DM15

Correction du devoir maison facultatif type Ecricome - EM Lyon

Exercice 1 (Edhec 2010)

1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la fonction $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \dfrac{1}{x_i}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U comme quotient de fonctions polynomiales, donc $\mathscr{C}^2$ sur U, dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n$ est polynomiale donc $\mathscr{C}^2$ sur U. Par sommes et produit, on en déduit que $\boxed{f_n \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } U.}$

2. Calculons les dérivées partielles de f_n sur U. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :
$$\partial_i f_n(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) - \frac{1}{x_i^2}(x_1 + \cdots + x_n)$$
Cherchons les points critiques de f_n. On a :
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) - \frac{1}{x_1^2}(x_1 + \cdots + x_n) = 0 \\ \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) - \frac{1}{x_2^2}(x_1 + \cdots + x_n) = 0 \\ \dots \\ \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) - \frac{1}{x_n^2}(x_1 + \cdots + x_n) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) - \frac{1}{x_1^2}(x_1 + \cdots + x_n) = 0 & (L_1) \\ \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}\right)(x_1 + \cdots + x_n) = 0 & (L_2) - (L_1) \\ \dots \\ \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_n^2}\right)(x_1 + \cdots + x_n) = 0 & (L_n) - (L_1) \end{cases}$$
$$\underset{x_1 + \cdots + x_n \neq 0 \text{ sur } U}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) - \frac{1}{x_1^2}(x_1 + \cdots + x_n) = 0 \\ \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} = 0 \\ \dots \\ \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_n^2} = 0 \end{cases}$$
$$\underset{x_1, \dots, x_n > 0 \text{ sur } U}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) - \frac{1}{x_1^2}(x_1 + \cdots + x_n) = 0 \\ x_1 = x_2 \\ \dots \\ x_1 = x_n \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n}{x_1} - \frac{1}{x_1^2}(n x_1) = 0 \\ x_1 = x_2 \\ \dots \\ x_1 = x_n \end{cases}$$
Ainsi $\boxed{f_n \text{ possède une infinité de points de critiques, à savoir tous les } (a, \dots, a) \text{ avec } a > 0.}$

3. (a) Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on a :
$$\partial^2_{i,i} f(x_1, \dots, x_n) = -\frac{1}{x_i^2} - \frac{1}{x_i^2} - (-2)x_i^{-3}(x_1 + \cdots + x_n) \boxed{= -\frac{2}{x_i^2} + 2\frac{x_1 + \cdots + x_n}{x_i^3},}$$
$$\boxed{\partial^2_{j,i} f(x_1, \dots, x_n) = -\frac{1}{x_j^2} - \frac{1}{x_i^2}.}$$

(b) Soit $(a,\dots,a)$ un point critique de f_n avec $a>0$. On a pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ avec $i\neq j$:

$$\partial^2_{i,i}f(a,\dots,a) = -\frac{2}{a^2}+2\frac{na}{a^3}=\frac{2}{a^2}(n-1).$$

$$\partial^2_{j,i}f(a,\dots,a) = -\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2}=-\frac{2}{a^2}.$$

Ainsi, on a :

$$\nabla^2 f(a,\dots,a)=\frac{2}{a^2}\begin{pmatrix}(n-1) & -1 & \dots & -1\\ -1 & (n-1) & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & -1\\ -1 & \dots & -1 & (n-1)\end{pmatrix}\boxed{=\frac{2}{a^2}\left(nI_n-J_n\right).}$$

4. (a) Toutes les colonnes de J_n sont identiques et non nulles, donc $\boxed{\mathrm{rg}(J_n)=1.}$ Ainsi $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } J_n \text{ et } \dim(E_0(J_n))=n-\mathrm{rg}(J_n)=n-1.}$

(b) La matrice J_n étant symétrique réelle, elle est diagonalisable. De plus, 0 est valeur propre de J_n et $\dim(E_0(J_n))=n-1$. Reste donc une valeur propre λ qu'il reste à déterminer, qu'on obtient en prenant la trace :

$$\lambda+\underbrace{0+\dots+0}_{(n-1)\text{ fois}}=\mathrm{Tr}(J_n)=n.$$

Ainsi $\lambda=n$, et $\boxed{\text{les valeurs propres de } J_n \text{ sont } 0 \text{ et } n.}$

Autre méthode. On a $J_n\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$. Donc n est valeur propre et $\dim(E_n(J_n))\geq 1$.

