DM14

Correction du devoir maison facultatif type Edhec

Exercice 1 (Edhec 2016)

1. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2} < 0.$$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

(b) Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n)$: u_n est bien défini et $u_n > 0$.

Initialisation. On a $u_0 = 1$, donc u_0 est bien défini, et $u_0 > 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété $\mathscr{P}(n)$ vraie au rang n, et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, u_n est bien définie et strictement positive. Donc $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{u_n}$ est bien définie et on a $u_{n+1} > 0$. Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion. Par principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est bien défini}}$ et que $\boxed{u_n > 0}$.

2. Les scripts calculent les termes successifs de la suite, mais le premier script s'arrête lorsque `u<=0.00001` et le second lorsque `u>=100000`, `n` sert de compteur, il indique l'indice du dernier terme calculé. Ainsi, $\boxed{u_5 \leqslant 0,00001 \text{ et } u_6 \geqslant 100000}$ et ce sont les premiers termes de la suite à vérifier ces inégalités.

   De telles écarts peuvent nous faire conjecturer que $\boxed{\text{la suite n'admet pas de limite}}$ (et même que la suite des termes de rang pair tend vers $+\infty$ et celle des termes de rang impair tend vers 0).

3. (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée et somme de fonctions qui le sont, et $g'(x) = -e^{-x} - 2x < 0$ sur $\mathbb{R}_+$. La fonction g est donc **continue** et **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}_+$, elle réalise alors une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $g(\mathbb{R}_+) =]-\infty, 1]$

(b) Sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x$ ssi $\frac{e^{-x}}{x} = x$ ssi $e^{-x} = x^2$ ssi $g(x) = 0$.
Or d'après la question précédente 0 possède un unique antécédent dans $\mathbb{R}_+$ par g. On le note alors $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

(c) Déterminons le signe de $g\left(\frac{1}{e}\right)$ et $g(1)$. On a $g\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-1/e} - \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^{1/e}} - \frac{1}{e^2}$. Or on a

$$\frac{1}{e} < 2 \Rightarrow \underset{\text{exp croissante}}{\Rightarrow} e^{1/e} < e^2 \Rightarrow \frac{1}{e^{1/e}} > \frac{1}{e^2} \Rightarrow g\left(\frac{1}{e}\right) > 0.$$

D'autre part, on a $g(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ puisque $e > 2$. Ainsi on a $g(1) < g(\alpha) < g\left(\frac{1}{e}\right)$. Comme g est strictement décroissante, on en déduit que $\boxed{1 > \alpha > \frac{1}{e}}$.

4. (a) On peut calculer $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{e}$ et $u_2 = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e^{-1/e}}{1/e} = e^{\frac{e-1}{e}}$. Or on a $\frac{e-1}{e} > 0$ donc $e^{\frac{e-1}{e}} > 1$, d'où $\boxed{u_2 = f(u_1) > 1 = u_0}$.
   Pour l'autre inégalité, il suffit de remarquer que f est décroissante. On obtient donc $f(u_2) < f(u_0)$, soit encore $\boxed{u_3 < u_1}$.

   (b) Montrons que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Pour cela, on peut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{2n+2} \geq u_{2n}$.

Initialisation. On a montré en 4.(a) que $u_2 \geq u_0$. Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n. On a donc

$$u_{2n+2} \geq u_{2n} \underset{f\text{décroissante}}{\Rightarrow} u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) \leq f(u_{2n}) = u_{2n+1}$$
$$\underset{f\text{décroissante}}{\Rightarrow} u_{2n+4} = f(u_{2n+3}) \geq f(u_{2n+1}) = u_{2n+2}.$$

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. Par principe de récurrence, on peut donc conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} \geq u_{2n}$. La suite $\boxed{(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc croissante}}$.

Pour $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ c'est plus simple : comme $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} \geq u_{2n}$. En composant par f (décroissante), on obtient :

$$u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$$

La suite $\boxed{(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

5. (a) Pour $x > 0$,

$$h(x) = f(f(x)) = \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} = \frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{\frac{e^{-x}}{x}} = x\frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{e^{-x}} = xe^{x-\frac{e^{-x}}{x}} = xe^{x-f(x)}$$

   De plus, d'après 1., on a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc par composition de limite : $\lim_{x\to 0^+} f(f(x)) = 0 = h(0)$, donc $\boxed{h \text{ est bien continue en } 0}$.

   (b) Tout d'abord, on a $h(0) = 0$ donc 0 est solution de l'équation $h(x) = x$. Supposons à présent $x > 0$. On a :

$$h(x) = x \Leftrightarrow xe^{x-f(x)} = x \underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} e^{x-f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = x \underset{3.(b)}{\Leftrightarrow} x = \alpha.$$

   Ainsi l'équation $h(x) = x$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}_+$ qui sont 0 et α.

