DM19

Devoir Maison type Maths 3 facultatif

Exercice 1 (Edhec 2019)

Partie 1 : définition de l'adjoint $u^\star$ d'un endomorphisme u de E.

1. (a) Supposons qu'un tel endomorphisme $u^\star$ de E existe, alors on a :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$$

Fixons $y \in R$, et soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a pour $x = e_i$:

$$\langle u(e_i), y\rangle = \langle e_i, u^\star(y)\rangle.$$

Or $\mathscr{B}$ étant une base **orthonormée**, on sait d'après le cours que :

$$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u^\star(y)\rangle e_i.$$

Ce qui donne donc avec les égalités précédentes :

$$\boxed{u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i.}$$

(b) Si $u^\star$ existe, alors pour tout $y \in E$, on a obtenu les coordonnées du vecteur $u^\star(y)$ dans la base $\mathscr{B}$. Ainsi le vecteur $u^*(y)$ est déterminé de manière unique pour tout $y \in E$, et donc $\boxed{u^\star \text{ est unique.}}$

2. (a) Pour tout $y \in E$, on a :

$$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u^\star(y)\rangle e_i \in E.$$

Donc $u^\star$ est bien à valeurs dans E. Montrons que cette application est linéaire. Soit pour cela $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} u^\star(\lambda x + \mu y) &= \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), \lambda x + \mu y\rangle e_i \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), x\rangle e_i + \mu \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i \qquad \text{par lin. à droite de } \langle\cdot,\cdot\rangle \\ &= \lambda u^\star(x) + \mu u^\star(y) \end{aligned}$$

Donc $u^\star$ est bien linéaire. C'est bien un $\boxed{\text{endomorphisme de } E.}$

(b) Reste à montrer que cet endomorphisme est effectivement solution du problème posé. Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \langle x, u^\star(y)\rangle &= \langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle \langle x, e_i\rangle \qquad \text{par lin. à droite de } \langle\cdot,\cdot\rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle u(e_i), y\rangle \qquad \text{par lin. à gauche de } \langle\cdot,\cdot\rangle \\ &= \langle u\left(\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i\right), y\rangle \qquad \text{par lin. de } u \\ &= \langle u(x), y\rangle \end{aligned}$$

car $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ puisque $\mathscr{B}$ est une base orthonormée.

Ainsi $\boxed{\text{l'endomorphisme } u^\star \text{ est bien solution du problème posé}}$, et $\boxed{\text{c'est l'unique solution}}$ d'après la question 1. On appelle *adjoint* de u cet endomorphisme.

Partie 2 : étude des endomorphismes normaux.

3. Puisque f un endomorphisme symétrique de E, on a pour tout $x, y \in E$:

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

Ainsi f est un endomorphisme de E solution du problème posé à la partie 1. Or, on vient de le voir, ce problème admet une unique solution, qui n'est autre que $f^\star$, l'adjoint de f. Par unicité de la solution de ce problème, on a donc $\boxed{f = f^\star.}$

De plus on a :

$$f^\star \circ f = f \circ f = f \circ f^\star.$$

Donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme normal.}}$

4. (a) Pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
\|u(x)\|^2 &= \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, u^\star(u(x)) \rangle && \text{par déf. de l'adjoint} \\
&= \langle x, u^\star \circ u(x) \rangle = \langle x, u \circ u^\star(x) \rangle && \text{car } u \text{ et } u^\star \text{ commutent} \\
&= \langle x, u(u^\star(x)) \rangle = \langle u^\star(x), u^\star(x) \rangle && \text{par déf. de l'adjoint} \\
&= \|u^\star(x)\|^2.
\end{aligned}$$

Ainsi on a bien $\boxed{\text{pour tout } x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^\star(x)\|.}$

(b) On a :

$$x \in \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_E \Leftrightarrow \|u(x)\| = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{quest. 4.(a)}} \|u^\star(x)\| = 0 \Leftrightarrow u^\star(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(u^\star).$$

Ainsi on a bien $\boxed{\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^\star).}$

5. Supposons que F soit un sous-espace vectoriel stable par u, c'est-à-dire :

$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F.$$

Montrons que $F^\perp$ est stable par $u^\star$. Prenons pour cela $y \in F^\perp$ et montrons que $u^\star(y) \in F^\perp$. On a pour tout $x \in F$:

$$\langle x, u^\star(y) \rangle \underbrace{=}_{\text{def. de l'adjoint}} \langle \underbrace{u(x)}_{\in F}, \underbrace{y}_{\in F^\perp} \rangle = 0$$