On obtient :

$$(n-1)+1\leq \dim(E_0(J_n))+\dim(E_n(J_n))\underbrace{\leq}_{\text{Cours}} n.$$

Ainsi, $\dim(E_0(J_n))+\dim(E_n(J_n))=n$. On retrouve donc que J_n est diagonalisable, et surtout que $\boxed{Sp(J_n)=\{0,n\}.}$

On a $K_n=nI_n-J_n$, donc $\boxed{\text{les valeurs propres de } K_n \text{ sont } n-0=n \text{ et } n-n=0}$. En effet, si on note P une matrice inversible telle que $P^{-1}J_nP=diag(0,\dots,0,n$, alors on a :

$$P^{-1}K_nP=nI_n-diag(0,\dots,0,n)=diag(n,\dots,n,0)$$

et les valeurs propres sont bien 0 et n.

(c) Il n'est donc pas possible de conclure ici car 0 est valeur propre de la hessienne, et que toutes les autres valeurs propres sont positives.

5. **Étude du cas $n=2$.**

(a) On a :

$$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=(x_1-x_2)^2\geq 0.$$

Ainsi on a $\boxed{(x_1+x_2)^2\geq 4x_1x_2.}$

(b) On a :

$$f_2(x_1,x_2)=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)(x_1+x_2)=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}\geq 4 \quad \text{d'après la question précédente.}$$

De plus, on a pour tout $a>0$, $f_2(a,a)=\dfrac{(2a)^2}{a^2}=4.$. Ainsi f_2 admet un minimum global sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ qui vaut 4, atteint en tout point critique (a,a) avec $a>0$.

6. **Étude du cas général.**

Rappelons que l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique s'écrit pour tout $x=(x_1,\dots,x_n), y=(y_1,\dots,y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\times\|y\|, \qquad \text{soit} \qquad \left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2},$$

soit encore en élevant au carré,

$$\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right).$$

Afin de faire apparaitre f_n, appliquons cette inégalité avec $x=(\sqrt{x_1},\dots,\sqrt{x_n})$ et $y=\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}},\dots,\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$. On obtient :

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j}\right) \qquad \text{soit encore} \qquad n^2 \leq f_n(x).$$

De plus, en tout point critique $(a,\dots,a)$ où $a>0$, on a :

$$f_n(a,\dots,a) = \frac{n}{a}\times(na) = n^2.$$

Ainsi $\boxed{f_n \text{ admet un minimum global sur } U, \text{ égal à } n^2}$, atteint en chacun de ses points critiques $(a,\dots,a)$ $(a>0)$.

Exercice 2 (EML 2010)
Préliminaires.

1. $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2>1$, $\boxed{\text{elle converge donc.}}$ On en déduit en particulier que la série $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente, donc $\boxed{\text{convergente.}}$ Enfin pour la série $\sum_{k\geq0}\frac{1}{(2k+1)^2}$, on peut effectuer un théorème de comparaison :

   - $\frac{1}{(2k+1)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4k^2}$;
   - $\frac{1}{k^2}\geq 0$ pour tout $k\geq1$;
   - $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente.

   Par théorème de comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{k\geq0}\frac{1}{(2k+1)^2} \text{ converge.}}$

2. Pour $N\geq1$, on a (en séparant termes pairs et impairs) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n^2} &= \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{(2k+1)^2}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{(2k+1)^2}\end{aligned}$$

D'où en faisant tendre N vers $+\infty$ dans cette égalité (tout converge) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

En admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, on obtient :

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

soit encore :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{4\pi^2}{24}-\frac{\pi^2}{24}\boxed{=\frac{\pi^2}{8}.}$$

3. Pour $N\geq 1$, toujours en séparant termes pairs et impairs, on a :

$$\sum_{n=1}^{2N}\frac{(-1)^n}{n^2}=\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{2k}}{(2k)^2}+\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

D'où lorsque N tend vers $+\infty$ (là aussi, tout converge) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{8}\boxed{=-\frac{\pi^2}{12}.}$$

Partie I : Éléments d'étude de f.

4. La fonction $t\mapsto\dfrac{t^x}{1+t}$ est continue sur $]0,1]$ (car x peut éventuellement être négatif), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est généralisée en 0. Et en 0, on a :

   - $\dfrac{t^x}{1+t}\underset{t\to 0}{\sim}t^x=\dfrac{1}{t^{-x}}$;
   - $t^x>0$ pour tout $t\in]0,1]$;
   - $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^{-x}}$ est une intégrale de Riemann en 0, qui converge si et seulement si $-x<1\Leftrightarrow x>-1$.