   (c) $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0) donc $\boxed{\text{elle converge}}$ vers une limite $0 \leq \ell \leq u_1 = \frac{1}{e} < \alpha$ (d'après 3.(c)). De plus, $u_{2n+3} = h(u_{2n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite, on a (puisque h est continue sur $\mathbb{R}^+$) que $h(\ell) = \ell$. Compte tenu de ce qui précède et du fait que $\ell < \alpha$, on a nécessairement $\boxed{\ell = 0}$.

   (d) Supposons que $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell'$. On aurait déjà que $\ell' \geq 1 = u_0$ puisque (u_{2n}) est croissante. De plus, puisque f est **continue** sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(u_{2n}) = f(\ell')$, soit encore $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = f(\ell')$. Mais d'après la question précédente, cela implique que $f(\ell') = 0$. Or ceci est absurde puisque 0 n'a pas d'antécédent par f d'après 1.(a).
   Ainsi la suite $\boxed{(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas vers une limite finie}}$. Puisqu'elle est de plus croissante, $\boxed{\text{sa limite est donc } +\infty}$.

Exercice 2

1. (a) On a $Z(\Omega) = \mathbb{R}$. Puisque $Y = e^Z$, on a $Y(\Omega) =]0; +\infty[$, de sorte que pour tout $x \leqslant 0$:

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = 0.$$

Pour tout $x > 0$:

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(e^Z \leqslant x) \underset{\ln \text{ strict. croiss.}}{=} P(Z \leqslant \ln x) = \Phi(\ln x).$$

D'où finalement :

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} \Phi(\ln x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}}$$

(b) La fonction F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$ (fonction constante) et sur $]0; +\infty[$ (par composition de ln et de Φ). On obtient une densité f_Y de Y en dérivant F_Y en tout point $x \neq 0$:

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \times \Phi'(\ln x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

et on pose par exemple $f_Y(0) = 0$. Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

On obtient bien :

$$\boxed{f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}}$$

Remarque. Il était admis dans l'énoncé que Y est à densité. On aurait pu le démontrer ici en montrant que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ (cela posait problème surtout en 0) et $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0.

2. (a) Les variables aléatoires X_n sont finies, donc leur espérance et leur variance existent. On a :

$$E(X_n) = 1 \times P(X_n = 1) + (-1) \times P(X_n = -1) = p - (1-p) = \boxed{2p - 1}$$

X_n^2 est une variable certaine de valeur 1, donc $E(X_n^2) = 1$ et par Huygens :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = 1 - (2p-1)^2 = 1 - (4p^2 - 4p + 1) = 4p - 4p^2 = \boxed{4p(1-p)}$$

(b) T_n est un produit de termes valant chacun soit 1, soit -1. Donc $\boxed{T_n(\Omega) = \{-1, 1\}}$.

On calcule $E(T_n)$ (qui existe puisque T_n est finie). Par mutuelle indépendance des variables aléatoires $X_1, \ldots X_n$, on a :

$$E(T_n) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k) = \prod_{k=1}^{n} (2p-1) = \boxed{(2p-1)^n.}$$

Mais on a également :

$$E(T_n) = \sum_{x \in T_n(\Omega)} x P(T_n = x) = P(T_n = 1) - P(T_n = -1).$$

On a donc : $\boxed{P(T_n = 1) - P(T_n = -1) = (2p-1)^n.}$

(c) D'autre part, $([T_n = 1], [T_n = -1])$ est un SCE, de sorte que :

$$\boxed{P(T_n = 1) + P(T_n = -1) = 1.}$$

Par somme des deux dernières égalités obtenues, on en déduit que :

$$2P(T_n = 1) = 1 + (2p-1)^n \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(T_n = 1) = \frac{1 + (2p-1)^n}{2},}$$

et : $\quad P(T_n = -1) = 1 - P(T_n = 1) \boxed{= \frac{1 - (2p-1)^n}{2}.}$

Autre méthode. Puisque $T_n(\Omega) = \{1, -1\}$, T_n suit une loi de Rademacher. Or, on sait d'après la question 2.(a) que :

$$E(T_n) = 2P(T_n = 1) - 1.$$

On a donc $P(T_n = 1) = \dfrac{1 + (2p-1)^n}{2}$, et T_n suit la loi de $\boxed{\text{Rademacher de paramètre } \dfrac{1 + (2p-1)^n}{2}.}$

(d) On a :

$$0 < p < 1 \quad \text{donc} \quad 0 < 2p < 2 \quad \text{donc} \quad -1 < 2p - 1 < 1.$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} (2p-1)^n = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{n \to +\infty} P(T_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

On a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} P(T_n = -1) = \lim_{n \to +\infty} 1 - P(T_n = 1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

On reconnaît pour loi limite la loi de Rademacher de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Ainsi

$$\boxed{(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge en loi vers une variable aléatoire } T \text{ vérifiant : } P(T = 1) = P(T = -1) = \frac{1}{2}.}$$