Ainsi on a bien $u^\star(y) \in F^\perp$, et donc $\boxed{F^\perp \text{ est stable par } u^\star.}$

6. (a) Comme u et $u^\star$ commutent, on sait par le cours que les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. Redémontrons le ici. Soit donc $x \in E_\lambda$. Montrons que $u^\star(x) \in E_\lambda$:

$$u(u^\star(x)) = u \circ u^\star(x) = u^\star \circ u(x) = u^\star(\lambda \cdot x) = \lambda u^\star(x)$$

par linéarité de $u^\star$. Ainsi on a bien $u^\star(x) \in E_\lambda$, et $\boxed{E_\lambda \text{ est stable par } u^\star.}$

(b) Pour tout $x, y \in E$, on a par définition de l'adjoint de u :

$$\langle u^\star(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle.$$

Or on sait par la partie 1 qu'il existe un **unique** endomorphisme $(u^\star)^\star$, l'adjoint de $u^\star$, satisfaisant :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u^\star(x), y\rangle = \langle x, (u^\star)^\star(y)\rangle.$$

Par unicité de l'endomorphisme solution du problème de la partie 1, on a donc $\boxed{(u^\star)^\star = u.}$

On sait par la question précédente que E_λ est stable par u. D'après la question 5., le sous-espace $\boxed{E_\lambda^\perp \text{ est donc stable par } (u^\star)^\star = u}$, d'où le résultat voulu.

Exercice 2 (EML 2013)

Partie I : Étude d'une fonction f définie par une intégrale.

1. Soit $x \in]0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (car pour tout $t \in [0, +\infty[$, $x + t \geq x > 0$). L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ est donc impropre en $+\infty$.

   - On a $\dfrac{t^2e^{-t}}{x+t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^2e^{-t}}{t} = te^{-t}$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$ par croissances comparées. Ainsi $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{x+t} = 0$ et donc $\dfrac{e^{-t}}{x+t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
   - Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\dfrac{1}{t^2} \geq 0$.
   - L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge car c'est une intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = 2 > 1$.

   Par théorème de comparaison, on en déduit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Finalement, $\boxed{\text{l'intégrale généralisée } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

2. Soit $x \in]0, +\infty[$. Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a $\dfrac{e^{-t}}{x+t} \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t}_{\geq 0} \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

   De plus on a pour tout $t \in [0, 1]$, $e^{-t} \geq e^{-1}$ et donc :

$$\frac{e^{-t}}{x+t} \geq \frac{e^{-1}}{x+t} \qquad (\text{car } x + t > 0).$$

   Par croissance de l'intégrale (toutes les intégrales en jeu convergent) :

$$\boxed{f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t.}$$

   Enfin, on a :

$$\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t = \Big[e^{-1}\ln(|x+t|)\Big]_0^1 = e^{-1}(\ln(x+1) - \ln x).$$

   Comme enfin $\displaystyle\lim_{x\to0^+} e^{-1}(\ln(x+1) - \ln x) = +\infty$, on en déduit par théorème de comparaison :

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty.}$$

3. Montrons que :
$$\forall x \in]0;+\infty[,\ 0 < f(x) \leq \frac{1}{x}.$$
Soit donc $x \in]0,+\infty[$. On a $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t$. C'est l'intégrale (convergente) de la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$ **continue** et **positive** sur $[0,+\infty[$. De plus cette fonction est **non identiquement nulle** (car par exemple $\frac{e^{-0}}{x+0} = \frac{1}{x} \neq 0$). On en déduit par théorème de stricte positivité de l'intégrale que $f(x) > 0$.

Montrons la deuxième inégalité : pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a $x+t \geq x > 0$ donc $\frac{1}{x+t} \leq \frac{1}{x}$ et donc $\frac{e^{-t}}{x+t} \leq \frac{e^{-t}}{x}$ (car $e^{-t} \geq 0$). De plus, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{1} = 1$ (intégrale du type $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ avec $\lambda = 1 > 0$). Par croissance de l'intégrale, on obtient (toutes les intégrales convergent) :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t \quad \text{d'où finalement} \quad \boxed{0 < f(x) \leq \frac{1}{x}.}$$
Puisqu'enfin $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que :
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ existe et vaut } 0.}$$

4. $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale Gamma $\int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ avec $\nu = 2 > 0$ donc $\boxed{\text{elle converge}}$.