   Par théorème de comparaison, $\boxed{\text{l'intégrale }\displaystyle\int_0^1\frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t\text{ converge pour tout }x\in J.}$

5. On a :

$$f(0)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=[\ln(1+t)]_0^1\boxed{=\ln(2).}$$

$$f(1)=\int_0^1\frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{(1+t)-1}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 1-\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t=[t-\ln(1+t)]_0^1\boxed{=1-\ln(2).}$$

6. Soit $x\in J$. Pour tout $t\in]0,1]$, on a :

$$0\leq\frac{t^x}{1+t}\leq t^x.$$

   Par croissance de l'intégrale (toutes les intégrales en jeu convergent puisque $x\in J$) :

$$0\leq f(x)\leq\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t.$$

Pour $0 < a < 1$, on a :

$$\int_a^1 t^x \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_a^1 = \frac{1-a^{x+1}}{x+1} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x+1}.$$

Ainsi on a :

$$\boxed{\forall x \in J, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}.}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut 0.

7. (a) Soit $(x, y) \in J^2$. On a pour tout $t \in]0, 1]$:

$$x \leq y \underbrace{\Rightarrow}_{\ln(t)\leq 0} x\ln(t) \geq y\ln(t) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{exp. croissante}} e^{x\ln(t)} \geq e^{y\ln(t)} \boxed{\Rightarrow t^x \geq t^y.}$$

   (b) D'où en divisant l'inégalité précédente par $1 + t > 0$:

$$\frac{t^x}{1+t} \geq \frac{t^y}{1+t} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{croissance de l'intég.}} \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{t^y}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

   Ainsi on a montré que pour tout $(x, y) \in J^2$ tels que $x \leq y$, on a $f(x) \geq f(y)$. Donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur } J.}$

8. Pour tout $x \in J$, on a par linéarité de l'intégrale :

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x + t^{x+1}}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^x \frac{1+t}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^x \,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{\text{quest. 3.}} \boxed{\frac{1}{x+1}.}$$

9. Soit encore $x \in J$, on a par décroissance de f que :

$$2f(x+1) \leq f(x) + f(x+1) \leq 2f(x) \quad \Rightarrow \quad 2f(x+1) \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{x+1} \overset{(**)}{\leq} 2f(x).$$

Supposons $x > 0$ (il a de toute façon vocation à tendre vers $+\infty$). Ces inégalités peuvent se réécrire alors :

$$\frac{1}{x+1} \overset{(**)}{\leq} 2f(x) \leq \frac{1}{x}$$

en appliquant pour l'inégalité de droite l'inégalité $(*)$ avec $x - 1$ en lieu et place de x. D'où en multipliant par $x > 0$:

$$\frac{x}{x+1} \leq 2xf(x) \leq 1.$$

Or on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$. Par théorème des gendarmes, la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} 2xf(x)$ existe donc et vaut 1, ce qui se réécrit :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.}$$

10. Soit $x \in J$.

   (a) Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

   Init. Pour $n = 0$, cela résulte immédiatement de la question 8.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n :

$$f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

D'après la question 8., on a $f(n+1+x) = \dfrac{1}{n+2+x} - f(n+2+x)$, ce qui donne en substituant dans l'égalité précédente :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(-1)^{n+1}}{n+2+x} + (-1)^{n+2} f(n+2+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} \\ &= (-1)^{n+2} f(n+2+x) + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k+1+x} \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

On conclut par principe de récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} = f(x) - (-1)^{n+1} f(n+1+x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

d'après la question 6. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge et on a :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.}$$

11. (a) Pour $(x,y) \in J^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| &= \left| \frac{(k+1+y)-(k+1+x)}{(k+1+x)(k+1+y)} \right| = \left| \frac{y-x}{(k+1+x)(k+1+y)} \right| \\ &\leq \frac{|y-x|}{(k+1+x)(k+1+y)} \boxed{\leq \frac{|x-y|}{k^2}} \end{aligned}$$

car $x+1>0$ et $y+1>0$. La série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ étant convergente, on en déduit par théorème de comparaison que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} (-1)^k \left(\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right)$ est absolument convergente. D'où par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &= \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+y} \right| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| = \underbrace{\left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right|}_{\text{terme en } k=0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| \\ &\leq \left| \frac{y-x}{(1+x)(1+y)} \right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x-y|}{k^2} = \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} + |x-y| \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

car $(1+x)(1+y) \geq 0$ et en utilisant le résultat admis à la question 2. On a ainsi montré que :

$$\boxed{\forall (x,y) \in J^2,\ |f(x)-f(y)| \leq |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right).}$$

