DM17

Devoir Maison type Maths 3 facultatif

Problème (Edhec 2008)

Partie I : Quelques résultats utiles pour les parties suivantes

1. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Chaque lancer de la pièce correspond à une épreuve de Bernoulli avec pour succès « la prévision du joueur i est correcte pour ce lancer ». On réalise donc une succession de $2p+1$ épreuves de Bernoulli indépendantes (les différents lancers sont indépendants) et de probabilité de succès $\frac{1}{2}$ (la pièce est équilibrée). X_i représente le nombre de prévisions correctes donc le nombre de succès. Ainsi, $\boxed{X_i \text{ suit la loi binomiale de paramètres } 2p+1 \text{ et } \frac{1}{2}}$, c'est-à-dire $X_i(\Omega) = [\![0, 2p+1]\!]$ et pour tout $k \in X_i(\Omega)$:
$$P(X_i = k) = \binom{2p+1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2p+1-k} = \binom{2p+1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1}.$$

2. (a) D'après la formule du binôme de Newton, on a :
$$S_p + T_p = \sum_{k=0}^{2p+1}\binom{2p+1}{k}1^k 1^{2p+1-k} = (1+1)^{2p+1}\boxed{= 2^{2p+1}.}$$

   (b) On effectue le changement d'indice $k' = 2p+1-k$. On obtient :
$$S_p = \sum_{k'=p+1}^{2p+1}\binom{2p+1}{2p+1-k'} = \sum_{k'=p+1}^{2p+1}\binom{2p+1}{k'}\boxed{= T_p.}$$

   (c) Ainsi, $S_p + T_p = 2S_p = 2^{2p+1}$ donc on a $\boxed{S_p = \frac{1}{2}2^{2p+1} = 2^{2p}}$. On obtient par incompatibilité des évènements :
$$r_p = \sum_{k=0}^{p} P(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1} S_p\boxed{= \frac{1}{2}.}$$

Partie II : Les joueurs jouent au hasard et indépendamment les uns des autres.

1. On raisonne par double inclusion.

   $\subset$ Soit le joueur J_1 perd et alors son gain prend la valeur 0, soit il gagne et alors selon le nombre $j \in [\![0, n-1]\!]$ des autres gagnants, le partage équitable entre les $j+1$ gagnants des $n!$ euros donne un gain de $\frac{n!}{j+1}$ euros. Ainsi, on a :
$$G_1(\Omega) \subset \{0\} \cup \left\{\frac{n!}{j+1} \ / \ j \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$

   $\supset$ Il s'agit de montrer que toutes ces valeurs peuvent bien être prises par G_1, c'est-à-dire qu'il existe une réalisation de chacun ces évènements.

   On suppose que la pièce donne $2p+1$ *pile*, que le joueur J_1 n'avait prédit que des *face* et que tous les autres joueurs n'avaient prédit que des *pile*. Dans ce cas, J_1 perd et l'événement $[G_1 = 0]$ est réalisé.

   Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$. On suppose que la pièce donne $2p+1$ *pile*, que le joueur J_1 avait prédit un *pile* puis $2p$ *face*, que les joueurs $J_2, J_3, \dots, J_{j+1}$ avaient fait la même prédiction que J_1

et que les joueurs $J_{j+2}, J_{j+3}, \dots, J_n$ n'avaient prédit que des *face*. Dans ce cas, J_1 gagne ainsi que les joueurs $J_2, J_3, \dots, J_{j+1}$ et l'événement $\left[G_1 = \frac{n!}{j+1}\right]$ est réalisé.
Ainsi, on a :

$$G_1(\Omega) \supset \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1} \ / \ j \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Par suite, on a $\boxed{G_1(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1} \ / \ j \in [\![0, n-1]\!] \right\}.}$

