DM13

Devoir Maison type Maths 3 à rendre le 04/03/2024

Exercice 1

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On note e_0, e_1 et e_2 les polynômes de E définis par : $e_0 = 1$, $e_1 = x$ et $e_2 = x^2$.
On rappelle que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.
On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe le reste de la division euclidienne par $1 + x^3$ du polynôme $(1 - x + x^2)P$.
Ainsi il existe un unique polynôme Q tel que :

$$(1 - x + x^2)P = (1 + x^3)Q + f(P) \quad \text{avec} \quad \deg(f(P)) \leq 2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. (a) Déterminer $f(e_0), f(e_1)$ et $f(e_2)$, puis vérifier que $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$.
   (b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. (a) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\mathrm{Im}(f)$, puis établir que 3 est valeur propre de f et que :
   $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}).$$
   (b) Montrer que f est diagonalisable.
4. On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P, Q) de polynômes de E associe le réel $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$, où l'on a noté $P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ et $Q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.
   (a) Montrer que φ est un produit scalaire défini sur E.
   (b) Vérifier que $\mathrm{Ker}(f)$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Im}(f)$ dans E pour ce produit scalaire.
5. (a) Vérifier que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale pour le produit scalaire φ.
   (b) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$, puis retrouver le résultat de la question 4.(b).

Exercice 2

On considère la fonction f des deux variables réelles x, t, définie par :

$$f(x, t) = e^{-t^2}\sqrt{1 + xt}$$

1. **Étude de f.**
   (a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, +\infty[\times[0, +\infty[$.
   (b) Pour $(x, t) \in [0, +\infty[\times[0, +\infty[$, calculer $\partial_1 f(x, t)$ et $\partial^2_{1,1} f(x, t)$.
   (c) Montrer que pour $(x, t) \in [0, +\infty[\times[0, +\infty[$,
   $$\left|\partial^2_{1,1} f(x, t)\right| \leq \frac{t^2}{4} e^{-t^2}.$$

2. Montrer que pour tout réel α strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   En déduire que pour tout réel x positif, les intégrales suivantes sont convergentes :
   $$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}}\,\mathrm{d}t.$$

3. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par
   $$g(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Sans chercher à calculer la dérivée de g, montrer que g est croissante sur $[0,+\infty[$.

   (b) Soit $x_0 \in [0,+\infty[$. Montrer que pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,
   $$|f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\partial_1 f(x_0,t)| \leq \frac{t^2}{8}e^{-t^2}|x-x_0|^2.$$

   (c) En déduire que pour $x_0 \in [0,+\infty[$,
   $$\left| g(x) - g(x_0) - (x-x_0)\int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0,t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   (d) Montrer que g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que g' est définie par :
   $$g'(x) = \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

   Retrouver le sens de variations de g.

Exercice 3

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère la fonction f_n définie, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'ouvert $U =]0,+\infty[^n$, par :
$$f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right) = (x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

1. Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

2. Montrer que f_n possède une infinité de points de critiques $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ et les déterminer.

3. (a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f_n.

   (b) Vérifier que la hessienne H_n de f_n en un point critique quelconque de f_n est proportionnelle à la matrice $K_n = nI_n - J_n$, où I_n désigne la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

4. (a) Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre de J_n.

   (b) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n puis celles de K_n.

   (c) Montrer que l'on ne peut pas, de cette façon, conclure à l'existence d'un extremum local de f_n sur U.

5. **Étude du cas $n = 2$.**

   (a) Comparer les réels $(x_1+x_2)^2$ et $4x_1x_2$.

   (b) En déduire que f_2 admet sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ un minimum global et donner sa valeur.

6. **Étude du cas général.**

   On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, montrer que f_n admet un minimum global sur U, égal à n^2.

Problème.

On effectue des lancers d'une pièce donnant « Pile » avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et donnant « Face » avec la probabilité $q = 1 - p$, les différents lancers étant supposés indépendants.
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (resp. F_k) l'événement : « la pièce donne pile (resp. face) au k-ème lancer », on note également S_k le rang du k-ème pile et T_k le rang d'apparition du dernier pile de la première série de k piles consécutifs. On suppose que S_k et T_k sont deux variables aléatoires toutes deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Par exemple, si les lancers donnent $F_1, P_2, F_3, P_4, F_5, P_6, P_7, P_8$, alors S_1 et T_1 prennent la valeur 2, S_2 prend la valeur 4, T_2 prend la valeur 7, S_3 prend la valeur 6, T_3 prend la valeur 8, S_4 prend la valeur 7 et S_5 prend la valeur 8.