(b) Soit $x \in J$ fixé. On a :

$$\lim_{y \to x} |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right) = 0.$$

Par théorème des gendarmes, $\lim_{y \to x} |f(x)-f(y)|$ existe et vaut 0, et donc $\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$. f est donc continue en x. Et ceci étant vrai pour tout $x \in J$, $\boxed{f \text{ est continue sur } J}$.

12. D'après la relation de la question 8., on a pour tout $x \in J$:

$$(x+1)f(x) = 1 - (x+1)f(x+1).$$

Mais par continuité de f en 0, on a $\lim_{x \to -1} f(x+1) = f(0) = \ln(2)$, et donc $\lim_{x \to -1} (x+1)f(x+1) = 0$.

On en déduit que $\lim_{x \to -1} (x+1)f(x) = 1$, et donc que $\boxed{f(x) \underset{x \to -1}{\sim} \frac{1}{x+1}.}$

Par conséquent, on a $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$.

Partie II : Dérivabilité de f.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k l'application de classe $\mathscr{C}^2$ de J dans $\mathbb{R}$ définie pour tout x de J par :

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

13. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a pour tout $x \in J$:

$$g_k'(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2} \quad \text{et} \quad g_k''(x) = \frac{(-1)^k 2}{(k+1+x)^3}.$$

En particulier, on a pour tout $x \in J$, $|g_k''(x)| \leq \frac{2}{(k+1+x)^3} \leq \frac{2}{k^3}$ car $x+1>0$. Fixons $x \in J$. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange en x à g_k à l'ordre 2 (ce qui est bien possible car g_k est de classe $\mathscr{C}^2$. Pour tout $y \in J$, on a donc :

$$\boxed{|g_k(y) - g_k(x) - (y-x)g_k'(x)| \leq \frac{|y-x|^2}{2!} \frac{2}{k^3} = \frac{|y-x|^2}{k^3}.}$$

14. (a) $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3}$ est une série de Riemann d'exposant $3>1$, donc convergente.

Pour tout $k \geq 1$ et $x \in J$, on a :

$$|g_k'(x)| = \left| \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2} \right| = \frac{1}{(k+1+x)^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

La série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ étant convergente, on en déduit que $\sum_{k \geq 0} g_k'(x)$ est absolument convergente par théorème de comparaison, donc convergente.

(b) Soit $(x, y) \in J^2$. Toujours par théorème de comparaison avec l'inégalité obtenue à la question 13., la série de terme général $(g_k(y) - g_k(x) - (y-x)g_k'(x))$ est absolument convergente. D'où par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|f(y) - f(x) - (y-x)\sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{+\infty}(g_k(y) - g_k(x) - (y-x)g_k'(x)\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left|(g_k(y) - g_k(x) - (y-x)g_k'(x)\right| \\ &\leq |g_0(y) - g_0(x) - (y-x)g_0'(x)| + \sum_{k=1}^{+\infty} \left|(g_k(y) - g_k(x) - (y-x)g_k'(x)\right| \\ &\leq |g_0(y) - g_0(x) - (y-x)g_0'(x)| + |y-x|^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}\end{aligned}$$

Pour $x \neq y$, on obtient en divisant par $|y - x| > 0$:

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x)\right| \leq \left|\frac{g_0(y) - g_0(x)}{y - x} - g_0'(x)\right| + |y - x| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

Or on a $\displaystyle\lim_{y\to x} \frac{g_0(y) - g_0(x)}{y - x} = g_0'(x)$, de sorte que :

$$\lim_{y\to x} \left|\frac{g_0(y) - g_0(x)}{y - x} - g_0'(x)\right| + |y - x| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = 0.$$

Par théorème des gendarmes, la limite $\displaystyle\lim_{y\to x} \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x)\right|$ existe et vaut :

$$\lim_{y\to x} \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x)\right| = 0,$$

ce qui équivaut à :

$$\lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x).$$

Ainsi f est dérivable en tout point $x \in J$, et donc sur J et on a :

$$\boxed{\forall x \in J,\ f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}.}$$

(c) On a :

$$f'(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \boxed{= -\frac{\pi^2}{12}.}$$

15. Il s'agit de faire apparaitre sur la courbe les différents éléments mis en évidence au cours du problème : f est décroissante, dérivable (ce qui signifie que graphiquement, la courbe de f ne doit pas présenter « d'angles »), tend vers $+\infty$ en -1 et vers 0 en $+\infty$.