3. (a) Soit $\omega \in \Omega$ tel que : $|T_{n+1}(\omega) - T'(\omega)| < \dfrac{1}{2}$ et $|T_n(\omega) - T'(\omega)| < \dfrac{1}{2}$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$|T_{n+1}(\omega) - T_n(\omega)| = |T_{n+1}(\omega) - T'(\omega) + T'(\omega) - T_n(\omega)| \leqslant \underbrace{|T_{n+1}(\omega) - T'(\omega)|}_{<1/2} + \underbrace{|T'(\omega) - T_n(\omega)|}_{<1/2}.$$

On a donc bien :

$$|T_{n+1}(\omega) - T_n(\omega)| < 1.$$

Ceci établit l'inclusion :

$$\boxed{\left[|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}\right] \cap \left[|T_n - T'| < \frac{1}{2}\right] \subset [\ |T_{n+1} - T_n| < 1\ ]}$$

(b) On passe au complémentaire dans l'inclusion précédente. On obtient :

$$\overline{[\ |T_{n+1} - T_n| < 1\ ]} \subset \overline{\left[|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}\right] \cap \left[|T_n - T'| < \frac{1}{2}\right]}$$

Autrement dit, avec la règle $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$:

$$[\ |T_{n+1} - T_n| \geqslant 1\ ] \subset \left[|T_{n+1} - T'| \geqslant \frac{1}{2}\right] \cup \left[|T_n - T'| \geqslant \frac{1}{2}\right].$$

On a donc par croissance de la probabilité :

$$P\left(|T_{n+1}-T_n| \geqslant 1\right) \leqslant P\left(\left[|T_{n+1}-T'| \geqslant \frac{1}{2}\right] \cup \left[|T_n-T'| \geqslant \frac{1}{2}\right]\right).$$

Enfin, on sait que pour tous événements A et B : $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ et donc : $P(A\cup B) \leqslant P(A)+P(B)$. On obtient bien :

$$\boxed{P\left(|T_{n+1}-T_n| \geqslant 1\right) \leqslant P\left(|T_{n+1}-T'| \geqslant \frac{1}{2}\right) + P\left(|T_n-T'| \geqslant \frac{1}{2}\right)}.$$

(c) On remarque que :

$$T_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} X_k = T_n \times X_{n+1} \quad \Rightarrow \quad T_{n+1}-T_n = T_n \times (X_{n+1}-1).$$

On a donc :

$$|T_{n+1}-T_n| = |T_n| \times |X_{n+1}-1| = |X_{n+1}-1|$$

car $|T_n|$ est une variable certaine de valeur 1. On a donc :

$$P(|T_{n+1}-T_n| \geqslant 1) = P\left(|X_{n+1}-1| \geqslant 1\right) = P(X_{n+1}=-1)$$

car X_{n+1} vaut soit 1, soit -1. Ainsi, on a donc bien :

$$\boxed{P\left(|T_{n+1}-T_n| \geqslant 1\right) = 1-p.}$$

(d) On va montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en probabilité. On raisonne par l'absurde en supposant que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire T'. On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(|T_{n+1}-T'| \geqslant \frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(|T_n-T'| \geqslant \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Or, d'après les questions 3.(b) et 3.(c), on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$1-p \leqslant P\left(|T_{n+1}-T'| \geqslant \frac{1}{2}\right) + P\left(|T_n-T'| \geqslant \frac{1}{2}\right).$$

En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient donc :

$$1-p \leqslant 0 \quad \text{soit encore} \quad p \geqslant 1.$$

C'est absurde car d'après l'énoncé, $p<1$. Ainsi $\boxed{(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ ne converge pas en probabilité.}}$

4. (a) Par définition :

$$\overline{X_n}^* = \frac{\overline{X_n}-E\left(\overline{X_n}\right)}{\sqrt{V(\overline{X_n})}}$$

On va calculer $E\left(\overline{X_n}\right)$ et $V(\overline{X_n})$. D'après les formules de la question 2.(a) avec $p=\frac{1}{2}$, on a pour tout $k\in[\![1;n]\!]$, $E(X_k)=0$ et $V(X_k)=1$. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \underbrace{E(X_k)}_{0} = 0$$

Par la formule $V(aX)=a^2V(X)$ puis par mutuelle indépendance des variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$, on a :

$$V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2}V(X_1+\cdots+X_n) = \frac{1}{n^2}\times\sum_{k=1}^{n}\underbrace{V(X_k)}_{1} = \frac{1}{n}.$$

Ainsi, on a : $\boxed{\overline{X_n}^* = \sqrt{n}\times\overline{X_n}.}$

(b) Les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes et de même loi, et admettent une espérance et une variance. D'après le théorème central limite, $\overline{X_n}^*$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Autrement dit (en supposant que la variable aléatoire Z de la question 1 est définie sur le même espace probabilisé que les X_n) :

$$\sqrt{n} \times \overline{X_n} \xrightarrow{\mathscr{L}} Z$$

En composant par la fonction exponentielle, qui est continue sur $\mathbb{R}$:

$$e^{\sqrt{n}\times\overline{X_n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \underbrace{e^Z}_{Y}$$

