DM16

Correction du devoir maison facultatif Maths II 2021

Partie 1. Polynômes factoriels.

1. (a) On suppose qu'il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ non tous nuls tels que

$$\lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_r Q_r = 0$$

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un indice k tel que $\lambda_k \neq 0$, et considérons alors $m = \max\{k \in [\![0, r]\!], \lambda_k \neq 0\}$.
Supposons que $m = 0$. $\lambda_0 \neq 0$ et tous les autres λ_k sont nuls, donc $\lambda_0 Q_0 = 0$. L'énoncé présuppose que $d_0 \in \mathbb{N}$, donc $Q_0 \neq 0$. Ce qui est contradictoire. Donc $m \neq 0$.

On a $m \geqslant 1$. Comme $\lambda_m \neq 0$, on a :

$$Q_m = -\frac{\lambda_0}{\lambda_m} Q_0 - \frac{\lambda_1}{\lambda_m} Q_1 - \dots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} Q_{m-1}$$

C'est une combinaison linéaire de polynômes de degrés inférieurs ou égaux à d_{m-1}, donc $Q_m \in F_{d_{m-1}}$, donc $d_m \leqslant d_{m-1}$, ce qui est exclu.
Par raisonnement par l'absurde, il n'existe pas d'indice k pour lequel $\lambda_k \neq 0$. On a montré :

$$(\lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_r Q_r = 0) \Rightarrow (\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0)$$

$\boxed{\text{La famille } (Q_0, Q_1, \dots, Q_r) \text{ est libre.}}$

Remarque. On a montré ici le résultat du cours « une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés est une famille libre ».

(b) • Si $(Q_0, Q_1, \dots, Q_r)$ est une base de F_r, alors $d_r \leqslant r$. Donc $0 \leqslant d_0 < d_1 < \dots < d_r \leqslant r$, donc les $r+1$ degrés sont des entiers consécutifs. Pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $d_k = k$.

• Réciproquement, si pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $d_k = k$, alors $(Q_0, Q_1, \dots, Q_r)$ est une famille de F_r, libre par la question précédente, et de cardinal $r + 1 = \dim F_r$. C'est donc une base de F_r.
$\boxed{\text{La famille } (Q_0, Q_1, \dots, Q_r) \text{ est une base de } F_r \text{ si et seulement si } \forall k \in [\![0, r]\!],\ d_k = k.}$

2. (a) Si $r = 0$, $V_r = V_0 = 1$ et ce polynôme n'a pas de racine.
Si $r \in \mathbb{N}^*$, $V_r = X(X-1)(X-2)\dots(X-r+1)$ et sous cette forme factorisée, on voit les racines de V_r : $0, 1, \dots, r-1$.
$\boxed{\text{Pour } r \in \mathbb{N}^*, \text{ les racines de } V_r \text{ sont } 0, 1, \dots, r-1.}$

(b) Pour tout k de $[\![0, r]\!]$, $\deg V_k = k$. Par la question 1., $\boxed{\text{la famille } (V_0, V_1, \dots, V_r) \text{ est une base de } F_r}$.

(c) Soit $\mathcal{P}_r$ la proposition « $x^{\underline{r}} \underset{x \to +\infty}{=} x^r - \dfrac{r(r-1)}{2} x^{r-1} + o(x^{r-1})$ », qu'on montre par récurrence pour $r \geqslant 2$.
• $x^{\underline{2}} = x(x-1) = x^2 - x = \underset{+\infty}{=} x^2 - \frac{2(2-1)}{2} x + o(x)$ et $\mathcal{P}_2$ est vraie.
• Soit $r \geqslant 2$ tel que $\mathcal{P}_r$ est vraie.

$$\begin{aligned} x^{\underline{r+1}} &= x^{\underline{r}}(x-r) \\ &\underset{\mathcal{P}_r}{=} \left(x^r - \frac{r(r-1)}{2} x^{r-1} + o(x^{r-1}) \right)(x-r) \end{aligned}$$

En développant :

$$\begin{aligned}
x^{\underline{r+1}} &= x^{r+1} - \frac{r(r-1)}{2}x^r + o(x^r) - rx^r + \frac{r^2(r-1)}{2}x^{r-1} + o(x^{r-1}) \\
&= x^{r+1} - \frac{r(r-1)}{2}x^r - rx^r + o(x^r) \text{ car } x^{r-1} \underset{+\infty}{=} o(x^r) \\
&= x^{r+1} - \frac{r(r+1)}{2}x^r + o(x^r)
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{r+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

$\boxed{\text{Pour tout entier } r \geqslant 2,\ x^{\underline{r}} \underset{x\to+\infty}{=} x^r - \frac{r(r-1)}{2}x^{r-1} + o(x^{r-1}).}$

3. Ici, l'entier $r \geqslant 1$ est fixé et on compare la famille $(V_k)_{0\leqslant k\leqslant r}$ à la base canonique $(U_k)_{0\leqslant k\leqslant r}$ de l'espace F_r des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à r.

   (a) $U_r \in F_r$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $(V_0, V_1, \ldots, V_r)$ de F_r.

   $\boxed{\text{Il existe une unique famille } (\sigma(r,k))_{0\leqslant k\leqslant r} \text{ de nombres réels tels que } U_r = \sum_{k=0}^{r} \sigma(r,k)V_k.}$

   (b) Évaluons 3.a. en 0 ;

$$\begin{aligned}
0 &= U_r(0) = \sum_{k=0}^{r} \sigma(r,k)V_k(0) \\
0 &= \sigma(r,0) + \sum_{k=1}^{r} \sigma(r,k)\underbrace{V_k(0)}_{=0}
\end{aligned}$$

$\boxed{\sigma(r,0) = 0}$

On a donc

$$\begin{aligned}
U_r &= \sum_{k=1}^{r} \sigma(r,k)V_k \\
X^r &= \sigma(r,r)V_r + \underbrace{\sum_{k=1}^{r-1} \sigma(r,k)V_k}_{\text{de degré } \leqslant r-1} \text{ car pour tout } k,\ \deg V_k = k
\end{aligned}$$

L'identification des coefficients dominants donne : $1 = \sigma(r,r) \times$ (coeff. dominant de V_r). Comme $V_r = X(X-1)\ldots(X-r+1)$, son coefficient dominant est 1. On trouve alors $\sigma(r,r) = 1$.

$$\begin{aligned}
X^r &= \sigma(r,1)V_1 + \sum_{k=2}^{r} \sigma(r,k)V_k \\
&\quad \text{on évalue en } 1 : \\
1 &= \sigma(r,1) \times 1 + \sum_{k=2}^{r} \sigma(r,k) \times 0
\end{aligned}$$

$\boxed{\sigma(r,1) = \sigma(r,r) = 1}$

Ce qui vient d'être fait établit déjà $\sigma(r,r-1) = \frac{r(r-1)}{2}$ pour $r \in \{0,1\}$. Dans ce qui suit, on considère $r \geqslant 2$. On a $X^r = V_r + \sigma(r,r-1)V_{r-1} + \sum_{k=1}^{r-2} \sigma(r,k)V_k$. Par la question 2.c.,

$$x^r \underset{+\infty}{=} x^r - \frac{r(r-1)}{2}x^{r-1} + o(x^{r-1}) + \sigma(r,r-1)V_{r-1}(x) + \sum_{k=1}^{r-2} \sigma(r,k)V_k(x)$$