2. (a) On suppose que l'événement $[X_1 = 0]$ est réalisé. Ainsi, le joueur 1 n'a aucune prévision correcte.
Son gain est alors de $\frac{n!}{n}$ euros si et seulement si les $n-1$ autres joueurs n'ont eux aussi aucune prévision correcte (les n joueurs se partageant alors équitablement les $n!$ euros).
Or, la probabilité qu'un joueur n'ait aucune prévision correcte est q_0 et les évènements $[X_i = 0]$ pour $i = 2, \dots, n$ sont mutuellement indépendantes pour la probabilité $P_{[X_1=0]}$ (les joueurs jouent de façon indépendante). Donc on a :

$$\boxed{P_{[X_1=0]}\left(G_1 = \frac{n!}{n}\right) = (q_0)^{n-1}.}$$

(b) Soit $j \in [\![0, n-2]\!]$. On suppose que l'événement $[X_1 = 0]$ est réalisé. Ainsi, le joueur 1 n'a aucune prévision correcte. Son gain est alors de $\frac{n!}{j+1}$ euros si et seulement s'il gagne ainsi que j autres joueurs exactement. Or, dans ce cas, les $n-j-1$ autres joueurs (avec $n-j-1 > 0$) perdent, donc font strictement moins de prévisions que J_1, ce qui est impossible. Ainsi, on a bien :

$$\boxed{P_{[X_1=0]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = 0.}$$

(c) On a par définition :

$$\begin{aligned} E(G_1|[X_1 = 0]) &= 0 \times P_{[X_1=0]}(G_1 = 0) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j+1} P_{[X_1=0]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{j+1} \underbrace{P_{(X_1=0)}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right)}_{=0 \text{ d'après 2.(b)}} + \frac{n!}{n} \underbrace{P_{(X_1=0)}\left(G_1 = \frac{n!}{n}\right)}_{=(q_0)^{n-1} \text{ d'après 2.(a)}} \\ &= (n-1)!(q_0)^{n-1}. \end{aligned}$$

3. (a) Soit $k \in [\![1, 2p+1]\!]$ et $j \in [\![0, n-1]\!]$. On suppose que l'événement $[X_1 = k]$ est réalisé. Ainsi, le joueur 1 a exactement k prévisions correctes. Son gain est alors de $\frac{n!}{j+1}$ euros si et seulement s'il gagne ainsi que j autres joueurs exactement, c'est-à-dire si et seulement si j autres joueurs font k prévisions correctes et les $n-j-1$ autres joueurs font strictement moins de k prévisions correctes.
Nous sommes amenés à calculer la probabilité que j joueurs parmi $n-1$ fassent k prévisions correctes et les $n-j-1$ autres joueurs fassent strictement moins de k prévisions correctes :
- la probabilité que j joueurs donnés fassent k prévisions correctes et les $n-j-1$ restants fassent strictement moins de k prévisions correctes est $(q_k)^j (r_{k-1})^{n-j-1}$ (car les joueurs jouent indépendamment les uns des autres).
- il y a $\binom{n-1}{j}$ façons de choisir les j joueurs faisant k prévisions correctes parmi les $n-1$ joueurs autres que le joueur 1 (les $n-j-1$ restants étant automatiquement désignés).

Ainsi on a :

$$\boxed{P_{[X_1=k]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = \binom{n-1}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-j-1}.}$$

(b) On a :

$$\frac{1}{j+1}\binom{n-1}{j} = \frac{1}{j+1}\frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} = \frac{(n-1)!}{(j+1)!(n-1-j)!} = \frac{1}{n}\times\frac{n!}{(j+1)!(n-j-1)!}\boxed{=\frac{1}{n}\binom{n}{j+1}.}$$

Ainsi, on a pour tout $k \in [\![1, 2p+1]\!]$:

$$\begin{aligned}
E\left(G_1|[X_1=k]\right) &= 0 \times P_{[X_1=k]}(G_1=0) + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{n!}{j+1}P_{[X_1=k]}\left(G_1=\frac{n!}{j+1}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{n!}{j+1}\binom{n-1}{j}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-1-j}\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{n!}{n}\binom{n}{j+1}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-1-j} \quad \text{par ce qui précède}\\
&= \frac{(n-1)!}{q_k}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j+1}(q_k)^{j+1}(r_{k-1})^{n-1-j}\\
&= \frac{(n-1)!}{q_k}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(q_k)^i(r_{k-1})^{n-i} \quad \text{en posant } i=j+1\\
&= \frac{(n-1)!}{q_k}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(q_k)^i(r_{k-1})^{n-i} - (q_k)^0(r_{k-1})^n\right)\\
&= \frac{(n-1)!}{q_k}\left((q_k+r_{k-1})^n - (r_{k-1})^n\right) \quad \text{par la formule du binôme de Newton}
\end{aligned}$$