Enfin, on remarque que $U_n^{1/\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n}\times\overline{X_n}}$. On a donc bien :

$$\boxed{U_n^{1/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} Y}$$

Exercice 3 (Edhec 2008)

1. (a) Si f est un automorphisme, alors $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ (car f injective) et $\mathrm{Im}(f) = E$ (car f surjective). Ainsi $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont bien supplémentaires dans E, soit $\boxed{E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).}$

   (b) Soit $x \in E$. Puisque $E = F \oplus G$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$, et on a par définition de s :

$$s(x) = x_F - x_G = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{(-x_G)}_{\in G}.$$

   Et $(x_F, -x_G) \in F \times G$ est l'unique écriture de $s(x)$ dans la somme directe $E = F \oplus G$. Toujours par définition de s, on a donc :

$$s(s(x)) = x_F - (-x_G) = x_F + x_G = x.$$

   Ainsi $s^2 = Id$, et s est un automorphisme de E d'inverse $s^{-1} = s$. Par la question précédente, on a donc $\boxed{E = \mathrm{Ker}(s) \oplus \mathrm{Im}(s).}$

2. (a) Si f est l'endomorphisme nul, alors $\mathrm{Ker}(f) = E$ et $\mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$. Et donc comme précédemment $\boxed{E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).}$

   (b) i. Supposons que f n'admette que 0 comme valeur propre. Comme f est diagonalisable, ça serait l'endomorphisme nul, ce qui est contraire à l'hypothèse f non nul. Donc $\boxed{f \text{ a d'autres valeurs propres de } 0.}$

   ii. Soit λ une valeur propre non nulle de f, et soit $x \in E_\lambda(f)$. On a :

$$f(x) = \lambda \cdot x \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\lambda \neq 0} \quad x = \frac{1}{\lambda} \cdot f(x) = f\left(\frac{1}{\lambda} \cdot x\right) \in \mathrm{Im}(f).$$

   Ainsi on a bien $\boxed{E_\lambda(f) \subset \mathrm{Im}(f).}$

   iii. D'après la question précédente, on a :

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)\setminus\{0\}} E_\lambda(f) \subset \mathrm{Im}(f) \qquad (*)$$

   D'autre part, on a par le théorème du rang (en notant $n = \dim(E)$) :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - \dim(E_0(f)).$$

Comme de plus f est diagonalisable, on a :

$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} \dim(E_\lambda(f)) \quad \Rightarrow \quad n - \dim(E_0(f)) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f) \setminus \{0\}} E_\lambda(f).$$

Ce qui donne en substituant :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim\left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)\setminus\{0\}} E_\lambda(f)\right) \underbrace{=}_{\text{somme directe}} \dim\left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)\setminus\{0\}} E_\lambda(f)\right).$$

Avec l'inclusion $(*)$, on obtient donc $\mathrm{Im}(f) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)\setminus\{0\}} E_\lambda(f)$.

Enfin, comme f est diagonalisable, on a :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} E_\lambda(f) = E_0 \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)\setminus\{0\}} E_\lambda(f)\right) \boxed{= \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).}$$

3. (a) i. Comme $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Et comme $y \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $0_E = f(y) = f(f(x))$. D'où l'existence de x tel que $\boxed{y = f(x) \text{ et } f^2(x) = 0_E.}$

   ii. Soit $k \geq 2$, on a :
$$f^k(x) = f^{k-2}(f^2(x)) = f^{k-2}(0_E) \boxed{= 0_E.}$$

   (b) Par le théorème du rang, on sait déjà que $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = n$.

   Soit $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$. Il existe d'après la question précédente $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et $f^k(x) = 0_E$ pour tout $k \geq 2$. P étant annulateur de f, on a :

$$P(f)(x) = 0_E \quad \Rightarrow \quad a_1 f(x) + \underbrace{a_2 f^2(x) + \cdots + a_p f^p(x)}_{=0_E} = 0_E \quad \Rightarrow \quad a_1 f(x) = 0_E.$$

   Comme $a_1 \neq 0$ par hypothèse, on obtient $y = f(x) = 0_E$. Ainsi $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, et on a donc $\boxed{E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).}$

Problème (Edhec 2008)