Comme pour tout $k \leqslant r-2$, on a $\deg V_k = k \leqslant r-2$, on a $\sum_{k=1}^{r-2} \sigma(r,k)V_k(x) \underset{+\infty}{=} o(x^{r-1})$.
Donc

$$\sigma(r,r-1)V_{r-1}(x) - \frac{r(r-1)}{2}x^{r-1} + o(x^{r-1}) \underset{+\infty}{=} o(x^{r-1})$$

Le terme de degré $r-1$ du membre de gauche est donc nul. Comme V_{r-1} est de coefficient dominant 1, on trouve :

$$\sigma(r,r-1)\times 1 - \frac{r(r-1)}{2} = 0$$

$\boxed{\sigma(r,r-1) = \frac{r(r-1)}{2}}$

Enfin, évaluons en 2 l'égalité $X^r = V_r + \sum_{k=3}^{r-1} \sigma(r,k)V_k + \sigma(r,2)V_2 + X$.
Comme 2 est racine de $V_3, V_4, \ldots, V_r$, nous avons

$$2^r = \sigma(r,2)V_2(2) + 2 \quad \text{puis} \quad 2^r = \sigma(r,2)\times 2(2-1) = 2$$

$\boxed{\text{Pour } r \in [\![2,+\infty[\![, \quad \sigma(r,2) = 2^{r-1}-1.}$

(c) • D'une part, $X^{r+1} = X \times X^r$ donc $\sum_{k=0}^{r+1} \sigma(r+1,k)V_k = \sum_{k=0}^{r} \sigma(r,k)XV_k$.
• D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{r} \left(\sigma(r,k-1) + k\sigma(r,k)\right) V_k \\
= &\sum_{k=1}^{r} \left(\sigma(r,k-1)V_k + k\sigma(r,k)V_k\right) = \sum_{j=0}^{r-1} \sigma(r,j)V_{j+1} + \sum_{k=1}^{r} k\sigma(r,k)V_k \\
= &\underbrace{\sigma(r,0)V_1}_{=0} + r\sigma(r,r)V_r + \sum_{k=1}^{r-1} \sigma(r,k)(V_{k+1} + kV_k)
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
V_{k+1} + kV_k &= X(X-1)\ldots(X-(k+1)+1) + kX(X-1)\ldots(X-k+1) \\
&= X(X-1)\ldots(X-k+1)[X-k+k] = XV_k
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{r} \left(\sigma(r,k-1) + k\sigma(r,k)\right) V_k &= 0 + r\sigma(r,r)V_r + \sum_{k=1}^{r-1} \sigma(r,k)XV_k \\
&= r\sigma(r,r)V_r - \sigma(r,r)XV_r + \sum_{k=1}^{r} \sigma(r,k)XV_k \\
&= r\sigma(r,r)V_r - \sigma(r,r)XV_r + \sum_{k=0}^{r} \sigma(r,k)XV_k \text{ car } \sigma(r,0) = 0 \\
& \text{ et par le premier point de la question et } \sigma(r,r) = 1 \ : \\
&= \underbrace{(r-X)V_r}_{=-V_{r+1}} + \sum_{k=0}^{r+1} \sigma(r+1,k)V_k \\
&= -V_{r+1} + \sigma(r+1,r+1)V_{r+1} + \sum_{k=0}^{r} \sigma(r+1,k)V_k \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sigma(r+1,k)V_k \text{ car } \sigma(r+1,r+1) = 1 \text{ et } \sigma(r+1,0) = 0
\end{aligned}$$

En conclusion, $\sum_{k=1}^{r}\left(\sigma(r,k-1)+k\sigma(r,k)\right)V_k=\sum_{k=1}^{r}\sigma(r+1,k)V_k$. Par liberté de $(V_0,V_1,\dots,V_r)$, les coefficients se correspondent.

Pour tout $r\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $k\in[\![1,r]\!]$, on a $\sigma(r+1,k)=\sigma(r,k-1)+k\sigma(r,k)$.

(d) Soit $\mathcal{P}_r$: « $\forall k\in[\![1,r]\!]$, $\sigma(r,k)\in\mathbb{N}^*$ » qu'on montre par récurrence pour $r\in\mathbb{N}^*$.

- $\sigma(1,1)=1\in\mathbb{N}^*$ par (2) du 3.b. donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- Soit $r\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_r$ est vraie. Soit $k\in[\![1,r+1]\!]$.
  - si $k\in[\![2,r]\!]$, par la question précédente, on a :

$$\sigma(r+1,k)=\underbrace{\sigma(r,k-1)}_{\in\mathbb{N}^*\text{ par }\mathcal{P}_r}+\underbrace{k}_{\in\mathbb{N}^*}\times\underbrace{\sigma(r,k)}_{\in\mathbb{N}^*\text{ par }\mathcal{P}_r}\in\mathbb{N}^*$$

  - si $k=1$, $\sigma(r+1,k)=\sigma(r+1,1)=1\in\mathbb{N}^*$ par (2) du 3.b.
  - si $k=r+1$, $\sigma(r+1,r+1)=1$ par (2) du 3.b.

Donc $\forall k\in[\![1,r+1]\!]$, $\sigma(r+1,k)\in\mathbb{N}^*$ et $\mathcal{P}_{r+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

$\sigma(r,k)$ est un entier naturel non nul pour tout $r\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $k\in[\![1,r]\!]$.

(e) Par 3.b. et c., on a possibilité de ranger les $\sigma(r,k)$ sous forme de tableau comme suit.

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=1	1	-	-	-	-
r=2	1	1	-	-	-
r=3	1	(f)	1	-	-
r=4	1	(f)	(f)	1	-
r=5	1	(f)	(f)	(f)	1

Les cases (f) s'obtenant avec la formule du 3.c. Remarquons que si on utilise les relations (3) et (4) de 3.b., on a tous les coefficients demandés sauf un, qui s'obtient avec (f).

```python
M = np.zeros((5,5))
M[:,0] = 1
for i in range(1,5):
    M[i,i] = 1
for i in range(1,5):
    for j in range(1,i+1):
        M[i,j] = M[i-1,j-1] + (j+1)*M[i-1,j]
print(M)
```

On obtient $\begin{pmatrix}1&&&&\\1&1&&&\\1&3&1&&\\1&7&6&1&\\1&15&25&10&1\end{pmatrix}$.

4. (a) On a déjà vu que $V_r\in F_r$. V_r s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base canonique de F_r. Pour tout entier naturel r, il existe une unique famille $(s(r,k))_{0\leqslant k\leqslant r}$ de nombres réels tels que

$$V_r=\sum_{k=0}^{r}s(r,k)U_k\quad\text{soit}\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad x^{\underline{r}}=\sum_{k=0}^{r}s(r,k)x^k.$$

(b) Soit $r\in\mathbb{N}^*$. On reprend la façon de raisonner du 3.c.