D'autre part, elle vaut environ $0,69$ en 0 et $0,31$ en 1. Enfin, sa tangente en 0 possède un coefficient directeur qui vaut $-\frac{\pi^2}{12}$. Sans chercher à en calculer une valeur exacte, on peut grossièrement affirmer que ceci est compris entre $-\dfrac{3}{4}$ et -1, et donc on évitera d'avoir une tangente trop « plate » ou trop « pentue » en 0.

Exercice 3 (EML 2017)
Partie I : Étude d'un exemple.

On considère la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est triangulaire supérieure, avec un 0 sur la diagonale. $\boxed{\text{Elle n'est donc pas inversible.}}$ De plus, sa première colonne $C_1(A)$ est nulle, tandis que $C_2(A)$ et $C_3(A)$ sont linéairement indépendantes. Donc $\boxed{A \text{ est de rang } 2.}$

2. La matrice A étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur sa diagonale. Ainsi on a $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2, 6\}.}$ Elle admet donc 3 valeurs propres réelles distinctes et est de taille 3×3. A est donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

3. Remarquons tout d'abord que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 0, et comme $\dim(E_0(A)) = 1$, on a $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

   Déterminons $E_2(A)$. On a :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 2x \\ 2y - 4z = 2y \\ 6z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases}$$
   Ainsi on a $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

   Déterminons enfin $E_6(A)$. On a :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_6(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 6x \\ 2y - 4z = 6y \\ 6z = 6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6x \\ z = -y = 6x \end{cases}$$
   Ainsi on a $E_6(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -6x \\ 6x \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$.

   Comme A est diagonalisable, on a $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = E_0(A) \oplus E_2(A) \oplus E_6(A)$ et $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. Soit $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathscr{B}$. P est inversible, avec les coefficients de sa première ligne tous égaux à 1, et on a par formule de changement de bases :
$$\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = D.}$$
   $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est bien diagonale avec des coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant, et on a bien $A = PDP^{-1}$. D'où le résultat souhaité.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de polynômes.

4. Pour tout $P \in E$, on a $\deg(P) \leq n$. Donc $\deg(X(X-1)P') \leq n+1$, de sorte que $\deg(T(P)) = \deg((X(X-1)P')') \leq n$. Ainsi $T(P)$ appartient bien à E pour tout $P \in E$.

   Montrons de plus que T est linéaire. Soit pour cela $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in E$. On a :

$$\begin{aligned} T(\alpha P + \beta Q) &= (X(X-1)(\alpha P + \beta Q)')' \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= (X(X-1)(\alpha P' + \beta Q'))' = (\alpha X(X-1)P' + \beta X(X-1)Q')' \\ &= \alpha(X(X-1)P')' + \beta(X(X-1)Q')' \quad \text{toujours par lin. de la dérivation} \\ &= \alpha T(P) + \beta T(Q) \end{aligned}$$

   D'où la linéarité. $\boxed{T \text{ donc un endomorphisme de } E.}$

5. On a $T(1) = 0$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$T(X^k) = (X(X-1)kX^{k-1})' = (kX^{k+1} - kX^k)' \boxed{= k(k+1)X^k - k^2X^{k-1}.}$$

   D'où la matrice M de T dans la base $\mathscr{B}$:

$$\boxed{M = M_{\mathscr{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -4 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & n(n-1) & -n^2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}.}$$

6. La matrice M est triangulaire supérieure, avec un 0 sur la diagonale. Donc M n'est pas inversible, et l'endomorphisme $\boxed{T \text{ n'est pas bijectif.}}$

   La première colonne $C_1(M)$ de M est nulle, et les n colonnes suivantes $C_2(M), \dots, C_{n+1}(M)$ forment une famille libre car elles sont échelonnées. Ainsi $\text{rg}(M) = n$, et on a donc $\boxed{\text{rg}(T) = n.}$