Partie I : Quelques résultats utiles pour les parties suivantes

1. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Chaque lancer de la pièce correspond à une épreuve de Bernoulli avec pour succès « la prévision du joueur i est correcte pour ce lancer ». On réalise donc une succession de $2p+1$ épreuves de Bernoulli indépendantes (les différents lancers sont indépendants) et de probabilité de succès $\frac{1}{2}$ (la pièce est équilibrée). X_i représente le nombre de prévisions correctes donc le nombre de succès. Ainsi, $\boxed{X_i \text{ suit la loi binomiale de paramètres } 2p+1 \text{ et } \frac{1}{2}}$, c'est-à-dire $X_i(\Omega) = [\![0, 2p+1]\!]$ et pour tout $k \in X_i(\Omega)$:

$$P(X_i = k) = \binom{2p+1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2p+1-k} = \binom{2p+1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1}.$$

2. (a) D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$S_p + T_p = \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} 1^k 1^{2p+1-k} = (1+1)^{2p+1} \boxed{= 2^{2p+1}.}$$

(b) On effectue le changement d'indice $k' = 2p+1-k$. On obtient :

$$S_p = \sum_{k'=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{2p+1-k'} = \sum_{k'=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k'} \boxed{= T_p.}$$

(c) Ainsi, $S_p + T_p = 2S_p = 2^{2p+1}$ donc on a $\boxed{S_p = \frac{1}{2} 2^{2p+1} = 2^{2p}}$. On obtient par incompatibilité des évènements :

$$r_p = \sum_{k=0}^{p} P(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1} S_p \boxed{= \frac{1}{2}.}$$

Partie II : Les joueurs jouent au hasard et indépendamment les uns des autres.

1. On raisonne par double inclusion.

$\subset$ Soit le joueur J_1 perd et alors son gain prend la valeur 0, soit il gagne et alors selon le nombre $j \in [\![0, n-1]\!]$ des autres gagnants, le partage équitable entre les $j+1$ gagnants des $n!$ euros donne un gain de $\frac{n!}{j+1}$ euros. Ainsi, on a :

$$G_1(\Omega) \subset \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1} \ / \ j \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

$\supset$ Il s'agit de montrer que toutes ces valeurs peuvent bien être prises par G_1, c'est-à-dire qu'il existe une réalisation de chacun ces évènements.

On suppose que la pièce donne $2p+1$ *pile*, que le joueur J_1 n'avait prédit que des *face* et que tous les autres joueurs n'avaient prédit que des *pile*. Dans ce cas, J_1 perd et l'événement $[G_1 = 0]$ est réalisé.

Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$. On suppose que la pièce donne $2p+1$ *pile*, que le joueur J_1 avait prédit un *pile* puis $2p$ *face*, que les joueurs $J_2, J_3, \dots, J_{j+1}$ avaient fait la même prédiction que J_1 et que les joueurs $J_{j+2}, J_{j+3}, \dots, J_n$ n'avaient prédit que des *face*. Dans ce cas, J_1 gagne ainsi que les joueurs $J_2, J_3, \dots, J_{j+1}$ et l'événement $\left[G_1 = \frac{n!}{j+1}\right]$ est réalisé.

Ainsi, on a :

$$G_1(\Omega) \supset \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1} \ / \ j \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Par suite, on a $\boxed{G_1(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1} \ / \ j \in [\![0, n-1]\!] \right\}.}$

2. (a) On suppose que l'événement $[X_1 = 0]$ est réalisé. Ainsi, le joueur 1 n'a aucune prévision correcte.

Son gain est alors de $\frac{n!}{n}$ euros si et seulement si les $n-1$ autres joueurs n'ont eux aussi aucune prévision correcte (les n joueurs se partageant alors équitablement les $n!$ euros).

Or, la probabilité qu'un joueur n'ait aucune prévision correcte est q_0 et les évènements $[X_i = 0]$ pour $i = 2, \dots, n$ sont mutuellement indépendantes pour la probabilité $P_{[X_1=0]}$ (les joueurs jouent de façon indépendante). Donc on a :

$$\boxed{P_{[X_1=0]}\left(G_1 = \frac{n!}{n}\right) = (q_0)^{n-1}.}$$

(b) Soit $j \in [\![0, n-2]\!]$. On suppose que l'événement $[X_1 = 0]$ est réalisé. Ainsi, le joueur 1 n'a aucune prévision correcte. Son gain est alors de $\frac{n!}{j+1}$ euros si et seulement s'il gagne ainsi que j autres joueurs exactement. Or, dans ce cas, les $n-j-1$ autres joueurs (avec $n-j-1 > 0$) perdent, donc font strictement moins de prévisions que J_1, ce qui est impossible. Ainsi, on a bien :

$$\boxed{P_{[X_1=0]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = 0.}$$

(c) On a par définition :

$$\begin{aligned}
E(G_1|[X_1=0]) &= 0\times P_{[X_1=0]}(G_1=0)+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n!}{j+1}P_{[X_1=0]}\left(G_1=\frac{n!}{j+1}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n-2}\frac{n!}{j+1}\underbrace{P_{(X_1=0)}\left(G_1=\frac{n!}{j+1}\right)}_{=0\text{ d'après 2.(b)}}+\frac{n!}{n}\underbrace{P_{(X_1=0)}\left(G_1=\frac{n!}{n}\right)}_{=(q_0)^{n-1}\text{ d'après 2.(a)}}\\
&= (n-1)!(q_0)^{n-1}.
\end{aligned}$$