On remarque que $X^{\underline{r+1}} = X^{\underline{r}}(X-r) = X^{\underline{r}}X - rX^{\underline{r}}$. Par 4.a., on a alors l'égalité :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{r+1} s(r+1,k)X^k &= \sum_{k=0}^{r} s(r,k)X^kX - r\sum_{k=0}^{r} s(r,k)X^k \\ &= \sum_{j=1}^{r+1} s(r,j-1)X^j - r\sum_{k=0}^{r} s(r,k)X^k \\ &= s(r,r)X^r + \sum_{k=1}^{r}\left(s(r,k-1) - rs(r,k)\right)X^k - rs(r,0)\end{aligned}$$

Comme vu au 3.b., avec identification des coefficients dominants dans $V_r = \sum\limits_{k=0}^{r} s(r,k)X^k$, on trouve $1 = s(r,r)$. De même, $s(r+1,r+1) = 1$.
Comme vu au 3.a., en évaluant en 0 l'égalité $V_r = \sum\limits_{k=0}^{r} s(r,k)X^k$, on trouve $0 = s(r,0)$. De même, $s(r+1,0) = 0$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{r} s(r+1,k)X^k = \sum_{k=0}^{r+1} s(r+1,k)X^k = \sum_{k=1}^{r}\left(s(r,k-1) - rs(r,k)\right)X^k$$

Donc $\sum\limits_{k=1}^{r} s(r+1,k)U_k = \sum\limits_{k=1}^{r}(s(r,k-1) - rs(r,k))U_k$, et par liberté de $(U_1, U_2, \ldots, U_r)$,
$\boxed{\forall k \in [\![1,r]\!], \quad s(r+1,k) = s(r,k-1) - rs(r,k)}$.

$s(r+1,1) = s(r,0) - rs(r,1) = 0 - rs(r,1) = -rs(r,1)$ (*)
Comme $s(1,1)$ est le coefficient de $V_1 = X$ dans la base canonique $(1,X)$, on a $s(1,1) = 1$.
Par la relation (*), $s(2,1) = -1$, $s(3,1) = 2$, $s(4,1) = -3 \times 2$, et par récurrence, on peut établir :

$\boxed{s(r,1) = (-1)^{r-1}(r-1)! \text{ pour tout } r \in \mathbb{N}^*.}$

(c) Soit $\mathcal{P}_r$ la proposition « $\forall k \in [\![1,r]\!]$, le signe de $s(r,k)$ est celui de $(-1)^{r+k}$ », qu'on montre par récurrence pour $r \in \mathbb{N}^*$.
- Par la question précédente, $s(r,1)$ est du signe de $(-1)^{r-1} = (-1)^2(-1)^{r-1} = (-1)^{r+1}$ et $\mathcal{P}_1$ est vraie.

- Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_r$ est vraie. Soit $k \in [\![1,r+1]\!]$.
  - si $k = r+1$, $s(r+1,r+1) = 1$ et $(-1)^{r+1+r+1} = 1$ sont de même signe ;
  - si $k = 1$, $s(r+1,1) \underset{b.}{=} (-1)^r r!$ et $(-1)^{r+1+1} = (-1)^r$ sont de même signe ;
  - si $k \in [\![2,r]\!]$, par hypothèse de récurrence : $s(r,k-1)$ est du signe de $(-1)^{r+k-1}$, $s(r,k)$ est du signe de $(-1)^{r+k}$ donc $-rs(r,k)$ est du signe de $(-1)^{r+k+1} = (-1)^{r+k-1}$, et par somme de termes de même signe, la relation du 4.b. nous apporte que $s(r+1,k)$ est du signe de $(-1)^{r+k-1} = (-1)^{r+k+1}$.

$\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.
$\boxed{\text{Pour tout } r \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } k \in [\![1,r]\!], \text{ le signe de } s(r,k) \text{ est celui de } (-1)^{r+k}.}$

(d) Par (2) du 3.b., $\sigma(r,r) = 1$ et on a vu au cours de 4.a. que $s(r,r) = 1$, donc $\boxed{\sigma(r,r)s(r,r) = 1}$.
Raisonnons à nouveau comme aux questions 3.c. et 4.b. Par interversion de sommes :

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{r}\sum_{k=\ell}^{r} \sigma(r,k)s(k,\ell)U_\ell &= \sum_{k=0}^{r}\sum_{\ell=0}^{k} \sigma(r,k)s(k,\ell)U_\ell \\ &= \sum_{k=0}^{r} \sigma(r,k)\underbrace{\sum_{\ell=0}^{k} s(k,\ell)U_\ell}_{=V_k} = U_r\end{aligned}$$

Donc
$$\sigma(r,r)s(r,r)U_r + \sum_{\ell=0}^{r-1}\sum_{k=\ell}^{r}\sigma(r,k)s(k,\ell)U_\ell = U_r$$
et donc $\sum\limits_{\ell=0}^{r-1}\sum\limits_{k=\ell}^{r}\sigma(r,k)s(k,\ell)U_\ell = 0$. Par liberté de $(U_0, U_1, \dots, U_{r-1})$,

$\boxed{\forall \ell \in [\![0, r-1]\!], \quad \sum\limits_{k=\ell}^{r}\sigma(r,k)s(k,\ell) = 0}$

(e) On a déjà vu que $s(r,r) = 1$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$. Par d., avec $\ell = r-1$,
$$\begin{aligned} \sigma(r,r-1)s(r-1,r-1) + \sigma(r,r)s(r,r-1) &= 0 \\ \frac{r(r-1)}{2} \times 1 + 1 \times s(r,r-1) &= 0 \text{ par 3.b. (3)} \end{aligned}$$

$\boxed{s(r,r-1) = -\frac{r(r-1)}{2} \text{ pour tout entier } r \geqslant 2.}$

Partie 2. Quelques propriétés de la loi de Poisson.

5. (a) $E(X) = \theta = V(X)$ et $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = \theta + \theta^2$.

(b)
$$\begin{aligned} X &= X^{\underline{1}} \\ X^2 &= X(X-1+1) = X(X-1) + X = X^{\underline{1}} + X^{\underline{2}} \\ X^3 &= X^2(X) = (X^{\underline{1}} + X^{\underline{2}})X \\ &= X^{\underline{1}}(X-1+1) + X^{\underline{2}}(X-2+2) = X^{\underline{2}} + X^{\underline{1}} + X^{\underline{3}} + 2X^{\underline{2}} \\ &= X^{\underline{1}} + 3X^{\underline{2}} + X^{\underline{3}} \\ X^4 &= X^3X = X^{\underline{1}}(X-1+1) + 3X^{\underline{2}}(X-2+2) + X^{\underline{3}}(X-3+3) \\ &= X^{\underline{2}} + X^{\underline{1}} + 3X^{\underline{3}} + 6X^{\underline{2}} + X^{\underline{4}} + 3X^{\underline{3}} \\ &= X^{\underline{1}} + 7X^{\underline{2}} + 6X^{\underline{3}} + X^{\underline{4}} \end{aligned}$$

