DM14

Devoir maison facultatif type Edhec

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1. (a) Dresser le tableau de variation de f, limites comprises.
   (b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.

2. Les scripts suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et celui de droite, la valeur 6. Que sait-on de u_5 et u_6 ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

```
u=1
n=0
while u>0.00001 :
     u = np.exp(-u)/u
     n=n+1
print(n)
```

```
u=1
n=0
while u<100000 :
     u = exp(-u)/u
     n=n+1
print(n)
```

3. (a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = e^{-x} - x^2.$$
   (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une seule solution, que l'on notera α, sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Montrer que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.

4. (a) Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.
   (b) En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

5. On pose : $h(x) = \begin{cases} (f\circ f)(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
   (a) Déterminer $h(x)$ pour tout réel x strictement positif et vérifier que h est continue en 0.
   (b) Résoudre l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x élément de $\mathbb{R}_+$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.

Exercice 2

1. On considère une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite. On pose $Y = \mathrm{e}^Z$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note F_Y la fonction de répartition de Y et Φ celle de Z.
   (a) Déterminer $F_Y(x)$ pour tout réel x négatif ou nul, puis exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction Φ pour tout réel x strictement positif.
   (b) En déduire qu'une densité f_Y de Y est donnée par :
$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2}\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

   Dans la suite, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi, dite loi de Rademacher de paramètre p (avec $0 < p < 1$), et définie par :
$$P(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_n = -1) = 1 - p.$$
   On considère de plus, pour n dans $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $T_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

2. (a) Donner l'espérance et la variance communes aux variables X_n.
   (b) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T_n puis calculer $E(T_n)$ et en déduire une relation entre $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = -1)$.
   (c) Écrire une autre relation vérifiée par $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = -1)$, puis en déduire la loi de T_n.
   (d) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable T dont on précisera la loi.

3. Soit T' une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que les variables X_n.

   (a) Établir l'inclusion suivante :
$$\left(|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}\right) \cap \left(|T_n - T'| < \frac{1}{2}\right) \subset (|T_{n+1} - T_n| < 1)\,.$$
   (b) En déduire l'inégalité :
$$P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) \leq P\left(|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}\right) + P\left(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}\right).$$
   (c) Montrer, en observant les valeurs que peut prendre la variable $T_{n+1} - T_n$, que :
$$P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) = 1 - p.$$
   (d) La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en probabilité ?

4. Dans cette question, on prend $p = \frac{1}{2}$.

   On considère, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires, $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $U_n = \mathrm{e}^{n\overline{X}_n}$.

   (a) On rappelle que $\overline{X}_n^*$ est la variable aféatoire centrée réduite associée à $\overline{X}_n$. Exprimer $\overline{X}_n^*$ en fonction de $\overline{X}_n$.
   (b) Utiliser le théorème limite central pour établir que la suite $\left({U_n}^{1/\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de même loi que Y.

Exercice 3

Dans cet exercice, f désigne un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On se propose d'étudier quelques situations dans lesquelles on peut établir que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

1. (a) Montrer que si f est un automorphisme de E, alors on a bien $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
   (b) Étude d'un exemple : on considère deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, F et G, de E. Tout élément x de E s'écrit donc de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'endomorphisme s de E défini par :
$$s(x) = x_F - x_G.$$
   Déterminer s^2 et en déduire que $E = \mathrm{Ker}(s) \oplus \mathrm{Im}(s)$.

2. Dans cette question, on suppose f diagonalisable et f non bijectif (le cas où f est bijectif ayant été traité dans la première question).

   (a) Traiter le cas où f est l'endomorphisme nul.
   (b) Dans cette question, on suppose que f n'est pas l'endomorphisme nul.
      i. Montrer que f a d'autres valeurs propres que la valeur propre 0.
      ii. Montrer que tout sous-espace propre de f associé à une valeur propre non nulle est inclus dans $\mathrm{Im}(f)$.
      iii. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

3. Dans cette question, on considère un endomorphisme f de E dont un polynôme annulateur est de la forme $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k X^k$ ou encore $P = a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_p X^p$ avec $a_1 \neq 0$ et $p \geq 1$.

(a) Soit y un élément de $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$.

i. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $y = f(x)$ et $f^2(x) = 0$.

ii. En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a $f^k(x) = 0$.

(b) Établir que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Problème

Dans ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 et p est un entier naturel.

Un jeu oppose n joueurs $J_1, J_2, \ldots, J_n$. Le jeu se déroule de la façon suivante : une pièce équilibrée est lancée $(2p+1)$ fois. Avant les lancers, chaque joueur écrit une liste de prévisions pour ces lancers. Cette liste contient donc une suite de $(2p+1)$ caractères P (pour *pile*) ou F (pour *face*). Les gagnants sont les joueurs ayant le plus grand nombre de prévisions correctes et ils se partagent équitablement la somme de $n!$ euros.

Par exemple, pour $p = 1$, si les lancers donnent trois fois *pile*, le joueur ayant noté (P, F, P) a deux prévisions correctes, et si les lancers donnent dans cet ordre P, F, P, le joueur ayant noté (F, P, F) n'a aucune prévision correcte.

