DS9 (Maths I)

Correction du devoir surveillé (HEC ESSEC 2019)

Partie I - Un premier exemple.

1. Ses deux colonnes sont proportionnelles et non nulles donc $\boxed{\mathrm{rg}\,(A) = 1}$. De plus on a $\boxed{A^2 = A}$, donc $f^2 = f$ et $\boxed{f \text{ est un projecteur}}$ sur $F = E_1(f)$ parallèlement à $G = E_0(f)$. En particulier, on a $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) = F \oplus G$, et $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$, son spectre étant inclus dans $\{0, 1\}$.

   Comme $\mathrm{rg}(f) = 1$, on a :
$$\dim(E_1(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 1 \qquad \text{et} \qquad \dim(E_0(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2 - \mathrm{rg}(f) = 1.$$
   Donc $\mathrm{Sp}(f) = \{0, 1\}$. Reste à déterminer les sous-espaces propres. Pour cela, remarquons que :
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}.$$
   Ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de f pour la valeur propre 0. Comme de plus $\dim(E_0(f)) = 1$, on a $\boxed{E_0(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$. De même, on a $\boxed{E_1(f) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}\right)}$.

2. On a :
$$\boxed{M = {}^t\!A\ A = \frac{1+a^2}{(1-a)^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$
   $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$ car symétrique réelle.

   Montrons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(s_f)$.

   - Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$. On a $f\,(x) = 0$, d'où $f^* \circ f\,(x) = 0$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}\,(s_f)$, et on a l'inclusion $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(s_f)$.
   - On a $\mathrm{rg}(s_f) = \mathrm{rg}(M) = 1$, donc par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}\,(s_f)) = 1 = \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

   Ainsi on a $\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(s_f)}$.

   Comme $\mathrm{Ker}\,(s_f) = \mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, 0 est valeur propre de s_f et $\boxed{E_0(s_f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

   M étant diagonalisable, elle admet une autre valeur propre λ, et on a :
$$\lambda = 0 + \lambda = \mathrm{Tr}(M) = 2\frac{1+a^2}{(1-a)^2}.$$
   Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}(s_f) = \{0, \lambda\}}$, et comme s_f est symétrique, on a :
$$E_\lambda(s_f) = E_0(s_f)^\perp = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^\perp \boxed{= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).}$$

3. On a $M^2 = 2\dfrac{1+a^2}{(1-a)^2}M$, de sorte que M est la matrice d'un projecteur si et seulement si $2\dfrac{1+a^2}{(1-a)^2} = 1$, ce qui équivaut à $2 + 2a^2 = 1 - 2a + a^2$, soit encore à $\boxed{a = -1}$.

Partie II - Généralités.

4. (a) Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $[{}^tA\ B]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{k,j}$, d'où

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,({}^tA\ B) = \sum_{i=1}^{n} \left[{}^tA\ B\right]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{k,i}}$$

(b) Montrons que l'application $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) \in \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

- *Linéarité à gauche.* Pour tout $A_1, A_2, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 | B) &= \mathrm{Tr}({}^t(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)B) \\ &= \mathrm{Tr}((\alpha_1\,{}^tA_1 + \alpha_2\,{}^tA_2)B) \quad \text{par lin. de la transposée} \\ &= \alpha_1 \mathrm{Tr}({}^tA_1 B) + \alpha_2 \mathrm{Tr}({}^tA_2 B) \quad \text{par lin. de la trace} \\ &= \alpha_1 (A_1|B) + \alpha_2 (A_2|B)\end{aligned}$$

  D'où la linéarité à gauche.
- *Symétrie.* Pour tout $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$(A|B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{i,j} a_{i,j} = (B|A).$$

  D'où la symétrie, et donc la bilinéarité de $(\cdot|\cdot)$.
- *Positivité.* Pour tout $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$(A|A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (a_{k,i})^2 \geq 0.$$

- *Défini positif.* Pour tout $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$(A|A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \underbrace{(a_{k,i})^2}_{\geq 0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{k,i} = 0 \text{ pour tout } k,i \in [\![1n]\!] \quad \Leftrightarrow \quad A = 0_{n,n}.$$

Ainsi $\boxed{(\cdot|\cdot) \text{ est un produit scalaire (le produit scalaire canonique) sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

(c) Pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\boxed{|(A|B)| \leq \|A\|_2 \times \|B\|_2.}$$

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathrm{Tr}(A^2) = ({}^tA|A) \leq |({}^tA|A)| \leq \|{}^tA\|_2 \|A\|_2.$$

Or on a :

$$\|{}^tA\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{j,i}^2 = \|A\|_2^2.$$

On obtient en substituant dans l'expression précédente :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A^2) \leq \|A\|_2^2 = \mathrm{Tr}({}^tAA).}$$

Étudions le cas d'égalité. Si $\mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}({}^tAA)$, alors on a $({}^tA|A) = |({}^tA|A)| = \|A\|_2^2$. C'est le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a deux cas possibles :

- soit $A = 0_n$, et dans ce cas A est bien symétrique.
- soit $A \neq 0_n$, et il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que ${}^tA = \lambda A$. On obtient alors en substituant :

$$\lambda(A|A) = \|A\|_2^2 \quad \underset{\|A\|_2 \neq 0}{\Rightarrow} \quad \lambda = 1.$$

  Ainsi ${}^tA = A$ et A est symétrique réelle.

