DM15

Devoir maison facultatif type Ecricome - EM Lyon

Exercice 1

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère la fonction f_n définie, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'ouvert $U =]0, +\infty[^n$, par :

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)$$

1. Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
2. Montrer que f_n possède une infinité de points de critiques $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et les déterminer.
3. (a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f_n.
   (b) Vérifier que la hessienne H_n de f_n en un point critique quelconque de f_n est proportionnelle à la matrice $K_n = nI_n - J_n$, où I_n désigne la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.
4. (a) Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre de J_n.
   (b) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n puis celles de K_n.
   (c) Montrer que l'on ne peut pas, de cette façon, conclure à l'existence d'un extremum local de f_n sur U.
5. **Étude du cas $n = 2$.**
   (a) Comparer les réels $(x_1 + x_2)^2$ et $4x_1x_2$.
   (b) En déduire que f_2 admet sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un minimum global et donner sa valeur.
6. **Étude du cas général.**
   On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, montrer que f_n admet un minimum global sur U, égal à n^2.

Exercice 2

Dans tout le problème, J désigne l'intervalle $]-1, +\infty[$.

Le but du problème est l'étude de l'application f définie, pour tout x de J, par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Préliminaires.

1. Justifier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

2. En admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. En déduire que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Partie I : Éléments d'étude de f.

4. Justifier, pour tout $x \in J$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

5. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

6. Montrer que :
$$\forall x \in J, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1},$$
et en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

7. (a) Montrer que : $\forall (x,y) \in J^2,\ \forall t \in]0,1],\ (x \leq y \Longrightarrow t^x \geq t^y)$.
   (b) En déduire que f est décroissante sur J.

8. Montrer que : $\forall x \in J,\ f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$.

9. Déduire des résultats précédents que :
$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

10. Soit $x \in J$.
    (a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$
    (b) En déduire que la série numérique $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge et que :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

11. (a) Montrer que :
$$\forall (x,y) \in J^2,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| \leq |x-y| \frac{1}{k^2},$$
    puis que :
$$\forall (x,y) \in J^2,\ |f(x) - f(y)| \leq |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right).$$
    (b) En déduire que f est continue sur J.

12. Montrer que $f(x) \underset{x \to -1}{\sim} \dfrac{1}{x+1}$. En déduire la limite de f en -1.

Partie II : Dérivabilité de f.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k l'application de classe $\mathscr{C}^2$ de J dans $\mathbb{R}$ définie pour tout x de J par :

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

13. Montrer que :

$$\forall (x,y) \in J^2,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ |g_k(y) - g_k(x) - (y-x)g_k'(x)| \leq \frac{|y-x|^2}{k^3}.$$

14. (a) Justifier la convergence des séries $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^3}$ et $\sum_{k\geq 0} g_k'(x)$, pour tout $x \in J$.

    (b) En déduire que f est dérivable sur J et que :

$$\forall x \in J,\ f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}.$$

    (c) Déterminer $f'(0)$.

15. Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On donne la valeur approchée : $\ln 2 \approx 0,69$.

Exercice 3
Partie I : Étude d'un exemple.

On considère la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle inversible ? Quel est son rang ?

2. Quelles sont les valeurs propres de A ? La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

3. Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, telles que : $A = PDP^{-1}$.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de polynômes.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n, et $\mathscr{B} = (1, X, \cdots, X^n)$ la base canonique de E.
On note, pour tout polynôme P de E, $T(P) = (X(X-1)P')'$, où l'accent désigne la dérivation.
Par exemple, si $P = X^2$, alors $P' = 2X$, et donc

$$T(P) = (X(X-1)2X))' = (2X^3 - 2X^2)' = 6X^2 - 4X.$$

4. Montrer que T est un endomorphisme de E.

5. Calculer, pour tout k de $\{0, \cdots, n\}, T(X^k)$. En déduire la matrice M de T dans la base $\mathscr{B}$.

6. L'endomorphisme T est-il bijectif ? Quel est le rang de T ? Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$.

7. Quelles sont les valeurs propres de T ? L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

Partie III : Intervention d'un produit scalaire.

On conserve les notations de la partie II.
On considère l'application $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \varphi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Démontrer : $\quad \forall (P,Q) \in E^2, \quad \varphi(T(P),Q) = -\int_0^1 x(x-1)P'(x)Q'(x)\mathrm{d}x.$
3. En déduire que T est un endomorphisme symétrique de E pour le produit scalaire φ.

   Quel résultat de la partie II peut-on retrouver ainsi ?
4. (a) Établir : $\quad \forall P \in E, \quad \varphi(T(P),P) \geq 0.$

   (b) Déterminer l'ensemble des polynômes P de E tels que $\varphi(T(P),P) = 0$.

Partie IV : Retour sur l'exemple de la partie I.

On conserve les notations des parties II et III et on suppose dans cette partie que $n = 2$.

12. Quelle est la matrice de T dans la base $\mathscr{B}$ de E ?
13. En utilisant les résultats obtenus dans la question 3. de la partie I, déterminer une base orthonormale $\mathscr{C}$ de E pour le produit scalaire φ, formée de vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de T dans l'ordre croissant.
14. Déterminer, par sa matrice dans la base $\mathscr{C}$ de E, un endormorphisme V de E, symétrique pour le produit scalaire φ, tel que

$$\begin{cases} V \circ V = T \\ \forall P \in E, \quad \varphi(V(P),P) \geq 0 \end{cases}$$