(c) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Par le théorème du transfert, $E(X^r)$ existe ssi la série $\sum k^r P(X=k)$ converge absolument ssi (les termes sont positifs) la série $\sum k^r P(X=k)$ converge.
Or $k^r P(X=k) = e^{-\theta}\dfrac{k^r\theta^k}{k!}$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{k^{r+2}\theta^k}{k!} = 0$. On a :
$$\begin{cases} k^r P(X=k) = o(\frac{1}{k^2}) \\ \frac{1}{k^2} \geqslant 0 \\ \text{la série de Riemann } \sum \frac{1}{k^2} \text{ converge} \end{cases}$$
Par théorème de négligeabilité pour les séries, la série $\sum k^r P(X=k)$ converge.
$\boxed{\text{La variable aléatoire } X \text{ admet des moments de tous ordres.}}$

6. (a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Par le théorème du transfert, $E((X^{\underline{r}})^m)$ existe ssi la série $\sum (k^{\underline{r}})^m P(X=k)$ converge absolument ssi (les termes sont positifs) la série $\sum (k^{\underline{r}})^m P(X=k)$ converge. Par 2.c., $k^{\underline{r}} \underset{k\to+\infty}{\sim} k^r$. On a donc
$$(k^{\underline{r}})^m P(X=k) \underset{k\to+\infty}{\sim} k^{rm} P(X=k)$$
Par la question précédente, $\sum\limits_k k^{rm}P(X=k)$ converge. On a $k^{rm}P(X=k) \geqslant 0$. Par critère d'équivalence, la série $\sum (k^{\underline{r}})^m P(X=k)$ converge.
$\boxed{\text{Pour tout entier } r \geqslant 1, \text{ la variable aléatoire } X^{\underline{r}} \text{ admet des moments de tous ordres.}}$

(b) Par le théorème du transfert,

$$\begin{aligned} E(X^{\underline{r}}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-r+1)\theta^k e^{-\theta}}{k!} = \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{e^{-\theta}\theta^k}{(k-r)!} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e^{-\theta}\theta^{j+r}}{j!} = e^{-\theta}\theta^r \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\theta^j}{j!} = e^{-\theta}\theta^r e^{\theta} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour tout entier } r \geqslant 1,\ E(X^{\underline{r}}) = \theta^r.}$

(c) Par 5.b. et linéarité de l'espérance,

$$E(X^3) = E(X^{\underline{1}}) + 2E(X^{\underline{2}}) + E(X^{\underline{3}}) = \theta + 2\theta^2 + \theta^3$$

$$E(X^4) = E(X^{\underline{1}}) + 5E(X^{\underline{2}}) + 5E(X^{\underline{3}}) + E(X^{\underline{4}}) = \theta + 5\theta^2 + 5\theta^3 + \theta^4$$

7. Pour tout entier naturel k et pour tout réel $\theta > 0$, on pose

$$f(\theta, k) = \frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta} \quad \text{et} \quad g(\theta, k) = \ln(f(\theta, k)).$$

(a)

$$\begin{aligned} \partial_1(g)(\theta, k) &= \partial_1(f)(\theta, k) \times \frac{1}{f(\theta, k)} = \frac{(k\theta^{k-1}e^{-\theta} - \theta^k e^{-\theta})}{k!} \times \frac{k!}{e^{-\theta}\theta^k} \\ &\quad \text{(valable même si } k = 0) \\ &= \frac{k-\theta}{\theta} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour tout entier } k \geqslant 0,\ \partial_1(g)(\theta, X) = \tfrac{X}{\theta} - 1.}$

(b)

$$\begin{aligned} X^{\underline{r+1}} + rX^{\underline{r}} &= X(X-1)\dots(X-(r+1)+1) + rX(X-1)\dots(X-r+1) \\ &= X(X-1)\dots(X-r+1)[X-r+r] = X(X-1)\dots(X-r+1)X \\ &= XX^{\underline{r}} \end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance,

$$E(XX^{\underline{r}}) = E(X^{\underline{r+1}}) + rE(X^{\underline{r}}) \underset{6.b.}{=} \theta^{r+1} + r\theta^r$$

et par la formule de Huygens pour la covariance :

$$\mathrm{Cov}(X, X^{\underline{r}}) = E(XX^{\underline{r}}) - E(X)E(X^{\underline{r}}) = \theta^{r+1} + r\theta^r - \theta\,\theta^r = r\theta^r$$

$\boxed{\mathrm{Cov}(X, X^{\underline{r}}) = r\theta^r}$

(c) Par bilinéarité de la covariance,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\partial_1(g)(\theta, X), X^{\underline{r}}) &= \mathrm{Cov}(\frac{X}{\theta} - 1, X^{\underline{r}}) = \frac{1}{\theta}\mathrm{Cov}(X, X^{\underline{r}}) - \mathrm{Cov}(1, X^{\underline{r}}) \\ &= r\theta^{r-1} - (E(X^{\underline{r}}) - E(1)E(X^{\underline{r}})) = r\theta^{r-1} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathrm{Cov}(\partial_1(g)(\theta, X), X^{\underline{r}}) = r\theta^{r-1}}$

Par inégalité de cours pour la covariance :

$$|\mathrm{Cov}(\partial_1(g)(\theta, X), X^{\underline{r}})| \leqslant \sqrt{V(\partial_1(g)(\theta, X))}\sqrt{V(X^{\underline{r}})}$$

On élève au carré :

$$|r\theta^{r-1}|^2 \leqslant V(\frac{X}{\theta} - 1)V(X^{\underline{r}}) \quad \text{puis} \quad r^2\theta^{2r-2} \leqslant \frac{1}{\theta^2}V(X)V(X^{\underline{r}})$$

Enfin, $V(X) = \theta$, donc

$$\boxed{\forall \theta > 0, \forall r \in \mathbb{N}^*,\ V(X^{\underline{r}}) \geqslant r^2\theta^{2r-1}}$$

Partie 3. Estimation ponctuelle de fonctions du paramètre θ.

8. (a) $F(\theta,k_1,k_2,\dots,k_n)=\prod_{i=1}^{n}(\frac{e^{-\theta}\theta^{k_i}}{k_i!})=e^{-n\theta}\dfrac{\theta^{k_1+k_2+\cdots+k_n}}{k_1!k_2!\dots k_n!}$

   Les fonctions $\theta\mapsto e^{-n\theta}$ et $\theta\mapsto\theta^{k_1+\cdots+k_n}$ (monôme) sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   La fonction $\theta\mapsto F(\theta,k_1,\dots,k_n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}\partial_1(F)(\theta,k_1,\dots,k_n)&=\frac{-ne^{-n\theta}\theta^{k_1+k_2+\cdots+k_n}}{k_1!k_2!\dots k_n!}+\frac{e^{-n\theta}(k_1+k_2+\cdots+k_n)\theta^{k_1+\cdots+k_n-1}}{k_1!k_2!\dots k_n!}\\&=\frac{e^{-n\theta}\theta^{k_1+k_2+\cdots+k_n-1}}{k_1!k_2!\dots k_n!}(k_1+k_2+\cdots+k_n-n\theta)\end{aligned}$$