On cherche maintenant à majorer la quantité $\left|f(x) - \frac{1}{x}\right|$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

Soit donc $x \in]0,+\infty[$. On a vu à la question précédente que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$. On obtient donc :
$$\begin{aligned}
\left|f(x) - \frac{1}{x}\right| &= \left|\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{x+t} - \frac{e^{-t}}{x}\right)\mathrm{d}t\right| \text{ par linéarité} \\
&= \left|\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{x-(x+t)}{x(x+t)}\right)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{-t}{x(x+t)}\right)\mathrm{d}t\right|
\end{aligned}$$
Pour tout $x \in]0,+\infty[$ et $t \in [0,+\infty[$, on a $\left|\frac{te^{-t}}{x(x+t)}\right| \leq \frac{te^{-t}}{x^2}$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge (absolument), on en déduit que $\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{-t}{x(x+t)}\right)\mathrm{d}t$ converge elle aussi absolument. On peut donc appliquer l'inégalité triangulaire :
$$\left|f(x) - \frac{1}{x}\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t}\left|\frac{-t}{x(x+t)}\right|\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{t}{x(x+t)}\,\mathrm{d}t,$$
puis par croissance de l'intégrale :
$$\boxed{\left|f(x) - \frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t.}$$

On obtient en divisant la relation précédente par $\dfrac{1}{x} > 0$:

$$\left|\frac{f(x)}{1/x} - 1\right| \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ est une constante réelle, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t = 0$.
Par théorème des gendarmes, on en déduit finalement que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{1/x} \text{ existe et vaut } 1.$$

Ainsi, on a $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}}$.

Partie II : Une autre expression intégrale de f.

A - Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale.

5. Soit $(x,h) \in]0;+\infty[\times\mathbb{R}^*$ tel que $h > -\dfrac{x}{2}$.

   (a) La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ (car pour tout $t \in [0,+\infty[$, $x+t \neq 0$).
   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ est donc impropre en $+\infty$.

   - On a $\dfrac{t^2e^{-t}}{(x+t)^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^2e^{-t}}{t^2} = e^{-t}$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$. Donc on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^2e^{-t}}{(x+t)^2} = 0$ et $\dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
   - Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^2} \geq 0$.
   - L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Par le théorème de comparaison, on en déduit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
   Ainsi $\boxed{\text{l'intégrale généralisée } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

   (b) Soit $t \in [0,+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| &= \left|\frac{(x+t)^2 - (x+h+t)(x+t) + h(x+h+t)}{h(x+h+t)(x+t)^2}\right| \\
&= \left|\frac{x^2+t^2+2xt-x^2-xt-hx-ht-tx-t^2+hx+h^2+ht}{h(x+h+t)(x+t)^2}\right| \\
&= \left|\frac{h^2}{h(x+h+t)(x+t)^2}\right| = \left|\frac{h}{(x+h+t)(x+t)^2}\right| = \frac{|h|}{(x+h+t)(x+t)^2}.
\end{aligned}$$

   On a :

   - $x+t \geq x \geq 0$ donc $(x+t)^2 \geq x^2 \geq 0$;
   - $x+h+t \geq x - \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2} \geq 0$ car $h > -\dfrac{x}{2}$.

   D'où $(x+h+t)(x+t)^2 \geq \dfrac{x}{2}x^2 = \dfrac{x^3}{2} > 0$ et donc $\dfrac{|h|}{(x+h+t)(x+t)^2} \leq \dfrac{2|h|}{x^3}$. On obtient bien :

$$\boxed{\forall t \in [0,+\infty[,\quad \left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\frac{1}{h}\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+h+t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t\right)+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right)\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

par linéarité. Or pour tout $t\in[0,+\infty[$, on a d'après la question précédente (avec $e^{-t}\geq 0$) :

$$0\leq\left|e^{-t}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right)\right|\leq\frac{2|h|}{x^3}e^{-t}.$$

On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2|h|}{x^3}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ aussi par linéarité. Par le théorème de comparaison, on en déduit que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\left|e^{-t}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right)\right|\mathrm{d}t$$

converge. On peut donc appliquer l'inégalité triangulaire :

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right)\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^{+\infty}\left|e^{-t}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right)\right|\mathrm{d}t$$

puis par croissance (les deux intégrales en jeu étant convergentes), on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\left|e^{-t}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right)\right|\mathrm{d}t\leq\int_0^{+\infty}\frac{2|h|}{x^3}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, on a :

$$\boxed{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^{+\infty}\frac{2|h|}{x^3}e^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{2|h|}{x^3}\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{2|h|}{x^3}}.$$

D'où le résultat.

