DM17

Devoir Maison type Maths 3 facultatif

Problème

Dans ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 et p est un entier naturel.

Un jeu oppose n joueurs $J_1, J_2, \ldots, J_n$. Le jeu se déroule de la façon suivante : une pièce équilibrée est lancée $(2p+1)$ fois. Avant les lancers, chaque joueur écrit une liste de prévisions pour ces lancers. Cette liste contient donc une suite de $(2p+1)$ caractères P (pour *pile*) ou F (pour *face*). Les gagnants sont les joueurs ayant le plus grand nombre de prévisions correctes et ils se partagent équitablement la somme de $n!$ euros.

Par exemple, pour $p = 1$, si les lancers donnent trois fois *pile*, le joueur ayant noté (P, F, P) a deux prévisions correctes, et si les lancers donnent dans cet ordre P, F, P, le joueur ayant noté (F, P, F) n'a aucune prévision correcte.

Pour i de $[\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du joueur J_i, on note G_i la variable aléatoire égale au gain du joueur J_i et $E(G_i)$ l'espérance de G_i.

L'objectif du problème est de déterminer l'espérance de gain du joueur J_1 selon deux stratégies présentées dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : quelques résultats utiles pour les parties suivantes

1. Montrer que les variables X_i suivent toutes la même loi binomiale dont on donnera les paramètres. On pose alors, pour tout i de $[\![1, n]\!]$ et tout k de $X_i(\Omega)$: $q_k = P(X_i = k)$ et $r_k = P(X_i \leq k)$.

2. On pose $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k}$ et $T_p = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}$.

   (a) Calculer $S_p + T_p$.

   (b) Montrer que $S_p = T_p$.

   (c) Déduire des deux résultats précédents la valeur de S_p puis montrer que $r_p = \frac{1}{2}$.

Partie 2 : les joueurs jouent au hasard et indépendamment les uns des autres

1. Montrer que $G_1(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1} \middle| j \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.

2. (a) Montrer que $P_{[X_1=0]}\left(G_1 = \frac{n!}{n}\right) = (q_0)^{n-1}$.

   (b) Montrer que, pour tout j de $[\![0, n-2]\!]$: $P_{[X_1=0]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = 0$.

   (c) En déduire que l'espérance de G_1 conditionnellement à l'événement $[X_1 = 0]$ est :
   $$E\left(G_1 \,|[X_1 = 0]\right) = (n-1)!(q_0)^{n-1}$$

3. (a) Établir que, pour tout k non nul de $X_1(\Omega)$ et pour tout j élément de $[\![0, n-1]\!]$, on a :
   $$P_{[X_1=k]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = \binom{n-1}{j}(q_k)^j (r_{k-1})^{n-1-j}$$

   (b) Établir que $\dfrac{1}{j+1}\dbinom{n-1}{j} = \dfrac{1}{n}\dbinom{n}{j+1}$ puis en déduire que, pour tout k non nul de $X_1(\Omega)$, l'espérance de G_1 conditionnellement à l'événement $[X_1 = k]$ est :
   $$E\left(G_1 \,|[X_1 = k]\right) = (n-1)!\frac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k}$$

(c) Vérifier que cette expression reste valable pour $k = 0$ en posant $r_{-1} = 0$.

4. Utiliser les questions 3.b) et 3.c) pour établir que $E(G_1) = (n-1)!$.

Partie 3 : J_1 et J_2 forment un groupe et les autres joueurs jouent comme dans la partie 2

Dans cette partie, J_1 et J_2 adoptent la stratégie suivante: J_1 joue au hasard mais J_2 joue, pour chaque lancer, les prévisions contraires de J_1. Par exemple, pour $p = 1$, si J_1 a choisi (F, P, P) alors J_2 choisit (P, F, F).
On note G' le gain du groupe formé par ces deux joueurs, J_1 et J_2 décidant de partager équitablement ce gain. On a donc, en désignant par G'_1 et G'_2 les gains respectifs de J_1 et J_2: $G' = G'_1 + G'_2$ et $G'_1 = G'_2$.
On pose, pour tout i de $[\![1, n]\!]$ et pour tout k de $X_i(\Omega)$: $q_k = P(X_i = k)$ et $r_k = P(X_i \leq k)$.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du meilleur de J_1 et J_2.

1. (a) Montrer que un et un seul des joueurs J_1 et J_2 a au moins $p+1$ prévisions correctes.
   (b) En déduire que: $Y(\Omega) = [\![p+1, 2p+1]\!]$.

2. Vérifier que, dans l'exemple donné au début de cette partie, Y prend la valeur 3 si les lancers donnent dans cet ordre F, P, P ou P, F, F et Y prend la valeur 2 sinon.

3. Pour tout k de $[\![p+1, 2p+1]\!]$, montrer que : $P(Y = k) = 2q_k$.

4. Montrer que $G'(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1} \;\middle|\; j \in [\![0, n-2]\!] \right\}$.

5. (a) Établir que, pour tout k de $[\![p+1, 2p+1]\!]$ et tout j de $[\![0, n-2]\!]$, on a :

$$P_{[Y=k]}\left(G' = \frac{n!}{j+1}\right) = \binom{n-2}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-2-j}$$

   (b) En déduire que, pour tout k de $[\![p+1, 2p+1]\!]$, l'espérance de G' conditionnellement à l'événement $[Y = k]$ est :

$$E\left(G' \,|[Y = k]\right) = n(n-2)! \frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k}$$

6. (a) En déduire, en utilisant le résultat de la deuxième question de la partie 1, que :

$$E(G') = 2n(n-2)! \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

   (b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 \;\Rightarrow\; 2^{n-1} > n$.
   (c) Déterminer $E(G'_1)$ et vérifier que la stratégie adoptée par les joueurs J_1 et J_2 est avantageuse pour J_1 (et donc pour J_2) du point de vue de l'espérance de leur gain.