DM13

Devoir maison à rendre le 13/03/2023

Exercice 1

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

1. (a) Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

   (b) Vérifier que le vecteur V_n élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dont toutes les composantes sont égales à 1, est vecteur propre de J_n.

   (c) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n.

Dans toute la suite, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).$$

2. Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

3. (a) Montrer que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a : $\quad \partial_i(f_n)(x) = \left(1 - 2x_i \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$.

   (b) En déduire que f_n possède deux points critiques $a = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}(1, 1, \ldots, 1)$ et $b = -a$.

4. (a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f_n.

   (b) Vérifier que la hessienne de f_n en a est $H_n(a) = \dfrac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n)$.

   (c) À l'aide de la première question, donner les valeurs propres de $H_n(a)$.

   (d) En déduire que f_n possède un extremum local en a.

   (e) Sans refaire tous les calculs, donner une conclusion concernant le point critique b.

5. (a) Étudier la fonction h qui, à tout t de $\mathbb{R}_+$, associe $h(t) = te^{-t^2}$.

   (b) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique, montrer que :

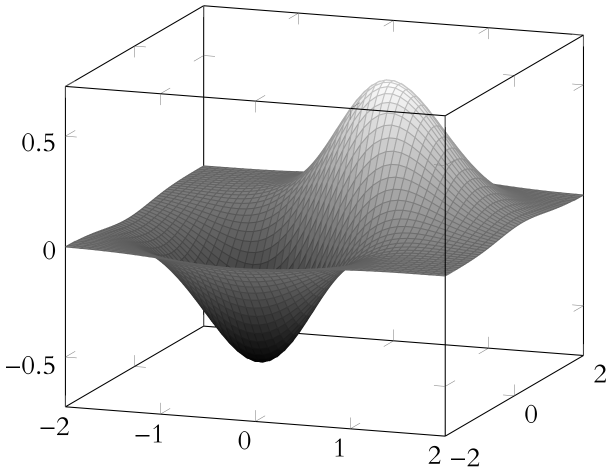
$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

   (c) Déduire des deux questions précédentes que f_n admet en a et en b des extrema globaux.

6. Question d'informatique.

   (a) Écrire des commandes `Python` permettant de calculer et d'afficher $H_n(a)$ pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

   (b) Dans le cas $n = 2$, la nappe suivante est-elle acceptable en tant que représentation graphique de la fonction f_2 ? Justifier.



Exercice 2

Les questions 1. et 2. sont indépendantes des suivantes.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 (avec $\sigma > 0$). On rappelle qu'une densité de X est la fonction φ_{m,σ^2} définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_{m,\sigma^2}(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

On suppose que l'on ne connaît pas les paramètres $\theta_1 = m$ et $\theta_2 = \sigma^2$ et on souhaite les estimer par une méthode appelée méthode du maximum de vraisemblance.

Pour ce faire, on considère un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de la loi de X, avec $n \geqslant 2$. On rappelle que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent toutes la même loi que X.

On appelle vraisemblance du couple (θ_1, θ_2), la fonction notée L définie par :

$$L(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{\theta_1,\theta_2}(x_i), \text{ où } x_1, \ldots, x_n \text{ sont des nombres réels donnés}$$

1. Donner l'expression de $L(\theta_1, \theta_2)$, puis celle de $\ln(L(\theta_1, \theta_2))$ en fonction de θ_1, θ_2 et $x_1, \ldots, x_n$.

2. (a) Justifier que la fonction $f : (\theta_1, \theta_2) \mapsto \ln(L(\theta_1, \theta_2))$, définie que l'ouvert $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

   (b) Montrer que f admet un seul point critique $A = \left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$ sur U tel que :

   $$\widehat{\theta_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ et } \widehat{\theta_2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \widehat{\theta_1}^2$$

   (c) Déterminer les valeurs des dérivées partielles d'ordre 2 de f en A.
   On vérifiera en particulier que : $\partial^2_{2,2}(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = \dfrac{-n}{2\widehat{\theta_2}^2}$.

   (d) En déduire que f admet un maximum local en $(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2})$.

   (e) Expliquer pourquoi la fonction L admet aussi un maximum loacal en $(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2})$.

   On pose dorénavant $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $Z_n = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \overline{X_n}^2$.

3. Vérifier que $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de m.

4. Z_n est-il un estimateur sans biais de σ^2 ? Que dire lorsque n est grand ?

5. On se propose, dans cette question, de montrer que Z_n est un estimateur convergent de σ^2.

   (a) Rappeler pourquoi la suite $(\overline{X_n})$ converge en probabilité vers m.

   (b) Montrer que X possède un moment d'ordre 4. En déduire que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ converge en probabilité vers $\sigma^2 + m^2$.

   (c) Déduire des questions précédentes que Z_n est un estimateur convergent de σ^2.