   Par le théorème du rang, on a :

$$\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(E) - \text{rg}(T) = n + 1 - n = 1.$$

   Et on a $T(1) = 0$. Ainsi $1 \in \text{Ker}(T)$ et est un vecteur non nul. (1) est donc une base de $\text{Ker}(T)$, de sorte que $\boxed{\text{Ker}(T) = \text{Vect}(1).}$

7. La matrice M étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale. On a donc :

$$\boxed{\text{Sp}(T) = \text{Sp}(M) = \{k(k+1),\ k \in [\![0, n]\!]\}.}$$

   Ces valeurs propres sont deux à deux distinctes (puisque l'application $x \mapsto x(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc injective). L'endomorphisme T admet donc $n + 1 = \dim(E)$ valeurs propres distinctes, $\boxed{T \text{ est donc diagonalisable.}}$ On peut même ajouter que tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Partie III : Intervention d'un produit scalaire.

8. Notons tout d'abord que pour tout $P, Q \in E$, l'intégrale $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$ converge bien car c'est l'intégrale d'une fonction continue (car polynomiale) sur un segment. Montrons que φ est un produit scalaire sur E.

- *Linéarité à gauche.* $\forall P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q) &= \int_0^1 (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) Q(x) \mathrm{d}x \\ &= \lambda_1 \int_0^1 P_1(x) Q(x) \mathrm{d}x + \lambda_2 \int_0^1 P_2(x) Q(x) \mathrm{d}x \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda_1 \varphi(P_1, Q) + \lambda_2 \varphi(P_2, Q)\end{aligned}$$

- *Symétrie.*

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(x) Q(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 Q(x) P(x) \mathrm{d}x = \langle Q, P \rangle.$$

  En particulier, on en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite.

- *Positivité.*

$$\langle P, P \rangle = \int_0^1 P(x)^2 \mathrm{d}x.$$

  Or l'intégrale d'une fonction positive est positive. Donc $\varphi(P, P) \geq 0$.

- *Défini positif.* Soit $P \in E$ tel que $\varphi(P, P) = 0$. On a :

$$0 = \int_0^1 P(x) \mathrm{d}x.$$

  La fonction $x \mapsto P(x)^2$ est **continue** et **positive** sur $[0, 1]$. Son intégrale est donc nulle si et seulement si :

$$\forall x \in [0, 1], \quad P(x)^2 = 0 \Rightarrow \forall x \in [0, 1], \quad P(x) = 0.$$

  Ainsi P est un polynôme admettant une **infinité de racines** (tous les réels entre 0 et 1). C'est donc le polynôme nul. Donc $P = 0_E$ et φ est défini positif.

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$

9. Comme souvent (toujours ?) dans cette situation, on va effectuer une intégration par parties. Pour tout $P, Q \in E$, on a :

$$\varphi(T(P), Q) = \int_0^1 \left[x(x-1)P'(x)\right]'(x) Q(x) \mathrm{d}x.$$

On a :

$$\begin{array}{c|ccc} + & Q(x) & & [x(x-1)P'(x)]'(x) \\ & & \searrow & \\ - & Q'(x) & \overset{\int}{\leftarrow} & x(x-1)P'(x) \end{array}$$

Les fonctions $x \mapsto Q(x)$ et $x \mapsto x(x-1)P'(x)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$. Par intégration par parties, on a :

$$\varphi(T(P), Q) = \underbrace{\left[x(x-1)P'(x)Q(x)\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 x(x-1)P'(x)Q'(x) \mathrm{d}x \boxed{= - \int_0^1 x(x-1)P'(x)Q'(x) \mathrm{d}x.}$$

10. On a ainsi pour tout $P, Q \in E$:

$$\varphi(T(P), Q) \overset{9.}{=} - \int_0^1 x(x-1)P'(x)Q'(x) \mathrm{d}x = - \int_0^1 x(x-1)Q'(x)P'(x) \mathrm{d}x \overset{9.}{=} \varphi(T(Q), P) = \varphi(P, T(Q))$$

Donc $\boxed{T \text{ est un endomorphisme symétrique de } (E, \varphi.}$

On retrouve ainsi le résultat de la question 7. : $\boxed{T \text{ est diagonalisable.}}$

11. (a) Pour tout $P \in E$, on a :

$$\varphi(T(P),P) \overset{9.}{=} -\int_0^1 x(x-1)P'(x)^2 \mathrm{d}x.$$

Comme $x \mapsto x(x-1)P'(x)^2$ est une fonction positive sur $[0,1]$, on a $\boxed{\varphi(T(P),P) \geq 0}$ par positivité de l'intégrale.