3. (a) Soit $k\in[\![1,2p+1]\!]$ et $j\in[\![0,n-1]\!]$. On suppose que l'événement $[X_1=k]$ est réalisé. Ainsi, le joueur 1 a exactement k prévisions correctes. Son gain est alors de $\frac{n!}{j+1}$ euros si et seulement s'il gagne ainsi que j autres joueurs exactement, c'est-à-dire si et seulement si j autres joueurs font k prévisions correctes et les $n-j-1$ autres joueurs font strictement moins de k prévisions correctes.

Nous sommes amenés à calculer la probabilité que j joueurs parmi $n-1$ fassent k prévisions correctes et les $n-j-1$ autres joueurs fassent strictement moins de k prévisions correctes :

- la probabilité que j joueurs donnés fassent k prévisions correctes et les $n-j-1$ restants fassent strictement moins de k prévisions correctes est $(q_k)^j(r_{k-1})^{n-j-1}$ (car les joueurs jouent indépendamment les uns des autres).
- il y a $\binom{n-1}{j}$ façons de choisir les j joueurs faisant k prévisions correctes parmi les $n-1$ joueurs autres que le joueur 1 (les $n-j-1$ restants étant automatiquement désignés).

Ainsi on a :

$$\boxed{P_{[X_1=k]}\left(G_1=\frac{n!}{j+1}\right)=\binom{n-1}{j}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-j-1}.}$$

(b) On a :

$$\frac{1}{j+1}\binom{n-1}{j}=\frac{1}{j+1}\frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!}=\frac{(n-1)!}{(j+1)!(n-1-j)!}=\frac{1}{n}\times\frac{n!}{(j+1)!(n-j-1)!}\boxed{=\frac{1}{n}\binom{n}{j+1}.}$$

Ainsi, on a pour tout $k\in[\![1,2p+1]\!]$:

$$\begin{aligned}
E(G_1|[X_1=k]) &= 0\times P_{[X_1=k]}(G_1=0)+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n!}{j+1}P_{[X_1=k]}\left(G_1=\frac{n!}{j+1}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{n!}{j+1}\binom{n-1}{j}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-1-j}\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{n!}{n}\binom{n}{j+1}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-1-j}\quad\text{par ce qui précède}\\
&= \frac{(n-1)!}{q_k}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j+1}(q_k)^{j+1}(r_{k-1})^{n-1-j}\\
&= \frac{(n-1)!}{q_k}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(q_k)^i(r_{k-1})^{n-i}\quad\text{en posant } i=j+1\\
&= \frac{(n-1)!}{q_k}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(q_k)^i(r_{k-1})^{n-i}-(q_k)^0(r_{k-1})^n\right)\\
&= \frac{(n-1)!}{q_k}\left((q_k+r_{k-1})^n-(r_{k-1})^n\right)\quad\text{par la formule du binôme de Newton}
\end{aligned}$$

On obtient donc $\boxed{E\left(G_1|[X_1=k]\right)=(n-1)!\dfrac{(r_k)^n-(r_{k-1})^n}{q_k}}$ puisque :

$$r_k=P(X_1\leq k)=P(X_1=k)+P(X_1\leq k-1)=q_k+r_{k-1}.$$

(c) En posant $r_{-1}=0$, comme $r_0=q_0$, on a :

$$(n-1)!\frac{(r_0)^n-(r_{-1})^n}{q_0}=(n-1)!\frac{(q_0)^n}{q_0}=(n-1)!(q_0)^{n-1}=E\left(G_1/X_1=0\right).$$

$\boxed{\text{La formule est donc encore valable pour } k=0.}$

4. $([X_1=k])_{k\in[\![0,2p+1]\!]}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. La formule de l'espérance totale (qui s'applique puisque G_1 est une variable finie) donne alors :

$$\begin{aligned}E(G_1)&=\sum_{k=0}^{2p+1}E\left(G_1/[X_1=k]\right)P(X_1=k)=\sum_{k=0}^{2p+1}(n-1)!\frac{(r_k)^n-(r_{k-1})^n}{q_k}q_k\\&=(n-1)!\sum_{k=0}^{2p+1}\left((r_k)^n-(r_{k-1})^n\right)=(n-1)!\left((r_{2p+1})^n-(r_{-1})^n\right)\quad\text{par télescopage}\\&=(n-1)!(1^n-0^n)\boxed{=(n-1)!.}\end{aligned}$$

Remarque. On pouvait s'attendre à ce résultat : les joueurs jouent indépendamment les uns des autres avec la même stratégie. Leur espérance de gain est donc la même, et comme de plus $G_1+\cdots+G_n=n!$, on en déduit que :

$$n!=E(G_1+\ldots G_n)=nE(G_1)\text{ soit }E(G_1)=(n-1)!.$$

Partie III : J_1 et J_2 forment un groupe et les autres joueurs jouent comme précédemment.