On obtient donc $\boxed{E\left(G_1|[X_1=k]\right) = (n-1)!\frac{(r_k)^n-(r_{k-1})^n}{q_k}}$ puisque :

$$r_k = P(X_1 \leq k) = P(X_1=k) + P(X_1 \leq k-1) = q_k + r_{k-1}.$$

(c) En posant $r_{-1}=0$, comme $r_0=q_0$, on a :

$$(n-1)!\frac{(r_0)^n-(r_{-1})^n}{q_0} = (n-1)!\frac{(q_0)^n}{q_0} = (n-1)!(q_0)^{n-1} = E\left(G_1/X_1=0\right).$$

$\boxed{\text{La formule est donc encore valable pour } k=0.}$

4. $\left([X_1=k]\right)_{k\in[\![0,2p+1]\!]}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. La formule de l'espérance totale (qui s'applique puisque G_1 est une variable finie) donne alors :

$$\begin{aligned}
E(G_1) &= \sum_{k=0}^{2p+1} E\left(G_1/[X_1=k]\right)P(X_1=k) = \sum_{k=0}^{2p+1}(n-1)!\frac{(r_k)^n-(r_{k-1})^n}{q_k}q_k\\
&= (n-1)!\sum_{k=0}^{2p+1}\left((r_k)^n-(r_{k-1})^n\right) = (n-1)!\left((r_{2p+1})^n-(r_{-1})^n\right) \quad \text{par télescopage}\\
&= (n-1)!(1^n-0^n)\boxed{=(n-1)!.}
\end{aligned}$$

Remarque. On pouvait s'attendre à ce résultat : les joueurs jouent indépendamment les uns des autres avec la même stratégie. Leur espérance de gain est donc la même, et comme de plus $G_1+\cdots+G_n=n!$, on en déduit que :

$$n! = E(G_1+\ldots G_n) = nE(G_1) \text{ soit } E(G_1)=(n-1)!.$$

Partie III : J_1 et J_2 forment un groupe et les autres joueurs jouent comme précédemment.

1. (a) Supposons que J_1 et J_2 aient fait respectivement α et β prévisions correctes. Alors $\beta = 2p+1-\alpha$. On a alors deux cas :
   - soit $\alpha \geq p+1$ et alors $\beta \leq 2p+1-(p+1) = p$;
   - soit $\alpha < p+1$ et nécessairement $\beta > 2p+1-(p+1) = p$.

   Par suite, $\boxed{\text{un et un seul des joueurs } J_1 \text{ et } J_2 \text{ a au moins } (p+1) \text{ prévisions correctes.}}$

   (b) On procède par double inclusion.

   $\subset$ D'après ce qui précède, le nombre de prévisions correctes du meilleur de J_1 et J_2 est supérieur ou égal à $p+1$, et comme il est bien sûr inférieur ou égal à $2p+1$, on a :
   $$Y(\Omega) \subset [\![p+1, 2p+1]\!].$$

   $\supset$ Soit $k \in [\![p+1, 2p+1]\!]$. On suppose que la pièce donne $2p+1$ *pile*, que le joueur J_1 avait prédit k *pile* puis $2p+1-k$ *face* et donc J_2 avait prédit k *face* puis $2p+1-k$ *pile*. Dans ce cas, le meilleur de J_1 et J_2 est J_1 (puisque $2p+1-k < k$) et il a k prévisions correctes donc l'événement $[Y = k]$ est réalisé.
   Ainsi, on a $Y(\Omega) \supset [\![p+1, 2p+1]\!]$.