   La fonction $\theta\mapsto F(\theta,k_1,\dots,k_n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $]0,+\infty[$, où ln est dérivable. Donc la composée $\theta\mapsto G(\theta,k_1,\dots,k_n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\partial_1(G)(\theta,k_1,\dots,k_n)=\frac{\partial_1(F)(\theta,k_1,\dots,k_n)}{F(\theta,k_1,\dots,k_n)}=\frac{k_1+k_2+\cdots+k_n}{\theta}-n$$

   (b) Pour tout $\theta>0$, on pose $Z_\theta=\partial_1(G)(\theta,X_1,\dots,X_n)$. Par la question précédente,

$$Z_\theta=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\theta}-n=\frac{X_1-\theta+X_2-\theta+\cdots+X_n-\theta}{\theta}$$

   Comme Z_θ est combinaison linéaire de variables aléatoires qui admettent une epsérance et une variance, Z_θ admet une espérance et une variance. Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}E(Z_\theta)&=E(\frac{X_1-\theta}{\theta})+E(\frac{X_2-\theta}{\theta})+\cdots+E(\frac{X_n-\theta}{\theta})\\&=\frac{1}{\theta}(E(X_1)-\theta)+\frac{1}{\theta}(E(X_2)-\theta)+\cdots+\frac{1}{\theta}(E(X_n)-\theta)\\&=0+0+\cdots+0=0\end{aligned}$$

   $X_1,X_2,\dots,X_n$ sont indépendantes, donc par le lemme des coalitions, $\frac{X_1-\theta}{\theta},\frac{X_2-\theta}{\theta},\dots,\frac{X_n-\theta}{\theta}$ sont indépendantes. Et $V(\frac{X_i-\theta}{\theta})=\frac{1}{\theta^2}V(X_i)=\frac{1}{\theta}$.

$$V(Z_\theta)=\sum_{i=1}^{n}V(\frac{X_i-\theta}{\theta})=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}=\frac{n}{\theta}$$

   $\boxed{\text{La variable } Z_\theta \text{ est centrée et admet une variance } I(\theta)=\frac{n}{\theta}>0.}$

9. Dans cette question, on suppose que T est un estimateur régulier de $\varphi(\theta)$.

   (a) T est un estimateur de $\varphi(\theta)$ et par $(\mathcal{R}_1)$, $E(T)=\varphi(\theta)$.
   $\boxed{\text{La variable aléatoire } T \text{ est un estimateur sans biais de } \varphi(\theta).}$

   (b) Supposons qu'on a $(\mathcal{R}_1)$. Par le théorème du transfert,

$$\varphi(\theta)=\sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n}t(k_1,\dots,k_n)F(\theta,k_1,\dots,k_n)$$

   Mais la somme n'est pas finie, et on ne peut pas appliquer la linéarité de la dérivation sur une somme finie pour dire que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées. Ainsi on n'a pas nécessairement $(\mathcal{R}_3)$.

10. Soit T un estimateur régulier du paramètre $\varphi(\theta)$.

(a) Soit $\theta > 0$. Par $(\mathcal{R}_3)$ et le théorème du transfert,

$$\begin{array}{rcl}\varphi'(\theta) & = & E\left(t(X_1,\dots,X_n)\partial_1(F)(\theta,X_1,\dots,X_n)\right) \underset{(\mathcal{R}_1)\text{ et 8.a.}}{=} E\left(T\times\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\theta}-n\right)\right)\\ & = & E(T\times Z_\theta) = E(TZ_\theta) - E(T)\underbrace{E(Z_\theta)}_{=0} = \mathrm{Cov}(T,Z_\theta)\end{array}$$

$\boxed{\forall\theta>0,\ \varphi'(\theta) = E(T\times Z_\theta) = \mathrm{Cov}(T,Z_\theta)}$

(b) Par inégalité de cours sur les covariances :

$$|\mathrm{Cov}(T,Z_\theta)| \leqslant \sqrt{V(T)}\sqrt{V(Z_\theta)} \quad \text{puis} \quad |\varphi'(\theta)| \leqslant \sqrt{V(T)}\sqrt{I(\theta)}$$

On élève au carré et on divise par $I(\theta) > 0$.

$\boxed{\forall\theta>0,\ V(T) \geqslant \frac{(\varphi'(\theta))^2}{I(\theta)}}$

11. On cherche à simuler un échantillon de N réalisations de Z_θ pour différents couples (n,θ).

(a) Dans notre esprit, $X \in \mathcal{M}_{n,N}(\mathbb{R})$ est constituée de N colonnes, $\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{pmatrix}$ servant à simuler N fois Z_θ. Il nous faut donc sommer suivant chacune des ces colonnes, et obtenir en marge *ligne* les différentes sommes. Il faut donc compléter `sum` par `sum(X,'r')`.

(b) Pour $(n,\theta) = (10,4)$, $I(\theta) = \frac{10}{4} = 2,5$. Pour $(n,\theta) = (20,4)$, $I(\theta) = 5$. Pour (n,θ) égal à $(40,4)$ comme $(50,5)$, $I(\theta) = 10$.

- La figure C correspond à la variance la plus faible, soit à $(n,\theta) = (10,4)$.
- La figure B, de variance intermédiaire, correspond à $(n,\theta) = (20,4)$.
- Les figures A et D ont même variance. Les figures A et D correspondent aux couples $(50,5)$ et $(40,4)$ sans que l'on puisse se prononcer davantage.

12. Soit un entier $r \geqslant 1$. On suppose ici que $\varphi(\theta) = \theta^r$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n \quad \text{et} \quad M_{r,n} = \frac{S_n(S_n-1)\times\ldots\times(S_n-r+1)}{n^r}.$$

(a) Par propriété de stabilité de la somme de lois de Poisson indépendantes, S_n suit la loi de Poisson de paramètre $n\theta$. Son espérance et sa variance valent $n\theta$.

(b) • Par 6.b. avec le paramètre $n\theta$ au lieu de θ pour la loi de Poisson, on a :

$$E(M_{r,n}) = \frac{1}{n^r}E(S_n(S_n-1)\ldots(S_n-r+1)) = \frac{(n\theta)^r}{n^r} = \theta^r = \varphi(\theta)$$

$(\mathcal{R}_1)$ est satisfaite.

• Par 6.b. avec le paramètre $n\theta$ au lieu de θ pour la loi de Poisson, $M_{r,n}$ admet des moments de tous les ordres. $V(M_{r,n})$ existe et $(\mathcal{R}_2)$ est satisfaite.