Réciproquement si A est symétrique réelle, on a bien l'égalité. On a donc bien :

$$\boxed{\left(\mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}({}^tA\ A)\right) \quad \Leftrightarrow \quad (A \in S_n(\mathbb{R}))}$$

5. (a) Par formule de changement de bases, on a :

$$\boxed{A' = P^{-1}AP.}$$

(b) P est une matrice de passage entre la base canonique B_0 et la base B' qui sont toutes les deux des bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$. Donc $\boxed{P \text{ est orthogonale.}}$

(c) Notons $M = M_{B'}(f^*)$. On a par formule de changement de bases :

$$M = P^{-1}\ {}^tAP = {}^tP\ {}^tA\ {}^t({}^tP) = {}^t({}^tPAP) = {}^t(P^{-1}AP) = {}^tA'.$$

Ainsi $\boxed{{}^tA' \text{ est la matrice de } f^* \text{ dans la base } B'.}$

6. (a) On a pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$${}^tX\left({}^tA\ A\right)X = \left({}^tX\ {}^tA\right)AX = {}^t(AX)\ (AX)\boxed{= \|AX\|^2.}$$

(b) Procédons par double inclusion.

$\subset$ Soit $X \in \mathrm{Ker}(f)$, alors on a :

$$f(X) = AX = 0_{n,1} \quad \Rightarrow \quad {}^tAAX = 0_{n,1} \quad \Rightarrow \quad s_f(X) = 0_{n,1}.$$

On obtient $X \in \mathrm{Ker}(s_f)$ et l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(s_f)$.

$\supset$ Soit à présent $X \in \mathrm{Ker}(s_f)$, on a :

$${}^tAAX = 0_{n,1} \quad \Rightarrow \quad {}^tX\ {}^tAAX = 0_{1,1} \quad \Rightarrow \quad \|AX\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad AX = 0_{n,1} \quad \Rightarrow \quad f(X) = 0_{n,1}.$$

D'où l'inclusion réciproque $\mathrm{Ker}(s_f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Ainsi on a $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(s_f)}$

Par le théorème du rang, on a :

$$\mathrm{rg}(s_f) = n - \dim(\mathrm{Ker}(s_f)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(f))\boxed{= \mathrm{rg}(f).}$$

(c) La matrice de s_f dans la base canonique B_0 est ${}^tAA$. Comme ${}^tAA$ est symétrique et que B_0 est orthonormée pour le produit scalaire canonique, $\boxed{s_f \text{ est un endomorphisme symétrique.}}$

(d) Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de s_f associé à λ. On a :

$$s_f(X) = \lambda X \quad \Rightarrow \quad {}^tA\ AX = \lambda X \quad \Rightarrow \quad {}^tX\ {}^tA\ AX = \lambda\ {}^tX\ X \quad \Rightarrow \quad \|AX\|^2 = \lambda\|X\|^2.$$

Comme $X \neq 0_{n,1}$, on obtient $\lambda \geq 0$. Ainsi $\boxed{\text{les valeurs propres de } s_f \text{ sont positives ou nulles.}}$

Remarque. Dans l'énoncé, les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ étaient identifiés.

(e) s_f étant symétrique réelle, il diagonalise dans une base orthonormée de vecteurs propres. Le sous-espace propre associé à 0 est de dimension $n - r$ (par le théorème du rang). En réordonnant les vecteurs de la base pour placer ceux associés à la valeur propre 0 à la fin, on obtient donc une base orthonormée dans laquelle $\boxed{\text{la matrice de } s_f \text{ est } \begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}}$ avec D diagonale à termes diagonaux strictement positifs (qui sont les autres valeurs propres).

(f) Puisque $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(s_f)$, les $n - r$ derniers vecteurs de $\mathcal{C}$ forment une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et leurs images par f sont nulles. Donc la matrice de f dans la base C est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$$

où $A_1 \in M_r(\mathbb{R})$, $A_3 \in M_{n-r,r}(\mathbb{R})$. De plus on a :

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{C}}(s_f) &= {}^t\!M\ M \\ &= \begin{pmatrix} {}^t\!A_1 & {}^t\!A_3 \\ 0_{n-t,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^t\!A_1\ A_1 + {}^t\!A_3\ A_3 & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-t,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient $\boxed{{}^t\!A_1\ A_1 + {}^t\!A_3\ A_3 = D.}$

7. (a) Notons que f est l'endomorphisme canoniquement associé à $A = {}^t({}^t\!A)$, d'où par définition $f = (f^*)^*$. Ainsi on a $\tau_f = (f^*)^* \circ f = s_{f^*}$. D'où en appliquant ce qui a déjà été fait :

$$\operatorname{rg}(\tau_f) = \operatorname{rg}(s_{f^*}) = \operatorname{rg}(f^*) = \operatorname{rg}({}^tA) = \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(f) \boxed{= \operatorname{rg}(s_f).}$$

En appliquant le théorème du rang, on obtient également $\boxed{\dim(\operatorname{Ker}(s_f)) = \dim(\operatorname{Ker}(\tau_f)).}$

(b) Soit λ une valeur propre strictement positive de s_f et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. On a :

$$s_f(X) = {}^t\!A\ AX = \lambda X \quad \Rightarrow \quad A\,{}^t\!A\,(AX) = \lambda\,(AX)$$

Comme $X \neq 0$ et $\lambda \neq 0$, on a ${}^tAAX \neq 0_{n,1}$, et donc $AX \neq 0_{n,1}$. Ainsi $\tau_f(f(X)) = \lambda f(X)$, et $\boxed{f(X) \text{ est un vecteur propre de } \tau_f \text{ associé à } \lambda.}$