1. (a) Supposons que J_1 et J_2 aient fait respectivement α et β prévisions correctes. Alors $\beta=2p+1-\alpha$. On a alors deux cas :
   - soit $\alpha\geq p+1$ et alors $\beta\leq 2p+1-(p+1)=p$;
   - soit $\alpha<p+1$ et nécessairement $\beta>2p+1-(p+1)=p$.

   Par suite, $\boxed{\text{un et un seul des joueurs } J_1 \text{ et } J_2 \text{ a au moins } (p+1) \text{ prévisions correctes.}}$

   (b) On procède par double inclusion.

   $\subset$ D'après ce qui précède, le nombre de prévisions correctes du meilleur de J_1 et J_2 est supérieur ou égal à $p+1$, et comme il est bien sûr inférieur ou égal à $2p+1$, on a :

   $$Y(\Omega)\subset[\![p+1,2p+1]\!].$$

   $\supset$ Soit $k\in[\![p+1,2p+1]\!]$. On suppose que la pièce donne $2p+1$ *pile*, que le joueur J_1 avait prédit k *pile* puis $2p+1-k$ *face* et donc J_2 avait prédit k *face* puis $2p+1-k$ *pile*. Dans ce cas, le meilleur de J_1 et J_2 est J_1 (puisque $2p+1-k<k$) et il a k prévisions correctes donc l'événement $[Y=k]$ est réalisé.
   Ainsi, on a $Y(\Omega)\supset[\![p+1,2p+1]\!]$.

   Par suite, on a $\boxed{Y(\Omega)=[\![p+1,2p+1]\!]}$.

2. Si les lancers donnent F, P, P ou P, F, F, l'un des deux joueurs a trois prévisions correctes donc Y prend la valeur 3.

   Dans le cas contraire les deux joueurs ont au moins une prévision fausse, Y ne prend donc pas la valeur 3 tout en prenant une valeur de l'ensemble $[\![p+1,2p+1]\!]=[\![2,3]\!]$ donc Y prend la valeur 2.

   Ainsi, dans l'exemple donné au début de cette partie, Y prend la valeur 3 si les lancers donnent F, P, P ou P, F, F et Y prend la valeur 2 sinon.

3. Soit $k \in [\![p+1, 2p+1]\!]$. On a :

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= P\big(([X_1=k]\cap[X_2=2p+1-k])\cup([X_1=2p+1-k]\cap[X_2=k])\big) \\ &= P([X_1=k]\cap[X_2=2p+1-k]) + P([X_1=2p+1-k]\cap[X_2=k]) \\ &\qquad \text{car } [X_1=k]\cap[X_2=2p+1-k] \text{ et } [X_1=2p+1-k]\cap[X_2=k] \text{ sont incompatibles} \\ &= P(X_1=k)+P(X_2=k) \\ &\qquad \text{car } [X_1=k]=[X_2=2p+1-k] \text{ et } [X_1=2p+1-k]=[X_2=k] \\ &= q_k+q_k \boxed{=2q_k.} \end{aligned}$$

4. Par double inclusion.

   - $\subset$ Soit le meilleur de J_1 et J_2 est battu par au moins un autre joueur et alors le gain G' est nul, soit le meilleur de J_1 et J_2 atteint le score maximum mais alors le nombre de joueurs ayant gagné avec lui est un élément de $[\![0, n-2]\!]$ (son coéquipier a nécessairement perdu). Ainsi, $G'(\Omega) \subset \{0\} \cup \left\{\dfrac{n!}{j+1} \ / \ j \in [\![0, n-2]\!]\right\}$.
   - $\supset$ On suppose que la pièce donne $2p+1$ *pile*, que le joueur J_1 avait prédit un *pile* puis $2p$ *face*, le joueur J_2 ayant alors prédit un *face* puis $2p$ *pile* et que tous les autres joueurs n'avaient prédit que des *pile*. Dans ce cas, le meilleur de J_1 et J_2 est J_2 et il a $2p$ prévisions correctes mais les autres joueurs ont strictement plus de prévisions correctes donc l'événement $[G'=0]$ est réalisé.
     Soit $j \in [\![0, n-2]\!]$. On suppose que la pièce donne $2p+1$ *pile*, que le joueur J_1 avait prédit un *pile* puis $2p$ *face*, le joueur J_2 ayant alors prédit un *face* puis $2p$ *pile*, que les joueurs $J_3, \dots, J_{j+2}$ avaient fait la même prédiction que J_2 et que les joueurs $J_{j+3}, \dots, J_n$ avaient fait la même prédiction que J_1. Dans ce cas, J_2 gagne ainsi que les joueurs $J_3, \dots, J_{j+2}$ et l'événement $\left[G' = \frac{n!}{j+1}\right]$ est réalisé. Ainsi, on a $G'(\Omega) \supset \{0\} \cup \left\{\dfrac{n!}{j+1} \ / \ j \in [\![0, n-2]\!]\right\}$.