6. Soit $x\in]0,+\infty[$. D'après la question précédente, on a pour tout $h\in\mathbb{R}^*$ tel que $h>-\dfrac{x}{2}$:

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right|\leq\frac{2|h|}{x^3}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{2|h|}{x^3}=0$, par le théorème de des gendarmes, on obtient :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\text{ existe et vaut }-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Par définition, cela signifie que f est dérivable en x et $f'(x)=-\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Ceci étant vrai pour tout $x\in]0,+\infty[$, on conclut donc que $\boxed{f\text{ est dérivable sur }]0,+\infty[}$ et $\boxed{\text{pour tout }x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=-\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t}$.

7. Soit $x\in]0,+\infty[$. Soit $(\varepsilon,A)\in]0,1]\times[1,+\infty[$. On effectue une intégration par parties sur $[\varepsilon,A]$:

$$\begin{array}{c|ccc} + & e^{-t} & & \dfrac{1}{(x+t)^2} \\ & & \searrow & \\ - & -e^{-t} & \overset{\int}{\longleftarrow} & -\dfrac{1}{x+t} \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto -\dfrac{1}{x+t}$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, A]$. On obtient donc par intégration par parties :

$$\int_\varepsilon^A \frac{1}{(x+t)^2} \times e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{x+t} \times e^{-t}\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \left(-\frac{1}{x+t}\right) \times \left(-e^{-t}\right)\,\mathrm{d}t$$

soit encore :

$$\boxed{\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.}$$

8. On a $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} = \frac{1}{x}$ et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{e^{-A}}{x+A} = 0$. De plus, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ convergent. Ainsi, par passage à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ et $A \to +\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \quad \text{donc} \quad -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

On a donc $\boxed{\text{pour tout } x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = -\dfrac{1}{x} + f(x).}$

9. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x} + f(x)$.
Comme les fonctions $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ et f sont dérivables sur $]0,+\infty[$, par somme, on obtient que f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} + f'(x)$.
Comme les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et f' sont continues sur $]0,+\infty[$ (car f' est dérivable sur $]0,+\infty[$), par somme, on déduit que f'' est continue sur $]0,+\infty[$, et donc que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[.}$

Mise en garde.

Rappelons en passant qu'une fonction dérivable est continue, mais que la réciproque est fausse en général ($x \mapsto \sqrt{x}$ en 0 par exemple).

B - Intervention d'une fonction auxiliaire g.

10. Par produit des fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et f qui sont dérivables sur $]0,+\infty[$, $\boxed{g \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[.}$
Et pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$g'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}\left(-\frac{1}{x} + f(x)\right) \boxed{= -\frac{e^{-x}}{x}.}$$

11. Soit $x \in]0,+\infty[$.
Méthode 1 : La fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{u}$ est continue sur $[x,+\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ est généralisée en $+\infty$.
Soit $A \in [x,+\infty[$. On a :

$$\int_x^A \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_x^A \left(-g'(u)\right)\,\mathrm{d}u = \left[-g(u)\right]_x^A = -g(A) + g(x).$$

Or, on a $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} g(A) = \lim_{A\to+\infty} e^{-A}f(A) = 0$ car $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} f(A) = 0$.
Par suite, l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \text{ converge}}$ et $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = g(x)}$, et on a :

$$\boxed{f(x) = e^x g(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u}$$

Méthode 2 : On pose $u = x + t$ (changement de variable affine donc licite). On a $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$, $u = x$ (resp. $u \to +\infty$) lorsque $t = 0$ (resp. $t \to +\infty$). On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge donc d'après le théorème de changement de variable, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{x-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ converge et on a :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} e^x \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Comme e^x est une constante non nulle, on en déduit par linéarité que l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \text{ converge}}$ et que $\boxed{\displaystyle f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u}$. De plus, on a $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = e^{-x} f(x) = g(x).}$