D'après ce qui précède, on a $f(E_\lambda(s_f)) \subset E_\lambda(\tau_f)$ et donc $\dim f(E_\lambda(s_f)) \leq \dim(E_\lambda(\tau_f))$. Or f restreinte à $E_\lambda(s_f)$ est injective : en effet, pour tout $X \in E_\lambda(s_f)$ tel que $f(X) = 0_{n,1}$, on a :

$$AX = 0 \quad \Rightarrow \quad {}^t\!A\ AX = 0_{n,1} \quad \Rightarrow \quad \lambda X = 0_{n,1}.$$

Comme $\lambda \neq 0$, on a bien $X = 0$.

f est donc bijective de $E_\lambda(s_f)$ dans $f(E_\lambda(s_f))$ et $\dim f(E_\lambda(s_f)) = \dim E_\lambda(s_f)$. On obtient finalement :

$$\boxed{\dim(E_\lambda(s_f)) \leq \dim(E_\lambda(\tau_f))}$$

(c) Comme $\tau_f = s_{f^*}$, τ_f est symétrique donc $\boxed{\text{diagonalisable sur une base orthonormée}}$ de vecteurs propres.

Pour $\lambda = 0$, on a établit que $\dim(\operatorname{Ker}(s_f)) = \dim(\operatorname{Ker}(\tau_f))$, de sorte que 0 est valeur propre de τ_f si et seulement si 0 est valeur propre de s_f.

Si λ valeur propre non nulle de s_f, alors on a par la question précédente que :

$$0 < \dim(E_\lambda(s_f)) \leq \dim(E_\lambda(\tau_f)) \qquad (1)$$

Et λ est valeur propre de τ_f.

Réciproquement, soit λ valeur propre non nulle de $\tau_f = s_{f^*}$. Par ce qui a été fait, $\lambda > 0$ et on a :

$$0 < \dim(E_\lambda(\tau_f)) = \dim(E_\lambda(s_{f^*})) \leq \dim(E_\lambda(\tau_{f^*})) = \dim(E_\lambda(s_f)) \qquad (2)$$

Ainsi λ est également valeur propre de s_f.

On a donc montré que $\boxed{\operatorname{Sp}(s_f) = \operatorname{Sp}(\tau_f)}$, et on a avec les inégalités (1) et (2) :

$$\boxed{\dim(E_\lambda(s_f)) = \dim(E_\lambda(\tau_f)).}$$

(d) Par la question 5.(e), on sait qu'il existe une matrice P orthogonale telle que :

$$P^{-1}({}^tAA)P = \begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

où D est une matrice diagonale contenant toutes les valeurs propres strictement positives de s_f. Puisque τ_f possède les mêmes valeurs propres que s_f et que ses sous-espaces propres sont de même dimension que ceux de s_f, il existe également une matrice de passage Q orthogonale telle que :

$$Q^{-1}(A\,{}^tA)Q = \begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$A\,{}^tA = Q\begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{r,r}\end{pmatrix}Q^{-1} = QP^{-1}({}^tAA)PQ^{-1}\boxed{=\Omega({}^tAA){}^t\Omega}$$

où $\Omega = QP^{-1}$ est orthogonale comme produit de matrices orthogonales.

8. (a) On a :

$$W = \{(x_1,...,x_n) \in V \;/\; x_1+...+x_n = 1\} = V \cap \mathscr{C}$$

où $\mathscr{C} = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1+\cdots+x_n = 1\}$.

La fonction $\psi : x \mapsto x_1+...+x_n$ est polynomiale donc continue. $\mathscr{C}$ étant définie à l'aide d'une égalité et d'une fonction continue, c'est un fermé de $\mathbb{R}^n$. $\boxed{W \text{ est donc fermée}}$ comme intersection des deux fermés V et $\mathscr{C}$.

Pour tout $x \in W$, on a :

$$0 \leq x_i \leq x_1+...+x_n = 1.$$

Ainsi $W \subset [0,1]^n$, et $\boxed{W \text{ est une partie bornée de } \mathbb{R}^n.}$

(b) φ est continue (car polynomiale) sur W fermé bornée. Par le cours, on sait alors que $\boxed{\varphi \text{ admet un maximum global noté } M \text{ sur } W.}$

(c) Si $(x_1,...,x_n) \in V\backslash U$, alors l'un au moins un des x_i est nul, de sorte que $\boxed{\varphi(x) = 0.}$

(d) Puisque 0 n'est pas le maximum de φ sur W (car par exemple $\varphi(1/n,\ldots,1/n) = \dfrac{1}{n^n} > 0$), le maximum M de φ sur W est atteint sur U.

Ainsi, M est le maximum de φ sur $W\cap U$ donc $\boxed{\text{sur } U \text{ sous la contrainte } W.}$

(e) On s'est donc ramené à la recherche d'un extrema pour φ sur un ouvert U, sous la contrainte $\mathscr{C}$.