Pour i de $[\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du joueur J_i, on note G_i la variable aléatoire égale au gain du joueur J_i et $E(G_i)$ l'espérance de G_i.

L'objectif du problème est de déterminer l'espérance de gain du joueur J_1 selon deux stratégies présentées dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : quelques résultats utiles pour les parties suivantes

1. Montrer que les variables X_i suivent toutes la même loi binomiale dont on donnera les paramètres.
On pose alors, pour tout i de $[\![1, n]\!]$ et tout k de $X_i(\Omega)$: $q_k = P(X_i = k)$ et $r_k = P(X_i \leq k)$.

2. On pose $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k}$ et $T_p = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}$.

(a) Calculer $S_p + T_p$.

(b) Montrer que $S_p = T_p$.

(c) Déduire des deux résultats précédents la valeur de S_p puis montrer que $r_p = \frac{1}{2}$.

Partie 2 : les joueurs jouent au hasard et indépendamment les uns des autres

1. Montrer que $G_1(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1} \,\middle|\, j \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.

2. (a) Montrer que $P_{[X_1=0]}\left(G_1 = \frac{n!}{n}\right) = (q_0)^{n-1}$.

(b) Montrer que, pour tout j de $[\![0, n-2]\!]$: $P_{[X_1=0]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = 0$.

(c) En déduire que l'espérance de G_1 conditionnellement à l'événement $[X_1 = 0]$ est :

$$E\left(G_1 \,|[X_1 = 0]\,\right) = (n-1)!(q_0)^{n-1}$$

3. (a) Établir que, pour tout k non nul de $X_1(\Omega)$ et pour tout j élément de $[\![0, n-1]\!]$, on a :

$$P_{[X_1=k]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = \binom{n-1}{j}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-1-j}$$

(b) Établir que $\dfrac{1}{j+1}\dbinom{n-1}{j} = \dfrac{1}{n}\dbinom{n}{j+1}$ puis en déduire que, pour tout k non nul de $X_1(\Omega)$, l'espérance de G_1 conditionnellement à l'événement $[X_1 = k]$ est :

$$E\left(G_1 \,|[X_1 = k]\,\right) = (n-1)!\frac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k}$$

(c) Vérifier que cette expression reste valable pour $k = 0$ en posant $r_{-1} = 0$.

4. Utiliser les questions 3.b) et 3.c) pour établir que $E(G_1) = (n-1)!$.

Partie 3 : J_1 et J_2 forment un groupe et les autres joueurs jouent comme dans la partie 2

Dans cette partie, J_1 et J_2 adoptent la stratégie suivante: J_1 joue au hasard mais J_2 joue, pour chaque lancer, les prévisions contraires de J_1. Par exemple, pour $p = 1$, si J_1 a choisi (F, P, P) alors J_2 choisit (P, F, F).
On note G' le gain du groupe formé par ces deux joueurs, J_1 et J_2 décidant de partager équitablement ce gain.
On a donc, en désignant par G'_1 et G'_2 les gains respectifs de J_1 et J_2: $G' = G'_1 + G'_2$ et $G'_1 = G'_2$.
On pose, pour tout i de $[\![1, n]\!]$ et pour tout k de $X_i(\Omega)$: $q_k = P(X_i = k)$ et $r_k = P(X_i \leq k)$.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du meilleur de J_1 et J_2.

1. (a) Montrer que un et un seul des joueurs J_1 et J_2 a au moins $p + 1$ prévisions correctes.
   (b) En déduire que: $Y(\Omega) = [\![p + 1, 2p + 1]\!]$.
2. Vérifier que, dans l'exemple donné au début de cette partie, Y prend la valeur 3 si les lancers donnent dans cet ordre F, P, P ou P, F, F et Y prend la valeur 2 sinon.
3. Pour tout k de $[\![p + 1, 2p + 1]\!]$, montrer que : $P(Y = k) = 2q_k$.
4. Montrer que $G'(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1} \;\middle|\; j \in [\![0, n-2]\!] \right\}$.
5. (a) Établir que, pour tout k de $[\![p + 1, 2p + 1]\!]$ et tout j de $[\![0, n - 2]\!]$, on a :
   $$P_{[Y=k]}\left(G' = \frac{n!}{j+1}\right) = \binom{n-2}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-2-j}$$
   (b) En déduire que, pour tout k de $[\![p + 1, 2p + 1]\!]$, l'espérance de G' conditionnellement à l'événement $[Y = k]$ est :
   $$E\left(G' \,|[Y = k]\right) = n(n-2)! \frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k}$$
6. (a) En déduire, en utilisant le résultat de la deuxième question de la partie 1, que :
   $$E(G') = 2n(n-2)! \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$
   (b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 \ \Rightarrow\ 2^{n-1} > n$.
   (c) Déterminer $E(G'_1)$ et vérifier que la stratégie adoptée par les joueurs J_1 et J_2 est avantageuse pour J_1 (et donc pour J_2) du point de vue de l'espérance de leur gain.