   Par suite, on a $\boxed{Y(\Omega) = [\![p+1, 2p+1]\!]}$.

2. Si les lancers donnent F, P, P ou P, F, F, l'un des deux joueurs a trois prévisions correctes donc Y prend la valeur 3.

   Dans le cas contraire les deux joueurs ont au moins une prévision fausse, Y ne prend donc pas la valeur 3 tout en prenant une valeur de l'ensemble $[\![p+1, 2p+1]\!] = [\![2, 3]\!]$ donc Y prend la valeur 2.

   Ainsi, dans l'exemple donné au début de cette partie, Y prend la valeur 3 si les lancers donnent F, P, P ou P, F, F et Y prend la valeur 2 sinon.

3. Soit $k \in [\![p+1, 2p+1]\!]$. On a :
$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= P(([X_1 = k] \cap [X_2 = 2p+1-k]) \cup ([X_1 = 2p+1-k] \cap [X_2 = k])) \\
&= P([X_1 = k] \cap [X_2 = 2p+1-k]) + P([X_1 = 2p+1-k] \cap [X_2 = k]) \\
&\qquad \text{car } [X_1 = k] \cap [X_2 = 2p+1-k] \text{ et } [X_1 = 2p+1-k] \cap [X_2 = k] \text{ sont incompatibles} \\
&= P(X_1 = k) + P(X_2 = k) \\
&\qquad \text{car } [X_1 = k] = [X_2 = 2p+1-k] \text{ et } [X_1 = 2p+1-k] = [X_2 = k] \\
&= q_k + q_k \boxed{= 2q_k.}
\end{aligned}$$

4. Par double inclusion.

   $\subset$ Soit le meilleur de J_1 et J_2 est battu par au moins un autre joueur et alors le gain G' est nul, soit le meilleur de J_1 et J_2 atteint le score maximum mais alors le nombre de joueurs ayant gagné avec lui est un élément de $[\![0, n-2]\!]$ (son coéquipier a nécessairement perdu).
   Ainsi, $G'(\Omega) \subset \{0\} \cup \left\{ \dfrac{n!}{j+1} \ / \ j \in [\![0, n-2]\!] \right\}$.

   $\supset$ On suppose que la pièce donne $2p+1$ *pile*, que le joueur J_1 avait prédit un *pile* puis $2p$ *face*, le joueur J_2 ayant alors prédit un *face* puis $2p$ *pile* et que tous les autres joueurs n'avaient prédit que des *pile*. Dans ce cas, le meilleur de J_1 et J_2 est J_2 et il a $2p$ prévisions correctes mais les autres joueurs ont strictement plus de prévisions correctes donc l'événement $[G' = 0]$ est réalisé.
   Soit $j \in [\![0, n-2]\!]$. On suppose que la pièce donne $2p+1$ *pile*, que le joueur J_1 avait prédit un *pile* puis $2p$ *face*, le joueur J_2 ayant alors prédit un *face* puis $2p$ *pile*, que les joueurs $J_3, \dots, J_{j+2}$ avaient fait la même prédiction que J_2 et que les joueurs $J_{j+3}, \dots, J_n$ avaient

fait la même prédiction que J_1. Dans ce cas, J_2 gagne ainsi que les joueurs $J_3, \dots, J_{j+2}$ et l'événement $\left[G' = \frac{n!}{j+1}\right]$ est réalisé. Ainsi, on a $G'(\Omega) \supset \{0\} \cup \left\{ \dfrac{n!}{j+1} \ / \ j \in [\![0, n-2]\!] \right\}$.