La contrainte $\mathscr{C}$ est linéaire (car ψ l'est), et on a (ψ est $\mathscr{C}^1$ et $\nabla\psi$ est constant car ψ linéaire) :

$$\nabla\psi(x) = (1,\cdots,1).$$

φ est polynomiale donc $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U et :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \partial_i\varphi(x) = \prod_{k\neq i} x_k.$$

Pour obtenir les points critique sous la contrainte $\mathscr{C}$, on résout pour tout $x \in U$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1+\cdots+x_n = 1 \\ \nabla\varphi(x) = \lambda\nabla\psi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+\cdots+x_n = 1 \\ \displaystyle\prod_{i\neq 1} x_i = \lambda \\ \ldots \\ \displaystyle\prod_{i\neq n} x_i = \lambda \end{cases} \underset{\displaystyle\prod_{j=1}^n x_j,\ \lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1+\cdots+x_n = 1 \\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\prod_{j=1}^n x_j \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n} \\ \lambda = \dfrac{1}{n^{n-1}} \end{cases}$$

Ainsi φ admet un unique point critique $\left(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right)$ sur U sous la contrainte $\mathscr{C}$. Comme M est nécessairement atteint en un point crique de φ sur U sous la contrainte $\mathscr{C}$, on en déduit que $\boxed{M = \varphi\left(\dfrac{1}{n},\cdots,\dfrac{1}{n}\right) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^n}$, et est $\boxed{\text{atteint uniquement en } \left(\dfrac{1}{n},\cdots,\dfrac{1}{n}\right).}$

(f) Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^n \mu_i = \operatorname{Tr}(S)$, on a avec $x_i = \dfrac{\mu_i}{\operatorname{Tr}(S)} \geq 0$ que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\operatorname{Tr}(S)} = 1$. Ainsi $x = (x_1,\ldots,x_n)$ appartient à W.

Par la question précédente, on a :

$$\varphi(x) = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^n \mu_i}{(\operatorname{Tr}(S))^n} \leq \varphi(M) = \left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

soit encore $\boxed{\prod_{i=1}^{n} \mu_i \leq \left(\frac{\operatorname{Tr} S}{n}\right)^n}$

L'égalité est atteinte au seul point, donc si et seulement $\frac{\mu_i}{\operatorname{Tr}(S)} = \frac{1}{n}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Dans ce cas, S est diagonalisable (car symétrique) et possède une unique valeur propre. On sait alors que S est un multiple positif de l'identité. Réciproquement si $S = \lambda I_n$ avec $\lambda \geq 0$, l'égalité est bien vérifiée.

Ainsi $\boxed{\text{on a l'égalité si et seulement si } S \text{ est un multiple positif de } I_n.}$

(g) Notons donc $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ une liste étendue des valeurs propres de ${}^t\!A\,A$. On sait par 6.(d) que tous les λ_i sont positifs ou nuls.

Posons $S = {}^tAA + xI_n$. S est symétrique réelle, et on a en notant P comme dans la question 6.(e) (quitte à réordonner les vecteurs propres) :

$$P^{-1}SP = P^{-1}({}^tAA)P + xI_n = \operatorname{diag}(\lambda_1 + x, \dots, \lambda_n + x).$$

Ainsi la liste étendue des valeurs propres de S est $(\lambda_1 + x, \dots, \lambda_n + x)$ qui sont toutes positives si on suppose de plus $x \geq 0$. Par la question précédente, on a donc :

$$\boxed{\Delta(x) \leq \left(\frac{tr\,(xI_n + \ {}^t\!A\ A)}{n}\right)^n = \left(\frac{nx + \lambda_1 + ... + \lambda_n}{n}\right)^n}$$

Partie III - Étude de deux cas particuliers.

9. (a) Rappelons que la trace de la matrice d'un endomorphisme est invariante par changement de base. En effet, si A' est la matrice de f dans une base $\mathscr{B}'$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a en notant P la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathscr{B}'$:

$$A' = P^{-1}AP$$

et donc (en utilisant que la propriété $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$ de la trace) :

$$\operatorname{Tr}(A') = \operatorname{Tr}\left(P^{-1}AP\right) = \operatorname{Tr}\left((AP)P^{-1}\right) = \operatorname{Tr}(A).$$

Rappelons aussi que pour un projecteur f sur $F = E_1(f) = \operatorname{Im}(f)$ parallèlement à $G = E_0(f)$, on a :

$$E = E_1(f) \oplus E_0(f). \qquad (*)$$

On a $r = \operatorname{rg}(f) = \dim(E_1(f))$. Prenons $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $E_1(f)$, et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $E_0(f)$. Alors $\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E d'après $(*)$, et on a :

$$A' = M_{\mathscr{B}'}(f) = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r \text{ fois}}) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Tr}(A') = r.$$

Ainsi $\boxed{\text{la trace de toute matrice représentant l'endomorphisme } f \text{ est } r.}$

(b) Comme f est un projecteur $f^2 = f$ et $M_{\mathscr{C}}(f)^2 = M_{\mathscr{C}}(f)$. On obtient donc :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^2 & 0_{r,n-r} \\ A_3A_1 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Par identification, on a $\boxed{A_1^2 = A_1.}$

De plus, on a $\operatorname{Tr}(M_{\mathscr{C}}(f)) = \operatorname{Tr}(A_1)$, donc $\boxed{\operatorname{Tr}(A_1) = r.}$

Notons p l'endomorphisme de $\mathscr{M}_r(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A_1. p est un projecteur (puisque $A_1^2 = A_1$) de rang r (car $\operatorname{Tr}(A_1) = r$). Ainsi $\dim(E_1(p)) = \dim(\operatorname{Im}(p)) = r = \dim(\mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{R}))$, d'où $E_1(p) = \mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ de sorte que $p = Id$. On a donc $\boxed{A_1 = I_r.}$

