme, on obtient que :

$$\boxed{Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X_n}^2 \xrightarrow{P} (\sigma^2+m^2) + (-m^2) = \sigma^2.}$$