• On admet comme indiqué que la série est absolument convergente. Ici

$$t(k_1,\dots,k_n) = \frac{(k_1+\cdots+k_n)(k_1+\cdots+k_n-1)\ldots(k_1+\cdots+k_n-r+1}{n^r}$$

et par 8.a.

$$\begin{array}{rcl}\partial_1(F)(\theta,k_1,\dots,k_n) & = & \dfrac{e^{-n\theta}\theta^{k_1+k_2+\cdots+k_n-1}}{k_1!k_2!\ldots k_n!}(k_1+k_2+\cdots+k_n-n\theta)\\ & = & \left(\dfrac{k_1+\cdots+k_n-n\theta}{\theta}\right)P([X_1=k_1]\cap[X_2=k_2]\cap\cdots\cap[X_n=k_n])\end{array}$$

Par le théorème du transfert,

$$\begin{aligned}
& \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} t(k_1,\dots,k_n)\partial_1(F)(\theta,k_1,\dots,k_n) \\
= \; & E\left(\frac{(S_n-n\theta)(S_n)^{\underline{r}}}{\theta n^r}\right) = \frac{1}{\theta n^r}E\left((S_n-n\theta)(S_n)^{\underline{r}}\right) \\
= \; & \frac{1}{\theta n^r}\left(E\left(S_n\times(S_n)^{\underline{r}}\right)-n\theta E\left((S_n)^{\underline{r}}\right)\right) \\
& \text{et par des calculs d'espérance vus en 6.b., 7.b. avec le paramètre } n\theta \text{ à la place de } \theta : \\
= \; & \frac{1}{\theta n^r}\Big((n\theta)^{r+1}+r(n\theta)^r-n\theta(n\theta)^r\Big) = r\theta^{r-1} = \varphi'(\theta)
\end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{R}_3)$ est satisfaite.

Remarque : $M_{r,n}$ est bien un estimateur de θ^r car c'est une variable aléatoire de la forme $t(X_1,\dots,X_n)$ avec $X_1,\dots,X_n$ indépendantes et de même loi dépendant de θ et t fonction indépendante de θ.

$M_{r,n}$ est un estimateur régulier de θ^r.

Par 10.b.,

$$V(M_{r,n}) \geqslant \frac{(r\theta^{r-1})^2}{I(\theta)} \quad \text{soit encore} \quad V(M_{r,n}) \geqslant \frac{r^2\theta^{2r-1}}{n}$$

(c) Dans cette question, on suppose que $r=2$.
Par $(\mathcal{R}_1)$, $M_{2,n}$ est un estimateur sans biais de θ^2.

$$\begin{aligned}
V(M_{2,n}) \; &= \; E(M_{2,n}^2)-\theta^4 = E\left(\frac{S_n^2(S_n-1)^2}{n^4}\right)-\theta^4 \\
& \quad \text{en développant et par linéarité de l'espérance :} \\
&= \; \frac{1}{n^4}\Big(E(S_n^4)-2E(S_n^3)+E(S_n^2)\Big)-\theta^4 \\
& \quad \text{on utilise 6.c. avec } n\theta \text{ comme paramètre de la loi de Poisson} \\
&= \; -\theta^4+\frac{1}{n^4}\Big((n\theta^4+6(n\theta)^3+7(n\theta)^2+n\theta-2n\theta-(6n\theta)^2-2(n\theta^3 \\
& \quad +n\theta+(n\theta)^2\Big) \\
&= \; \frac{4}{n}\theta^3+\frac{2}{n^2}\theta^2
\end{aligned}$$

On a $r(M_{2,n}) = V(M_{2,n})+0^2 = V(M_{2,n})$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r(M_{2,n}) = 0$ et donc $M_{2,n} \xrightarrow{P} \theta^2$.

La suite d'estimateurs $(M_{2,n})_{n\geqslant 1}$ est une suite d'estimateurs de θ^2 convergente.

(d) Par les parties 1 et 2, pour X de loi de Poisson de paramètre λ, on a

$$E(X^r) = \sum_{k=0}^{r}\sigma(r,k)E(X^{\underline{k}}) = \sum_{k=0}^{r}\sigma(r,k)\lambda^k$$

Ici, S_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\theta$, donc

$$\begin{aligned}
E(S_n^k) \quad &= \quad \sum_{j=0}^{k}\sigma(k,j)(n\theta)^j \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \quad \sigma(k,k)(n\theta)^k \underset{n\to+\infty}{\sim} \theta^k n^k \text{ car } \sigma(k,k)=1
\end{aligned}$$

Un équivalent de $E(S_n^k)$ lorsque n tend vers $+\infty$ est $\theta^k n^k$.

$$\begin{array}{rcl} V(M_{r,n}) & = & E\left(\left(\dfrac{S_n(S_n-1)\dots(S_n-r+1)}{n^r}\right)^2\right) - (\theta^r)^2 \\ (S_n)^{\underline{r}} & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{r} s(r,k)S_n^k \\ [(S_n)^{\underline{r}}]^2 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{r} s(r,k)s(r,j)S_n^{k+j} \end{array}$$

donc par linéarité de l'espérance,

$$\begin{array}{rcl} V(M_{r,n}) & = & \dfrac{1}{n^{2r}}\displaystyle\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{r} s(r,k)s(r,j)E(S_n^{k+j}) - \theta^{2r} \\ & = & \dfrac{1}{n^{2r}}E(S_n^{2r}) + \displaystyle\sum_{(k,j)\in[\![0,r]\!]^2,(k,j)\neq(r,r)} s(r,k)s(r,j)\dfrac{E(S_n^{k+j})}{n^{2r}} - \theta^{2r} \\ & & \text{car } s(r,r)=1 \end{array}$$

- Pour $(k,j) \in [\![0,r]\!]^2 - \{(r,r)\}$, $E(S_n^{k+j}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \theta^{k+j}n^{k+j}$ et

comme $k+j < 2r$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{E(S_n^{k+j})}{n^{2r}} = 0$. La somme finie en jeu tend donc vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

- De même, $E(S_n^{2r}) \sim \theta^{2r}n^{2r}$, donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{2r}}E(S_n^{2r}) - \theta^{2r} = 0$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} V(M_{r,n}) = 0$. Comme $M_{r,n}$ est sans biais, $r(M_{r,n}) = V(M_{r,n})$, et donc $\lim_{n\to+\infty} r(M_{r,n}) = 0$.

$\boxed{\text{Pour un entier } r \geqslant 1 \text{ quelconque, la suite } (M_{r,n})_{n\geqslant 1} \text{ d'estimateurs de } \theta^r \text{ est convergente.}}$

Partie 4. Le cas $\varphi(\theta) = \theta$.

13. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

(a) - Par le cours, $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de $E(X_1) = \theta$. $(\mathcal{R}_1)$ est satisfaite.

- $\overline{X_n}$ admet une variance en tant que combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une variance. $(\mathcal{R}_2)$ est satisfaite.