(c) Toujours en utilisant les notations de la question 6., on a (d'après 6.(e)) :

$$D = {}^tA_1A_1 + {}^tA_3A_3 \overset{9.(b)}{=} I_r + {}^tA_3A_3$$

où $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ est la matrice diagonale des valeurs propres non nulles de ${}^tA\,A$. On obtient donc :

$$D - I_r = {}^tA_3A_3 \quad \text{diagonale.}$$

Or on a pour tout $i \in [\![1, r]\!]$:

$$\lambda_i - 1 = \left[\,{}^tA_3A_3\right]_{i,i} = \sum_{k=1}^{n-r} [{}^tA_3]_{i,k}[A_3]_{k,i} = \sum_{k=1}^{n-r} [A_3]_{k,i}[A_3]_{k,i} \geq 0.$$

Ainsi $\boxed{\text{les valeurs propres non nulles de } {}^tA\,A \text{ sont supérieures ou égales à 1.}}$

En reprenant les notations de la question 6.(e), la matrice ${}^tAA$ est semblable à $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et donc :

$$\operatorname{Tr}({}^tAA) = \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Tr}(D) = \underbrace{\lambda_1}_{\geq 1} + \cdots + \underbrace{\lambda_r}_{\geq 1} \boxed{\geq r.}$$

(d) Il y a ici une erreur d'énoncé, la question étant plutôt : quels sont les projecteurs pour lesquels $\operatorname{Tr}({}^tA\,A) = r$?

Puisque $r = \operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(A^2)$, l'égalité $\operatorname{Tr}({}^tA\,A) = r$ traduit le cas d'égalité dans l'inégalité de la question 4.(c). Elle a donc lieu si et seulement si A est symétrique, ce qui équivaut d'après le cours à f est un projecteur orthogonal.

Ainsi $\boxed{\text{les projecteur réalisant l'égalité } \operatorname{Tr}({}^tAA) = r \text{ sont les projecteurs orthogonaux.}}$

10. On suppose dans cette question que f est une symétrie, c'est-à-dire $f^2 = \mathrm{id}$.

> **Déjà vu ?**
> Les symétries vectorielles sont l'objet du **Complément 3. Symétries vectorielles.** que je vous invite à relire.

(a) Comme $f^2 = \mathrm{Id}$, on a $A^2 = I$ et donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = A$. En tant que produit de matrices inversibles, $\boxed{{}^tA \text{ est elle aussi inversible}}$ et on a :

$$({}^tAA)^{-1} = A^{-1}({}^tA)^{-1} = A^{-1}\,{}^t(A^{-1}) \boxed{= A\,{}^tA.}$$

(b) Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$. Puisque cette dernière matrice est inversible d'après 10.(a), on a nécessairement $\lambda \neq 0$. Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a donc :

$$({}^tAA)X = \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda}X = ({}^tAA)^{-1}X \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda}A\,{}^tAX.$$

De ces équivalences, on en déduit que $E_\lambda({}^tAA) = E_{\frac{1}{\lambda}}(A\,{}^tA)$ et que $\dfrac{1}{\lambda}$ est valeur propre de $A\,{}^tA$. Et comme d'après la question 7.(c), $\dim(E_{\frac{1}{\lambda}}({}^tAA)) = \dim(E_{\frac{1}{\lambda}}(A\,{}^tA))$, on peut donc conclure que $\boxed{\dfrac{1}{\lambda} \text{ est aussi valeur propre de } {}^tAA}$ et que :

$$\boxed{\dim(E_\lambda({}^tAA)) = \dim(E_{\frac{1}{\lambda}}({}^tAA)).}$$

(c) On a pour tout $x > 0$:

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{1}{x}(x-1)^2.$$

Ainsi $\boxed{x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ pour tout } x > 0 \text{ avec égalité si et seulement si } x = 2.}$

(d) Tout d'abord, les valeurs propres λ de ${}^tAA$ sont toutes positives d'après la question 6.(d), et non nulles car ${}^tAA$ est inversible.

D'après la question 10.(b), chaque valeur propre λ apparait autant de fois que la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$ dans la liste étendue $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ des valeurs propres de ${}^tA\,A$ (à savoir $\dim(E_\lambda({}^tAA))$ fois). On en déduit que :

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

On obtient donc :

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) = \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i}\right)}_{=1}\prod_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\lambda_i}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\right) \overset{10.(c)}{\geq} \prod_{i=1}^{n} 2 \boxed{= 2^n.}$$

(e) Dans le raisonnement précédent, l'égalité est réalisée si et seulement si $\lambda = 1$ est la seule valeur propre de ${}^tAA$ d'après la question 10.(c). Comme ${}^tAA$ est diagonalisable car symétrique réelle, ceci est donc équivalent à ${}^tAA = I_n$, ou encore à ${}^tA = A^{-1} \underset{A^2=I_n}{=} A$. On a donc $\boxed{\text{égalité si et seulement si } A \text{ est symétrique}}$ (soit encore$f$ endomorphisme symétrique).

Si on a l'égalité, alors f est symétrique et ses sous-espaces propres $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$ sont orthogonaux.