(b) Soit $P \in E$ tel que $\varphi(T(P),P) = 0$. On a :

$$0 = \varphi(T(P),P) \overset{9.}{=} -\int_0^1 x(x-1)P'(x)^2 \mathrm{d}x.$$

Comme $x \mapsto x(x-1)P'(x)^2$ est une fonction **continue** et **positive** sur $[0,1]$, cette intégrale est nulle si et seulement si $x \mapsto x(x-1)P'(x)^2$ est la fonction nulle sur $[0,1]$. Ce qui équivaut à :

$$\forall x \in [0,1], \quad x(x-1)P'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in]0,1[, \quad P'(x) = 0.$$

Le polynôme P' admet donc une infinité de racines (tous les réels strictement compris entre 0 et 1). C'est donc le polynôme nul. Ainsi $P' = 0_E$, et P est un polynôme constant. Et réciproquement, si $P = c \in \mathbb{R}$, on a bien :

$$\varphi(T(P),P) = \varphi(0_E,P) = 0.$$

Ainsi $\boxed{\text{l'ensemble des polynômes } P \text{ de } E \text{ tels que } \varphi(T(P),P) = 0 \text{ est } \{c,\ c \in \mathbb{R}\}}.$

Partie IV : Retour sur l'exemple de la partie I.

12. Lorsque $n = 2$, on a :

$$\boxed{M = M_{\mathscr{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = A.}$$

13. On a montré à la partie I que A est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(A) = \{0,2,6\}$ et que $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $E_6(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$.

En utilisant la correspondance vectorielle/matricielle, on en déduit que T est diagonalisable (ce qu'on savait), $\mathrm{Sp}(T) = \{0,2,6\}$ et que $E_0(T) = \mathrm{Vect}(1)$, $E_2(T) = \mathrm{Vect}(1-2X)$, $E_6(T) = \mathrm{Vect}(1-6X+6X^2)$. Comme de plus T est symétrique, on sait par le cours que la famille $(1, 1-2X, 1-6X+6X^2)$ est orthogonale pour φ. Reste à normaliser chacun de ces vecteurs. On a :

$$\|1\|^2 = \int_0^1 1^2 \mathrm{d}x = 1,$$

$$\|1-2X\|^2 = \int_0^1 (1-2x)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 1 - 4x + 4x^2 \mathrm{d}x = 1 - 2 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} \|1-6X+6X^2\|^2 &= \int_0^1 (1-6x+6x^2)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 1 + 36x^2 + 36x^4 - 12x + 12x^2 - 72x^3 \mathrm{d}x \\ &= 1 + \frac{36}{3} + \frac{36}{5} - \frac{12}{2} + \frac{12}{3} - \frac{72}{4} = 1 + 12 + \frac{36}{5} - 2 - 18 = \frac{36}{5} - 7 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

en utilisant pour ce dernier calcul l'identité :

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Ainsi $\boxed{\mathscr{C} = \left(1, \sqrt{3}(1-2X), \sqrt{5}(1-6X+6X^2)\right)}$ est une base orthonormée de E pour le produit scalaire φ, formée de vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de T dans l'ordre croissant.

14. On a :

$$M_{\mathscr{C}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}^2.$$

Soit V l'unique endomorphisme de E tel que $M_{\mathscr{C}}(V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$. On a donc :

$$M_{\mathscr{C}}(V \circ V) = M_{\mathscr{C}}(V)^2 = M_{\mathscr{C}}(T).$$

Ainsi on a $\boxed{V \circ V = T}$. La matrice de V **dans la base orthonormée** $\mathscr{C}$ étant de plus symétrique, $\boxed{V \text{ est un endomorphisme symétrique de } (E, \varphi).}$

Enfin puisque $\mathscr{C}$ est une base orthonormée de (E, φ), on a pour tout $P \in E$ (en notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées de P dans la base $\mathscr{C}$) :

$$\varphi(V(P), P) = {}^t(M_{\mathscr{C}}(V)X)X = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}y & \sqrt{6}z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{2}y^2 + \sqrt{6}z^2 \boxed{\geq 0.}$$