12. Comme $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$, on a $\displaystyle e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ d'où en multipliant par e^{-x} : $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.}$

13. On a :

- $\displaystyle n^2 \int_n^{+\infty} e^{-u} u\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 \times \frac{e^{-n}}{n} = ne^{-n}$;
- $ne^{-n} \geq 0$;

On en déduit que les séries $\sum n^2 \displaystyle\int_n^{+\infty} e^{-u} u\,\mathrm{d}u$ et $\sum ne^{-n}$ sont de même nature. Montrons que $\sum ne^{-n}$ converge :

- $ne^{-n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissance comparée ;
- $\dfrac{1}{n^2} \geq 0$ pour tout $n \geq 0$;
- $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (c'est une série de Riemann avec $2 > 1$).

Par théorème de comparaison, la série $\sum ne^{-n}$ converge, et donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \text{ converge}}$ aussi.

14.
- Pour tout $t \geq 0$, on a $h(t) = \dfrac{1}{f(1)} \dfrac{e^{-t}}{1+t} \geq 0$ car $f(1) > 0$ (on avait montré que $f > 0$ sur $]0, +\infty[$). Pour tout $t < 0$, on a $h(t) = 0$. Ainsi, h est à valeurs positives.
- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{f(1)} \dfrac{e^{-t}}{1+t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ ($\forall t \in]0, +\infty[$, $1 + t \neq 0$). Comme h est continue évidemment sur $]-\infty, 0[$, on en déduit que h est continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé de $\{0\}$ (on pourrait vérifier qu'elle n'est pas continue effectivement en 0, mais c'est inutile étant donné la définition d'une densité de probabilité).
- Étudions l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{f(1)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$. On a vu que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $f(1)$ (partie I). On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{f(1)} \times f(1) = 1$.

On en déduit que h est une densité.

15. Étudions la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} th(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{f(1)} \frac{te^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{f(1)} \dfrac{te^{-t}}{1+t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est généralisée en $+\infty$.

La fonction intégrée étant positive sur $[0,+\infty[$, ici convergence absolue équivaut à convergence. On a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(1)} \frac{te^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{f(1)} \frac{(t+1-1)e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{f(1)}e^{-t} - \frac{1}{f(1)}\frac{e^{-t}}{1+t}\right)\mathrm{d}t.$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge et vaut 1 et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt$ converge et vaut $f(1)$.
Donc par linéarité, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{f(1)}e^{-t} - \frac{1}{f(1)}\frac{e^{-t}}{1+t}\right) dt$ converge et vaut :

$$\frac{1}{f(1)} \times 1 - \frac{1}{f(1)} \times f(1) = \frac{1}{f(1)} - 1.$$

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} th(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument et vaut $0 + \dfrac{1}{f(1)} - 1 = \dfrac{1}{f(1)} - 1$.
On en déduit que X admet une espérance et $E(X) = \dfrac{1}{f(1)} - 1$.

Exercice 3 (Ecricome 2005)

Partie I : Un calcul d'intégrales

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^\alpha}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc l'intégrale est généralisée en $+\infty$.

   En $+\infty$, on a :

   - $\dfrac{1}{(1+t^2)^\alpha} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2\alpha}}$,
   - $\dfrac{1}{t^{2\alpha} \geq 0}$ pour tout $t > 0$,
   - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2\alpha}}$ est une intégrale de Riemann en $+\infty$ qui converge si et seulement si $2\alpha > 1$, soit si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$

   Par théorème de comparaison, l'intégrale $\boxed{J_\alpha \text{ converge si et seulement si } \alpha > \tfrac{1}{2}.}$

2. L'intégrale J_α étant généralisée en $+\infty$, on se donne $A > 0$ et on effectue une IPP sur le segment $[0, A]$. On a :

$$\begin{array}{c|ccc} + & \dfrac{1}{(1+t^2)^\alpha} = (1+t^2)^{-\alpha} & & 1 \\ & & \searrow & \\ - & (-\alpha)\times(2t)\times(1+t^2)^{-\alpha-1} & \overset{\int}{\longleftarrow} & t \end{array}$$

   Les fonctions $t \mapsto (1+t^2)^{-\alpha}$ et $t \mapsto t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, donc cette intégration par parties est licite. On obtient donc :