Réciproquement, supposons que $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$ sont orthogonaux. Comme $f^2 = Id$, on a $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$. Montrons que :

$$E = E_1(f) \overset{\perp}{\oplus} E_{-1}(f). \qquad (*)$$

On sait déjà que $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$ sont en somme directe car orthogonaux (ou car ce sont des sous-espaces propres (éventuellement réduits à $\{0_E\}$) associés à des valeurs propres distinctes). De plus on a pour tout $x \in E$:

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}(f+Id)(x)}_{\in E_1(f)} + \underbrace{\frac{1}{2}(Id-f)(x)}_{E_{-1}(f)} \in E_1(f) + E_{-1}(f)$$

car $(f+Id)\circ(Id-f) = Id - f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (on redémontre ici des résultats du **Complément 3. Symétries vectorielles.** qui sont hors programme en ECS). Ainsi on a :

$$E = E_1(f) + E_{-1}(f).$$

Et comme ces sous-espaces sont en somme directe et orthogonaux, on a bien établi $(*)$

Soient à présent $\mathscr{B}_1 = (f_1, \ldots, f_s)$ une base orthonormée de $E_1(f)$, $\mathscr{B}_2 = (f_{s+1}, \ldots, f_n)$ une base orthonormée de $E_2(f)$. La famille $\mathscr{B}$ obtenue en concaténant $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ est une base orthonormée de E d'après $(*)$, dans laquelle la matrice de f est :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{r,n-r} & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

La matrice $M_{\mathscr{B}}(f)$ de f dans une **base orthonormée** étant symétrique, on en déduit que f est symétrique.

Finalement $\boxed{\text{on a égalité si et seulement si } f \text{ est une symétrie orthogonale.}}$

Partie IV - Décomposition polaire.

11. Puisque A est inversible, ${}^tA\,A$ l'est aussi, et 0 n'est pas valeur propre de ${}^tA\,A$. Avec la question 6.(d), on obtient donc que $\boxed{\mathrm{Sp}(s_f) \subset \mathbb{R}_+^*}$.

s_f étant symétrique, il existe (par le théorème spectral) une base base orthonormée de vecteurs propres $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ et n réels strictement positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (une liste étendue des valeurs propres) tels que

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \quad s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i.}$$

Rappelons qu'un endomorphisme est défini de manière unique par l'image d'une base. Ainsi $\boxed{v \text{ est bien défini}}$ en posant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad v(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i}\varepsilon_i.$$

On a par définition :

$$M_{\mathscr{C}}(v) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

v est donc symétrique car sa matrice $M_{\mathscr{C}}(v)$ est symétrique dans $\mathscr{C}$ **base orthonormée**. De plus, ses valeurs propres $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$ sont positives ou nulles. Donc on a $\boxed{v \in S^+(\mathbb{R}^n).}$

Enfin, on a :

$$M_{\mathscr{C}}(v^2) = M_{\mathscr{C}}(v)^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = M_{\mathscr{C}}(s_f),$$

donc $\boxed{v^2 = s_f.}$

12. Soit μ une valeur propre de w, et $x \in E_\mu(w)$. On a :

$$s_f(x) = w^2(x) = w(w(x)) = w(\mu x) = \mu w(x) = \mu^2 x.$$

Donc $x \in E_{\mu^2}(s_f)$, et on a bien l'inclusion $\boxed{E_\mu(w) \subset E_{\mu^2}(s_f)}$. En particulier, on a $\{\mu^2,\ \mu \in \mathrm{Sp}(w)\} \subset \mathrm{Sp}(s_f)$.

Comme w et s_f sont symétriques, ce sont des endomorphismes diagonalisables. On en déduit :

$$n = \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(w)} \dim(E_\mu(w)) \underset{E_\mu(w) \subset E_{\mu^2}(s_f)}{\leq} \sum_{\mu^2 \in \mathrm{Sp}(s_f)} \dim(E_{\mu^2}(s_f)) \leq \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(s_f)} \dim(E_\lambda(s_f)) = n.$$

Ces inégalités sont donc des égalités, ce qui implique :

- pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}(w)$, $\dim(E_\mu(w) = \dim(E_{\mu^2}(s_f))$, et donc $\boxed{E_\mu(w) = E_{\mu^2}(s_f)}$ car on avait déjà une inclusion ;
- $\mathrm{Sp}(s_f) = \{\mu^2,\ \mu \in \mathrm{Sp}(w)\}$ à l'aide de la deuxième inégalité, ce qui se réécrit :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(w) = \{\sqrt{\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(s_f)\}}.$$

13. L'existence a été établie à la question 11. Pour l'unicité, nous venons de voir à la question 12. que si $w \in S^+(\mathbb{R}^n)$ satisfait $w^2 = s_f$, alors $\mathrm{Sp}(w) = \{\sqrt{\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(s_f)\}$ et w induit sur $E_\lambda(s_f)$ une homothétie de rapport $\sqrt{\lambda}$. Ainsi un tel endomorphisme est déterminé de manière unique sur :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(s_f)} E_\lambda(s_f).$$

D'où l'unicité d'un tel endomorphisme.

On a donc établi $\boxed{\text{l'existence et l'unicité de } v \in S^+(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } v^2 = s_f.}$

Enfin, si $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de s_f, alors les ε_i sont aussi vecteurs propres de v d'après la question 12. Et donc sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale.

14. On étudie l'existence et l'unicité d'une matrice $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $(M)^2 = {}^tA\,A$. Si on note v l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M, ceci équivaut à l'existence et l'unicité d'un endomorphisme $v \in \S^+(\mathbb{R}^n)$ tel que $v^2 = s_f$. Or d'après la question 13., on sait qu'un tel endomorphisme existe et est unique.