Calculons $V(\overline{X_n})$ qui nous servira plus loin. Par variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes, puis par formule $V(aX) = a^2X(X)$, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} V(X_1+X_2+\dots+X_n) & = & V(X_1)+\dots+V(X_n) = n\theta \\ V(\overline{X_n}) & = & \dfrac{1}{n^2}\left(V(X_1)+V(X_2)+\dots+V(X_n)\right) = \dfrac{\theta}{n} \end{array}$$

- Comme $V(\overline{X_n})$ existe, $\overline{X_n}$ admet un moment d'ordre 2 et $\frac{n}{\theta}\overline{X_n}(\overline{X_n}-\theta)$ admet une espérance. Donc par le théorème du transfert, la série de terme général suivant converge absolument :

$$\left(\frac{n}{\theta}\times\frac{(k_1+k_2+\dots+k_n)}{n}\times\frac{(k_1+\dots+k_n-n\theta)}{n}\right)P([X_1=k_1]\cap[X_2=k_2]\cap\dots\cap[X_n=k_n]) \underset{8.a.}{=}$$

$$\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)}{n}\partial_1(F)(\theta,k_1,\ldots,k_n)$$

Ce qui est justement la série en jeu dans $(\mathcal{R}_3)$. Toujours par le théorème du transfert, la série en jeu dans $(\mathcal{R}_3)$ vaut $E(\frac{n}{\theta}\overline{X_n}(\overline{X_n}-\theta))$.

$$\begin{aligned} E(\frac{n}{\theta}\overline{X_n}(\overline{X_n}-\theta)) &= E(\frac{n}{\theta}(\overline{X_n}-\theta+\theta)(\overline{X_n}-\theta)) \\ &= \frac{n}{\theta}\left(E((\overline{X_n}-\theta)^2+\theta(E(\overline{X_n})-\theta)\right) \\ &= \frac{n}{\theta}V(\overline{X_n}) = 1 = \varphi'(\theta) \end{aligned}$$

$(\mathcal{R}_3)$ est satisfaite.

$\boxed{\overline{X_n} \text{ est un estimateur régulier du paramètre } \theta.}$

(b) L'inégalité du 10.b) est :

$$\underbrace{V(\overline{X_n})}_{=\theta/n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{I(\theta)}}_{=\theta/n}$$

$\boxed{\text{L'inégalité du 10.b. est une égalité.}}$

On dit qu'un estimateur régulier de θ est efficace lorsque sa variance est minimale parmi les estimateurs réguliers de θ. La question 13. nous apporte que $\overline{X_n}$ est efficace.

14. Soit Y un estimateur régulier de θ. Pour tout réel α, on pose

$$\psi(\alpha) = \overline{X_n} + \alpha(Y - \overline{X_n}).$$

(a) **Remarque.** Il ne me semble pas attendu de rédiger que $\psi(\alpha)$ est un estimateur de θ. Faisons-le tout de même. Il existe t_1 et t_2 fonctions indépendantes de θ telles que

$$\overline{X_n} = t_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) \text{ et } Y = t_2(X_1, \ldots, X_n)$$

En notant $t = t_1 + \alpha(t_2 - t_1)$, on a $\psi(\alpha) = t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ où t est une fonction indépendante de θ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon indépendant d'une loi dépendant de θ.

- Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} E(\psi(\alpha)) &= E(\overline{X_n}) + \alpha(E(Y) - E(\overline{X_n})) \\ &= \theta + \alpha(\theta - \theta) \quad \text{par } (\mathcal{R}_1) \text{ pour } Y \text{ estimateur régulier de } \theta \\ &= \theta \end{aligned}$$

$(\mathcal{R}_1)$ est satisfaite.

- $\psi(\alpha) = (1-\alpha)\overline{X_n} + \alpha Y$ est combinaison linéaire de variables aléatoires ($\overline{X_n}$ et Y) admettant une variance, donc admet une variance. $(\mathcal{R}_2)$ est satisfaite.

- Notons $Y = t(X_1, \ldots, X_n)$.

Lorsque deux séries convergent absolument, avec la comparaison $0 \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|$ et le théorème de comparaison, on peut montrer que la somme des séries convergent absolument. Ceci s'étend aux séries d'indice dans $\mathbb{N}^n$. Ici, grâce aux séries absolument convergentes par $(\mathcal{R}_3)$ pour $\overline{X_n}$ et par $\mathcal{R}_3$ pour Y, nous obtenons la convergence absolue de :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^n}\left((1-\alpha)\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)}{n} + \alpha t(k_1,\ldots,k_n)\right)\partial_1(F)(\theta,k_1,\ldots,k_n)$$

La somme de cette série vaut :

$$\begin{aligned}&(1-\alpha)\sum_{k\in\mathbb{N}^n}\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)}{n}\partial_1(F)(\theta,k_1,\ldots,k_n)+\alpha\sum_{k\in\mathbb{N}^n}t(k_1,\ldots,k_n)\partial_1(F)(\theta,k_1,\ldots,k_n)\\ =\ &(1-\alpha)\varphi'(\theta)+\alpha\varphi'(\theta) \text{ par } (\mathcal{R}_3) \text{ pour respectivement } \overline{X_n} \text{ et } Y\\ =\ &\varphi'(\theta)\end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{R}_3)$ est satisfaite.

$\boxed{\psi(\alpha) \text{ est un estimateur régulier de } \theta \text{ pour tout } \alpha\in\mathbb{R}.}$

(b) *Remarque : dans le sujet initial, il était noté « en déduire » ; je ne suis pas cette indication.* Par le 10.a., $\text{Cov}(T,Z_\theta)=\varphi'(\theta)=1$ pour tout estimateur de régulier de $\varphi(\theta)$, où $Z_\theta \underset{8.b.}{=} \frac{n}{\theta}(\overline{X_n}-\theta)$. Donc

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\frac{n}{\theta}(\overline{X_n}-\theta),Y) &= 1 \text{ et par bilinéarité de Cov}\\ \frac{n}{\theta}\text{Cov}(\overline{X_n},Y)-\text{Cov}(n,Y) &= 1\\ \frac{n}{\theta}\text{Cov}(\overline{X_n},Y)-(E(nY)-E(n)E(Y)) &= 1\\ \frac{n}{\theta}\text{Cov}(\overline{X_n},Y)-0 &= 1\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Cov}(\overline{X_n},Y)=\frac{\theta}{n}}$

(c) On a $V(Y-\overline{X_n})=V(Y)+V(\overline{X_n})-2\text{Cov}(\overline{X_n},Y)=V(Y)+V(\overline{X_n})-2\frac{\theta}{n}$.
On a $V(\overline{X_n})=\theta/n$.
$\boxed{V(Y-\overline{X_n})=V(Y)-V(\overline{X_n})}$

Si Y est un estimateur efficace de θ, alors pour tout estimateur régulier de θ, $V(Y)\leqslant V(Z)$. $V(Y)\leqslant V(\overline{X_n})$. Donc $0\leqslant V(Y-\overline{X_n})\leqslant 0$ par la question précédente, puis $V(Y-\overline{X_n})=0$, et donc $Y=\overline{X_n}$ presque-sûrement.
$\boxed{\text{Un estimateur efficace de } \theta \text{ est presque-sûrement unique.}}$

15. Pour tout entier $n\geqslant 2$, on pose

$$W_n=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X_n})^2.$$

(a) On a

$$\begin{aligned}W_n &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n\left(X_i^2-2\overline{X_n}X_i+(\overline{X_n})^2\right)\\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2-\frac{2\overline{X_n}}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i+\frac{n}{n-1}(\overline{X_n})^2\\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2-2\frac{n}{n-1}(\overline{X_n})^2+\frac{n}{n-1}(\overline{X_n})^2\\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2-\frac{n}{n-1}(\overline{X_n})^2\end{aligned}$$

$\boxed{W_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2-\frac{n}{n-1}\overline{X_n}^2}$

(b) En posant $t(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\frac{(x_1+\cdots+x_n)}{n})^2$, on a $W_n=t(X_1,\ldots,X_n)$ avec t une fonction indépendante de θ et $(X_1,\ldots,X_n)$ un n-échantillon d'une loi dépendant de θ. Donc W_n est un estimateur de θ. Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}
E(W_n) &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)\frac{n}{n-1}E(\overline{X_n}^2)\\
&\underset{5.a.}{=} \frac{n}{n-1}(\theta+\theta^2)-\frac{n}{n-1}\left(V(\overline{X_n})+(E(\overline{X_n}))^2\right)\\
&= \frac{n}{n-1}(\theta+\theta^2)-\frac{n}{n-1}\left(\frac{\theta}{n}+\theta^2\right)\\
&= \frac{n}{n-1}(\theta+\theta^2-\frac{\theta}{n}-\theta^2)=\frac{n}{n-1}(1-\frac{1}{n})\theta=\theta
\end{aligned}$$

W_n est un estimateur sans biais de θ.