   Par suite, on a $\boxed{G'(\Omega) = \{0\} \cup \left\{\dfrac{n!}{j+1} \ / \ j \in [\![0, n-2]\!]\right\}.}$

5. (a) Soit $k \in [\![p+1, 2p+1]\!]$. Soit $j \in [\![0, n-2]\!]$. On suppose que l'événement $[Y=k]$ est réalisé. Ainsi, le meilleur de J_1 et J_2 a k prévisions correctes. Son gain est alors de $\frac{n!}{j+1}$ euros si et seulement s'il gagne ainsi que j autres joueurs exactement c'est-à-dire si et seulement si j autres joueurs font k prévisions correctes et les $n-j-2$ autres joueurs font strictement moins de k prévisions correctes (on sait que le coéquipier a strictement moins de k prévisions correctes). Calculons la probabilité de cet évènement :

   - La probabilité que j joueurs donnés fassent k prévisions correctes et les $n-j-2$ restants fassent strictement moins de k prévisions correctes est $(q_k)^j(r_{k-1})^{n-j-2}$ (car les joueurs $J_3, \dots, J_n$ jouent indépendamment les uns des autres).
   - Il y a $\dbinom{n-2}{j}$ façons de choisir les j joueurs faisant k prévisions correctes parmi les $n-2$ joueurs autres que les joueurs 1 et 2 (les $n-j-2$ restants étant automatiquement désignés).

   Ainsi on a :

$$\boxed{P_{[Y=k]}\left(G' = \frac{n!}{j+1}\right) = \binom{n-2}{j}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-j-2}.}$$

(b) Soit $k \in [\![p+1, 2p+1]\!]$. On a en procédant comme à la question II.3.(b) :

$$\begin{aligned}
E\left(G' | [Y=k]\right) &= 0 \times P_{[Y=k]}(G'=0) + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{j+1} P_{[Y=k]}\left(G' = \frac{n!}{j+1}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{j+1} \binom{n-2}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-2-j} = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{n-1} \binom{n-1}{j+1} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-2-j} \\
&= \frac{n(n-2)!}{q_k} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j+1} (q_k)^{j+1} (r_{k-1})^{n-1-j-1} \\
&= \frac{n(n-2)!}{q_k} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} (q_k)^i (r_{k-1})^{n-1-i} \\
&= \frac{n(n-2)!}{q_k} \left[(q_k + r_{k-1})^{n-1} - (q_k)^0 (r_{k-1})^{n-1} \right] \\
&\boxed{= n(n-2)! \frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k}.}
\end{aligned}$$

6. (a) $\left([Y=k]\right)_{k \in [\![p+1, 2p+1]\!]}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. La formule de l'espérance totale (qui s'applique puisque G' est une variable finie) donne alors :

$$\begin{aligned}
E(G') &= \sum_{k=p+1}^{2p+1} E(G' | [Y=k])\, P(Y=k) = n\,(n-2)! \sum_{k=p+1}^{2p+1} \frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k} 2\, q_k \\
&= 2\, n\,(n-2)! \left((r_{2p+1})^{n-1} - (r_p)^{n-1} \right) \boxed{= 2\, n\,(n-2)! \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}
\end{aligned}$$

car $r_{2p+1} = P(X_1 \leq 2p+1) = 1$ et $r_p = \dfrac{1}{2}$.

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in [\![3, +\infty[\![$, $2^{n-1} > n$.

Init. $2^{3-1} = 4 > 3$ donc la propriété est vraie pour $n = 3$.

Hér. Soit $n \in [\![3, +\infty]\!]$. Supposons la propriété vraie au rang n et montrons la au rang $n+1$.

On a $2^{(n+1)-1} = 2 \times 2^{n-1}$ et $2^{n-1} > n$ par hypothèse de récurrence. D'où :

$$2^{(n+1)-1} > 2n = (n+1) + (n-1) > n+1.$$

Concl. Par principe de récurrence, on a : $\boxed{\forall n \in [\![3, +\infty[\![,\ 2^{n-1} > n.}$

(c) Comme $G'_1 = \frac{1}{2} G'$, on a $\boxed{E(G'_1) = n(n-2)! \left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)}$.

Comme $2^{n-1} > n$ alors $1 - \dfrac{1}{2^{n-1}} > 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$. Ainsi on a :

$$E(G'_1) > \frac{n(n-1)(n-2)!}{n} = (n-1)! = E(G_1).$$

$\boxed{\text{La stratégie adoptée par les joueurs } J_1 \text{ et } J_2 \text{ est donc avantageuse}}$ du point de vue de l'espérance de leur gain.