Ainsi $\boxed{\text{il existe une unique matrice } M \text{ appartenant à } S_n^+(\mathbb{R}) \text{ telle que } M^2 = {}^tA\,A}$

15. Notons $S = \sqrt{{}^t\!A\ A}$, qui est bien inversible d'après la question 12. On a :

$$\begin{aligned}(AS^{-1})\ {}^t(AS^{-1}) &= {}^t(S^{-1})\,{}^tAAS^{-1}\\ &= ({}^tS)^{-1}({}^tAA)S^{-1} = ({}^tS)^{-1}S^2S^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n\end{aligned}$$

Donc $\boxed{A\left(\sqrt{{}^t\!A\ A}\right)^{-1} \text{ est une matrice orthogonale.}}$

On souhaite montrer l'existence et l'unicité du couple $(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = \Omega \times S$. On procède par analyse synthèse.

Analyse. Supposons qu'un tel couple existe. Alors on a :

$${}^tAA = {}^t(\Omega S)(\Omega S) = {}^tS)\underbrace{{}^t\Omega\Omega}_{I_n}S = S^2.$$

Comme $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, on a $S = \sqrt{{}^t\!A\ A}$ d'après la question 14., S est inversible et $\Omega = AS^{-1}$.

Synthèse. Posons $S = \sqrt{{}^t\!A\ A}$ et $\Omega = AS^{-1}$. On vérifie que :

– $A = \Omega S$, ce qui est immédiat étant donné la définition de Ω ;
– $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, ce qui découle de la la définition de S à partir de la question 14. :
– Ω est orthogonale en reprenant les calculs au début de cette question.

On a donc montré que $\boxed{\text{il existe un unique couple } (\Omega, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R}) \text{ tel que } A = \Omega S.}$

Partie V - Application à la distance d'une matrice inversible à l'ensemble des matrices orthogonales.

16. L'ensemble $\{\|M - V\|_2\ /\ V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minoré par 0. Donc il admet une borne inférieur, et $\boxed{d(M) \text{ est bien définie.}}$

17. On a pour tout matrice $R \in O_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ que :

$$\|RN\|_2^2 = \mathrm{Tr}\,({}^t\!N\ {}^t\!R\ RN) = \mathrm{Tr}\,({}^t\!N\ N) = \|N\|_2^2 \text{ car } {}^t\!R\ R = I_n$$

et

$$\|NR\|_2^2 = \mathrm{Tr}\,({}^t\!R\ ({}^t\!N\ NR)) = \mathrm{Tr}\,({}^t\!N\ N\ {}^t\!R\ R) = \|N\|_2^2.$$

D'où l'égalité $\boxed{\|RN\|_2 = \|NR\|_2 = \|N\|_2.}$

$V \longmapsto VR^{-1}$ est une application de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car (vérifions le, même si cela a déjà été utilisé à la question 7.(d). sans démonstration...) :

$$\forall V, R \in O_n(\mathbb{R}), \quad {}^t\!\left(VR^{-1}\right)VR^{-1} = R\,{}^t\!V\ V\ {}^t\!R = I_n \quad \Rightarrow \quad VR^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

Et elle a pour réciproque $V \mapsto VR$ donc elle est $\boxed{\text{bijective de } \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ dans } \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).}$ On procède de même pour l'application $V \longmapsto R^{-1}V$.

Par suite, on a pour tout $R \in O_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}d(RM) &= \inf_{V\in O_n(\mathbb{R})}\|RM - V\|_2 = \inf_{V\in O_n(\mathbb{R})}\|R(M - R^{-1}V)\|_2\\ &= \inf_{V\in O_n(\mathbb{R})}\|M - R^{-1}V\|_2 = \inf_{W\in O_n(\mathbb{R})}\|M - W\|_2 \boxed{= d(M).}\end{aligned}$$

On montrerait de même que $d(MR) = d(M)$.

18. On a en utilisant la question 17. :

$$d(A) = d(\Omega P(DP^{-1})) \underset{\Omega\in O_n(\mathbb{R})}{=} d(P(DP^{-1})) \underset{P\in O_n(\mathbb{R})}{=} d(DP^{-1}) \underset{P^{-1}\in O_n(\mathbb{R})}{=} \boxed{d(D).}$$

19. (a) La matrice W étant symétrique réelle, elle est $\boxed{\text{diagonalisable.}}$

(b) En notant X la matrice colonne des coordonnées de x, on a :

$$\begin{aligned}\langle w(x), x\rangle &= \left({}^tX\ {}^tW\ X\right) = \frac{1}{2}\left(\left({}^tX\ {}^tV\ X\right) + \left({}^tX\ V\ X\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\langle v(x)\,|x\rangle + \langle x\,|v(x)\rangle\right)\\ &= \boxed{\langle v(x)\,|x\rangle}\end{aligned}$$

et :

$$\|v(x)\|^2 = {}^tX\ {}^tV\ VX = {}^tX\ X = \|x\|^2$$

Ainsi on a $\boxed{\|v(x)\| = \|x\|\,.}$ Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|\langle w(x)\,|x\rangle| = |\langle v(x)\,|x\rangle| \le \|v\,(x)\|\,\|x\| = \boxed{\|x\|^2.}$$

On en déduit (par linéarité à gauche du produit scalaire) :

$$\langle x - w(x)\,|x\rangle = \|x\|^2 - \langle w(x)\,|x\rangle \ge \|x\|^2 - |\langle w(x)\,|x\rangle|\ \boxed{\ge 0.}$$

(c) Soit λ une valeur propre de $I_n - W$, et donc de $Id - w$, et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé. On a avec la question précédente :

$$\lambda\,\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle (Id - w)(x), x\rangle = \langle x - w(x)\,|x\rangle \ge 0.$$

Et puisque $\|x\| > 0$, on obtient $\lambda \ge 0$. Donc $\boxed{\text{les valeurs propres de } I_n - W \text{ sont positives ou nulles.}}$

(d) Notons $W = [w_{ij}]$ la matrice de w dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique. On a donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$w_{ii} = \langle w\,(e_i)\,, e_i\rangle \quad \Rightarrow \quad 1 - w_{ii} = \langle e_i, e_i\rangle - \langle w\,(e_i)\,, e_i\rangle = \langle e_i - w\,(e_i)\,, e_i\rangle\ \boxed{\ge 0.}$$

(e) Supposons que $w_{ii} = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On a en particulier $\mathrm{Tr}(I_n - W) = 0$.