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^\alpha} = \left[\frac{t}{(1+t^2)^\alpha}\right]_0^A + 2\alpha \int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{A}{(1+A^2)^\alpha} + 2\alpha \int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t \qquad (*)$$

   On a :

$$\frac{A}{(1+A^2)^\alpha} \underset{A\to+\infty}{\sim} \frac{A}{A^{2\alpha}} = \frac{1}{A^{2\alpha-1}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $\alpha \geq 1$. D'autre part, $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^\alpha}$ existe et vaut J_α. Comme d'après $(*)$, on a :

$$2\alpha \int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} \,\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^\alpha} - \frac{A}{(1+A^2)^\alpha},$$

on en déduit que $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} \,\mathrm{d}t$ existe bien, soit en d'autres termes que $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} \,\mathrm{d}t$ converge, et qu'elle vaut $\frac{1}{2\alpha} J_\alpha$. D'où l'égalité (valable pour tout $\alpha \geq 1$) :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\alpha} J_\alpha.}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} \,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{\alpha+1}} \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^\alpha} - \frac{1}{(1+t^2)^{\alpha+1}} \,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^\alpha}}_{J_\alpha} - \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{\alpha+1}} \,\mathrm{d}t}_{J_{\alpha+1}}
\end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale (toutes les intégrales convergent d'après la question 1.). On obtient donc que pour tout $\alpha \geq 1$:

$$J_\alpha - J_{\alpha+1} = \frac{1}{2\alpha} J_\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{\alpha+1} = \frac{2\alpha-1}{2\alpha} J_\alpha.}$$

3. Pour $\alpha = 1$, on a :

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Soit $A > 0$. On a :

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^A = \arctan(A) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi on a $\boxed{J_1 = \frac{\pi}{2}}$.

Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
J_n &= \frac{2(n-1)-1}{2(n-1)} J_{n-1} = \frac{2(n-1)-1}{2(n-1)} \frac{2(n-2)-1}{2(n-2)} J_{n-2} \\
&= \frac{2(n-1)-1}{2(n-1)} \frac{2(n-2)-1}{2(n-2)} \cdots \frac{2(2)-1}{2(2)} \frac{2(1)-1}{2(1)} J_1 \quad \text{en intérant} \\
&= \frac{2n-3}{2(n-1)} \frac{2n-5}{2(n-2)} \cdots \frac{3}{2\times 2} \frac{1}{2\times 1} \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

On reconnait au numérateur le produit de tous les termes impairs entre 1 et $2(n-1)-1$. Pour faire apparaitre au numérateur $(2n-2)!$, on utilise l'astuce du banquier en multipliant par tous les facteurs pairs manquants en haut et en bas, ce qui donne :

$$J_n = \frac{(2n-2)(2n-3)}{[2(n-1)]2} \frac{(2n-4)(2n-5)}{[2(n-2)]^2} \cdots \frac{4\times 3}{[2\times 2]^2} \frac{2\times 1}{[2\times 1]^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-2)!}{[2^{n-1}\times(n-1)!]^2} \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, on a pour tout n entier supérieur ou égal à 1 :

$$\boxed{J_n = \frac{(2n-2)!}{[2^{n-1}\times(n-1)!]^2} \frac{\pi}{2}.}$$

Partie II : Loi de Student à n degrés de liberté

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Commençons par noter que g_n est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$.

   Montrons que $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et déterminons sa valeur. Procédons pour cela au changement de variable qui est suggéré, en posant $y = \frac{t}{\sqrt{n}}$. Ce changement de variable est affine donc licite. De plus, on a $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{n}}$, et $y : -\infty \to +\infty$ lorsque $t : -\infty \to +\infty$. Par théorème de changement de variable, l'intégrale I_n est de même nature que l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+y^2\right)^{-\frac{n+1}{2}} \sqrt{n}\,\mathrm{d}y,$$

   elle-même de même nature que

$$2\sqrt{n}\int_{0}^{+\infty} \left(1+y^2\right)^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{d}y = 2\sqrt{n}J_{\frac{n+1}{2}}$$

   par parité. Or cette dernière intégrale est convergente d'après la question 1., puisque $\frac{n+1}{2} > \frac{1}{2}$. On en déduit que I_n converge et est égale à $\boxed{k_n = 2\sqrt{n}J_{\frac{n+1}{2}}}$.