Par suite, on a $\boxed{G'(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \dfrac{n!}{j+1} \ / \ j \in [\![0, n-2]\!] \right\}.}$

5. (a) Soit $k \in [\![p+1, 2p+1]\!]$. Soit $j \in [\![0, n-2]\!]$. On suppose que l'événement $[Y = k]$ est réalisé. Ainsi, le meilleur de J_1 et J_2 a k prévisions correctes. Son gain est alors de $\frac{n!}{j+1}$ euros si et seulement s'il gagne ainsi que j autres joueurs exactement c'est-à-dire si et seulement si j autres joueurs font k prévisions correctes et les $n-j-2$ autres joueurs font strictement moins de k prévisions correctes (on sait que le coéquipier a strictement moins de k prévisions correctes). Calculons la probabilité de cet évènement :

   - La probabilité que j joueurs donnés fassent k prévisions correctes et les $n-j-2$ restants fassent strictement moins de k prévisions correctes est $(q_k)^j (r_{k-1})^{n-j-2}$ (car les joueurs $J_3, \dots, J_n$ jouent indépendamment les uns des autres).
   - Il y a $\dbinom{n-2}{j}$ façons de choisir les j joueurs faisant k prévisions correctes parmi les $n-2$ joueurs autres que les joueurs 1 et 2 (les $n-j-2$ restants étant automatiquement désignés).

   Ainsi on a :

$$\boxed{P_{[Y=k]}\left(G' = \frac{n!}{j+1}\right) = \binom{n-2}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-j-2}.}$$

   (b) Soit $k \in [\![p+1, 2p+1]\!]$. On a en procédant comme à la question II.3.(b) :

$$\begin{aligned}
E\left(G' | [Y = k]\right) &= 0 \times P_{[Y=k]}(G' = 0) + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{j+1} P_{[Y=k]}\left(G' = \frac{n!}{j+1}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{j+1} \binom{n-2}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-2-j} = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{n-1} \binom{n-1}{j+1} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-2-j} \\
&= \frac{n(n-2)!}{q_k} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j+1} (q_k)^{j+1} (r_{k-1})^{n-1-j-1} \\
&= \frac{n(n-2)!}{q_k} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} (q_k)^i (r_{k-1})^{n-1-i} \\
&= \frac{n(n-2)!}{q_k} \left[(q_k + r_{k-1})^{n-1} - (q_k)^0 (r_{k-1})^{n-1} \right] \\
&\boxed{= n(n-2)! \frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k}.}
\end{aligned}$$

6. (a) $\left([Y = k]\right)_{k \in [\![p+1, 2p+1]\!]}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. La formule de l'espérance totale (qui s'applique puisque G' est une variable finie) donne alors :

$$\begin{aligned}
E(G') &= \sum_{k=p+1}^{2p+1} E(G' | [Y = k]) \, P(Y = k) = n\,(n-2)! \sum_{k=p+1}^{2p+1} \frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k} 2\, q_k \\
&= 2\, n\, (n-2)! \left((r_{2p+1})^{n-1} - (r_p)^{n-1} \right) \boxed{= 2\, n\, (n-2)! \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}
\end{aligned}$$

   car $r_{2p+1} = P(X_1 \leq 2p+1) = 1$ et $r_p = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in [\![3, +\infty[\![$, $2^{n-1} > n$.

Init. $2^{3-1} = 4 > 3$ donc la propriété est vraie pour $n = 3$.

Hér. Soit $n \in [\![3, +\infty]\!]$. Supposons la propriété vraie au rang n et montrons la au rang $n+1$.

On a $2^{(n+1)-1} = 2 \times 2^{n-1}$ et $2^{n-1} > n$ par hypothèse de récurrence. D'où :

$$2^{(n+1)-1} > 2n = (n+1) + (n-1) > n+1.$$

Concl. Par principe de récurrence, on a : $\boxed{\forall n \in [\![3, +\infty[\![,\ 2^{n-1} > n.}$

(c) Comme $G_1' = \frac{1}{2}G'$, on a $\boxed{E(G_1') = n(n-2)!\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)}$.

Comme $2^{n-1} > n$ alors $1 - \dfrac{1}{2^{n-1}} > 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$. Ainsi on a :

$$E(G_1') > \frac{n(n-1)(n-2)!}{n} = (n-1)! = E(G_1).$$

$\boxed{\text{La stratégie adoptée par les joueurs } J_1 \text{ et } J_2 \text{ est donc avantageuse}}$ du point de vue de l'espérance de leur gain.