(c) $W_n=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{n}{n-1}(\overline{X_n})^2$.

- Les X_i^2 admettent une variance car par 5.c., les X_i admettent des moments de tous ordres.

- $(\overline{X_n})^2=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}X_iX_j$. Or

$$E((X_iX_j)^2)=\begin{cases}E(X_i^4) & \text{si } i=j\\ E(X_i^2)E(X_j)^2) & \text{si } i\neq j \text{ par indépendance}\end{cases}$$

Donc $(\overline{X_n})^2$ est combinaison linéaire de variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2, donc une variance. Donc $(\overline{X_n})^2$ admet une variance.

Finalement, W_n est combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une variance.
W_n admet une variance.

(d) • $X_1,X_2,\ldots,X_n$ sont indépendantes et admettent une même espérance (θ) et une même variance. Par la loi faible des grands nombres, $\overline{X_n}$ converge en probabilité vers θ.

• Par composition par la fonction continue $x\mapsto x^2$, $(\overline{X_n})^2\xrightarrow{P}\theta^2$.
$X_1,X_2,\ldots,X_n$ sont indépendantes donc par le lemme des coalitions, $X_1^2,\ldots,X_n^2$ sont indépendantes. Les X_i^2 admettent une même espérance $(\theta+\theta^2)$ et une même variance. Par la loi faible des grands nombres, $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ converge en probabilité vers $\theta+\theta^2$.

$$W_n=\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\overline{X_n})^2\right)$$

$$\frac{n}{n-1}\to 1,\quad (\overline{X_n})^2\xrightarrow{P}\theta^2,\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}\theta+\theta^2$$

Par le résultat indiqué et qui sera démontré à la fin du sujet, W_n converge en probabilité vers $1(\theta+\theta^2-\theta^2)=\theta$.
Les suites d'estimateurs $(\overline{X_n})_{n\geqslant 1}$ et $(W_n)_{n\geqslant 2}$ convergent en probabilité vers θ.

16. On simule des échantillons de N réalisations des estimateurs $\overline{X_n}$, W_n et

$$W_n'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X_n})^2$$

avec $n = 50$.
On a donc $W'_n = \frac{n-1}{n} W_n$. Au cours du sujet, on a vu que :

$$\begin{array}{rcl} E(W_n) & = & E(\overline{X_n}) = \theta \\ E(W'_n) & = & \dfrac{n-1}{n} E(W_n) = \dfrac{49}{50}\theta \\ V(\overline{X_n}) & = & \dfrac{\theta}{n} \\ V(W'_n) & = & (\dfrac{n-1}{n})^2 V(W_n) \simeq V(W_n) \end{array}$$

W_n et W'_n correspondent donc aux figures qui ont sensiblement la même variance, à savoir E et F. Distinguer quelle figure, entre E et F, a la plus faible espérance est difficile. Je m'abstiens de trancher.
La figure G correspond à $\overline{X_n}$.

Résultat de convergence en probabilité du 15.d.

Cette question me semble trop difficile pour les étudiants de ECS.

Première étape

Montrons que si u_n est une suite de réels qui tend vers 0 et $T_n \xrightarrow{P} 0$, alors $u_n T_n \xrightarrow{P} 0$.

On part de ces hypothèses : u_n est une suite de réels qui tend vers 0 et $T_n \xrightarrow{P} 0$.
Soit $\varepsilon > 0$.
$P(|u_n T_n| > \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n = 0 \\ P(|T_n| > \frac{\varepsilon}{|u_n|}) & \text{si } u_n \neq 0 \end{cases}$. Comme $u_n \to 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| < \varepsilon$.
Pour $n \geqslant n_0$, si $u_n \neq 0$, on a $\frac{\varepsilon}{|u_n|} > 1$, et $\left[|T_n| > \frac{\varepsilon}{|u_n|}\right] \subset [|T_n| > 1]$.
Pour $n \geqslant n_0$, on a

$$0 \leqslant P(|u_n T_n| > \varepsilon) \leqslant P(|T_n| > 1)$$

Comme $T_n \xrightarrow{P} 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|T_n| > 1) = 0$, et par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|u_n T_n| > \varepsilon) = 0$, ce qui démontre le résultat annoncé pour cette première étape.

Deuxième étape

Montrons que si (w_n) est une suite de réels qui tend vers ℓ et $R_n \xrightarrow{P} r$, alors $w_n R_n \xrightarrow{P} \ell r$.

On part de ces hypothèses : (w_n) est une suite de réels qui tend vers ℓ et $R_n \xrightarrow{P} r$. On écrit astucieusement :

$$w_n R_n - \ell r = (w_n - \ell)(R_n - r) + \ell(R_n - r) + (w_n - \ell) r$$

Par la première étape, $(w_n - \ell)(R_n - r) \xrightarrow{P} 0$.
Par composition par la fonction continue $x \mapsto \ell x$ dans la convergence $R_n \xrightarrow{P} r$, $\ell R_n \xrightarrow{P} \ell r$, soit $\ell(R_n - r) \xrightarrow{P} 0$.
Enfin, soit $\varepsilon > 0$. $\lim\limits_{n_t o + \infty} (w_n - \ell) r = 0$. Pour n suffisamment grand, $|(w_n - \ell) r| < \varepsilon$, et $P(|(w_n - \ell) r| > \varepsilon) = 0$.
Donc $(w_n - \ell) r \xrightarrow{P} 0$.
Par le résultat préliminaire, la somme des ces variables aléatoires converge en probabilité vers 0 : $w_n R_n - \ell r \xrightarrow{P} 0$, soit $w_n R_n \xrightarrow{P} \ell r$.

Démonstration finale

On suppose ici que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $a \in \mathbb{R}$ et que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de variables aléatoires qui convergent en probabilité vers les réels y et z respectivement. On montre que la suite de variables aléatoires $(a_n(Y_n - Z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers le réel $a(y-z)$.

Par composition par la fonction continue $x \mapsto -x$ dans la convergence $Z_n \xrightarrow{P} z$, on a $-Z_n \xrightarrow{P} -z$. Par le résultat préliminaire, on a $Y_n - Z_n \xrightarrow{P} y - z$. Par la deuxième étape, $a_n(Y_n - Z_n) \xrightarrow{P} a(y-z)$.