La matrice $I_n - W$ étant symétrique, elle est diagonalisable. D'après le cours, sa trace $\mathrm{Tr}(I_n - W)$ est la somme de ses valeurs propres étendues $\mu_1, \ldots, \mu_n$, qui sont toutes positives ou nulles d'après 19.(c) de sorte que :

$$0 = \mathrm{Tr}(I_n - W) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mu_i}_{\ge 0}\,.$$

Ainsi $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$, et on a $I_n - W = 0_n$ (car $I_n - W$ est diagonalisable et a 0 pour unique valeur propre), soit encore $I_n = W$. La réciproque est évidente.

Ainsi on a $\boxed{w_{ii} = 1 \text{ pour tout } i \in [\![1, n]\!] \text{ si, et seulement si } W = I_n.}$

20. (a) Soit toujours $V \in O_n(\mathbb{R})$. En utilisant l'identité remarquable $\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x - y, x + y\rangle$, valable pour tout vecteur x et y d'un espace euclidien, on obtient :

$$\begin{aligned}\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 &= (D - V + D - I_n \mid D - V - (D - I_n))\\ &= (2D - V - I_n \mid I - V_n)\\ &= 2\,(D \mid I_n - V) - (V + I_n \mid I - V_n)\\ &= 2\,(D \mid I_n - V) + \|V\|_2^2 - \|I\|_2^2\end{aligned}$$

Comme de plus V est orthogonale, on a $\|V\|_2^2 = \mathrm{Tr}\left({}^tV\ V\right) = \mathrm{Tr}\left(I_n\right) = \|I\|_2^2$, de sorte que :

$$\boxed{\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2\,(I_n - V\,|D).}$$

De plus, on a :

$$(W|D) = \frac{1}{2}\left[\left({}^tV|D\right) + (V|D)\right].$$

Or comme D est diagonale donc symétrique, on a :

$$\left({}^tV|D\right) = \mathrm{Tr}(VD) = \mathrm{Tr}(DV) = \mathrm{Tr}({}^tDV) = (D|V) = (V|D).$$

On obtient donc en substituant que $(W|D) = (V|D)$, et donc que :

$$\boxed{\|D-V\|_2^2 - \|D-I_n\|_2^2 = 2\,(I_n - W\,|D\,).}$$

(b) D'après la question 19.(d), on a $1 - w_{i,i} \geq 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. D'autre part, D est une matrice diagonale à éléments diagonaux $\nu_1, \ldots, \nu_n$ (qui est la liste étendue des valeurs propres de S) strictement positifs. Ainsi on a :

$$(I_n - W|D) = \mathrm{Tr}\left(\left({}^tI_n - W\right)D\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(1-w_{i,i})\nu_i}_{\geq 0} \geq 0.$$

En utilisant la question précédente, on obtient donc :

$$\boxed{\|D-V\|_2^2 - \|D-I_n\|_2^2 \geq 0.}$$

(c) D'après la question précédente, on a :

$$\forall V \in O_n(\mathbb{R}), \quad \|D-V\|_2 \geq \|D-I_n\|_2.$$

Comme de plus $I_n \in O_n(\mathbb{R})$, on a donc :

$$d(D) = \inf_{V \in O_n(\mathbb{R})} \|D-V\|_2 = \|D-I_n\|_2.$$

On peut alors conclure que :

$$d(A) \overset{18.}{=} d(D) = \|D-I_n\|_2 \overset{17.}{=} \|P(D-I_n)P^{-1}\|_2 = \|PDP^{-1} - I_n\|_2 = \|S-I_n\|_2 \boxed{= \|\sqrt{{}^tAA} - I_n\|_2.}$$

Enfin si $V \in O_n(\mathbb{R})$ vérifie $d(A) = \|D-V\|_2$, alors on a :

$$\|D-V\|_2 = \|D-I_n\|_2 \quad \overset{20.a}{\Rightarrow} \quad (I_n - W|D) = 0.$$

D'où en reprenant les notations introduites dans la question 20.(b) :

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(1-w_{i,i})}_{\geq 0} \underbrace{\nu_i}_{>0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall i \in [\![1,n]\!],\ w_{i,i} = 1.$$

Ce qui équivaut d'après la question 19.(e) à $W = I_n$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \|I_n - V\|_2^2 = \|I_n\|^2 - 2(I_n|V) + \|V\|^2 &\underset{V \in O_n(\mathbb{R})}{=} 2\|I_n\|^2 - (I_n|V) - (V|I_n) \\ &= 2\mathrm{Tr}(I_n) - \mathrm{Tr}(V) - \mathrm{Tr}({}^tV) = 2\mathrm{Tr}(I_n) - 2\mathrm{Tr}(W) = 0, \end{aligned}$$

et donc $\boxed{V = I_n}$.