Partie I : simulations de S_k et T_k.

1. Compléter les lignes 7 et 10 du script `Python` suivant pour qu'il affiche la valeur prise par S_k lorsque k et p sont entrés par l'utilisateur :

```
1 k = int(input('donnez une valeur pour k :'))
2 p = int(input('donnez une valeur pour p :'))
3 n = 0
4 c = 0
5 while c<k :
6         n=n+1
7         if ......... :
8                 c = c+1
9 print(......)
```

2. On souhaite que le script précédent affiche la valeur prise par T_k. Remplacer les lignes 7 et 8 par les suivantes, dûment complétées :

```
7         if ......... :
8                 c = c+1
9         else :
10                .........
```

Partie 2 : calcul de l'espérance S_k.

3. Donner la loi de S_1 ainsi que son espérance.

4. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à k, on note X_{n-1} la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus lors des $n-1$ premiers lancers.

   (a) Donner la loi de X_{n-1}.

   (b) Donner $S_k(\Omega)$ puis écrire l'évènement $[S_k = n]$ à l'aide de la variable X_{n-1}.

   (c) En déduire que la loi de S_k est donnée par :

   $$\forall n \geq k,\ P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.$$

5. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On pose $Z_1 = S_1$ et, pour tout entier naturel i supérieur ou égal à 2, on pose $Z_i = S_i - S_{i-1}$. On admet que $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.
   (a) Donner la loi des variables aléatoires Z_i.
   (b) Exprimer S_k à l'aide de certaines des variables Z_i.
   (c) En déduire que S_k possède une espérance et donner sa valeur.

6. Estimation.
   On suppose le paramètre p inconnu et on souhaite trouver un estimateur de p. On admet que, si une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire Y, alors pour toute fonction f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $P(Y \in I) = 1$, la suite $(f(Y_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $f(Y)$.
   (a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on pose $\overline{Z_k} = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} Z_i$.
   Montrer que la suite $\left(\overline{Z_k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité.
   (b) En déduire que $\dfrac{k}{S_k}$ est un estimateur convergent de p.
   (c) Donner sans calcul la valeur de $\displaystyle\sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1} = j)$. Monter alors que la variable aléatoire $\dfrac{k-1}{S_k - 1}$ possède une espérance et que l'on a : $E\left(\dfrac{k-1}{S_k-1}\right) = p$.
   (d) En déduire que $\dfrac{k}{S_k}$ est un estimateur biaisé de p.

Partie 3 : calcul de l'espérance de T_k.

7. Comparer les variables aléatoires S_1 et T_1.

8. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On admet que T_k possède une espérance que l'on se propose de déterminer.
   (a) Justifier, en utilisant la variable aléatoire W égale au rang du premier face lors de l'expérience décrite au début de ce problème, que les évènements $F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2 \cap F_3, P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4, \dots, P_1 \cap \dots \cap P_{k-1} \cap F_k$ et $P_1 \cap \dots \cap P_{k-1} \cap P_k$, forment un système complet d'évènements.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à k, on a $P_{F_1}(T_k = n) = P(T_k = n-1)$, puis en déduire que l'espérance conditionnelle $E(T_k|F_1)$ est égale à $1 + E(T_k)$.
   (c) De la même façon, déterminer, pour tout i de $[\![2, k]\!]$, la valeur de $E(T_k|P_1 \cap \dots \cap P_{i-1} \cap F_i)$.
   (d) Justifier que $E(T_k|P_1 \cap \dots \cap P_k) = k$.

9. (a) Déduire des questions précédentes, la relation :
   $$E(T_k) = \sum_{j=0}^{k-1}(j+1)p^j q + E(T_k)\sum_{j=0}^{k-1} p^j q + kp^k.$$
   (b) Établir finalement que :
   $$E(T_k) = \frac{1-p^k}{qp^k}.$$

10. Justifier que $E(S_k) \leq E(T_k)$ puis utiliser certains résultats des parties 2 et 3 pour établir, sans étude de fonction, que l'on a :
    $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall p \in]0,1[, \quad (k-1)p^k \geq kp^{k-1} - 1.$$