   Notons que pour tout $\alpha > \dfrac{1}{2}$, J_α est l'intégrale de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^\alpha}$ qui est continue, positive et non nulle sur $[0,+\infty[$. Par théorème de stricte positivité de l'intégrale, $J_\alpha > 0$. En particulier, on a donc $k_n > 0$.

   Considérons dès lors la fonction $f_n = \dfrac{1}{k_n} g_n$. f_n est continue et positive sur $\mathbb{R}$, car g_n l'est. Comme de plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k_n}\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$$

   converge et vaut 1, $\boxed{f_n \text{ est bien une densité de probabilité.}}$

5. (a) X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |tf_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, ce qui équivaut à la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |tf_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k_n}\int_0^{+\infty} \frac{t}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\,\mathrm{d}t$ par parité de $t \mapsto |tf_n(t)|$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\,\mathrm{d}t$ est généralisée en $+\infty$.

   En $+\infty$, on a :

   - $\dfrac{t}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t}{t^{n+1}} = \dfrac{1}{t^n}$,
   - $\dfrac{1}{t^n} \geq 0$ pour tout $t > 0$,
   - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n}$ est une intégrale de Riemann en $+\infty$ qui converge si et seulement si $n > 1$.

   Par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |tf_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $n > 1$. Ainsi, $\boxed{E(X) \text{ existe si et seulement si } n > 1}$ et on a en cas de convergence :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_n(t)\,\mathrm{d}t \boxed{= 0}$$

   car la fonction $t \mapsto tf_n(t)$ est impaire.

(b) X admet une variance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge car la fonction intégrée est positive. Par parité, ceci équivaut à la convergence de $\int_0^{+\infty} t^2 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k_n}\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\,\mathrm{d}t$. La fonction intégrée étant continue sur $[0,+\infty[$, l'intégrale est généralisée en $+\infty$.

En $+\infty$, on a :

- $\frac{t^2}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^{n+1}} = \frac{1}{t^{n-1}}$,
- $\frac{1}{t^{n-1}} \geq 0$ pour tout $t>0$,
- $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{n-1}}$ est une intégrale de Riemann en $+\infty$ qui converge si et seulement si $n-1>1$, soit $n>2$.

Par théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty} |tf_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $n>2$. Ainsi, $\boxed{V(X) \text{ existe si et seulement si } n>2}$.

Calculons $V(X)$. Par la formule de Huygens, on a :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) = \frac{2n}{k_n}\int_0^{+\infty} \frac{\frac{t^2}{n}}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\,\mathrm{d}t$$

Comme précédemment, procédons au changement de variable $y = \frac{t}{\sqrt{n}}$.

$$V(X) = \frac{2n\sqrt{n}}{k_n}\int_0^{+\infty} \frac{y^2}{(1+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}\mathrm{d}y$$

Or on a $k_n = 2\sqrt{n}J_{\frac{n+1}{2}}$, et en appliquant le résultat de la question 2. avec $\alpha = \frac{n-1}{2}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{y^2}{(1+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}\mathrm{d}y = \frac{1}{n-1}J_{\frac{n-1}{2}}.$$

D'où en substituant :

$$V(X) = \frac{n}{n-1}\frac{J_{\frac{n-1}{2}}}{J_{\frac{n-1}{2}+1}} = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{(n-1)-1}\boxed{= \frac{n}{n-2}}$$

en utilisant la relation $\frac{J_\alpha}{J_{\alpha+1}} = \frac{2\alpha}{2\alpha+1}$ avec $\alpha = \frac{n-1}{2}$.

Le saviez-vous ?

Le calcul de la distribution de Student a été publié en 1908 par William Gosset. Cet employé de la brasserie Guinness à Dublin, avait introduit cette loi afin de contrôler la qualité de la production de la bière. La brasserie avait pour règle que ses chimistes ne publient pas leurs découvertes. Gosset argua que son article ne serait d'aucune utilité pour les concurrents et obtint l'autorisation de publier mais sous un pseudonyme, Student, pour éviter les difficultés avec les autres membres de son équipe. Cette loi a ensuite été rendue célèbre grâce aux travaux de Ronald Fisher, qui lui donna le nom de « loi de Student ». Elle intervient en statistique en théorie des tests d'hypothèses.

Partie III : Simulation d'une loi

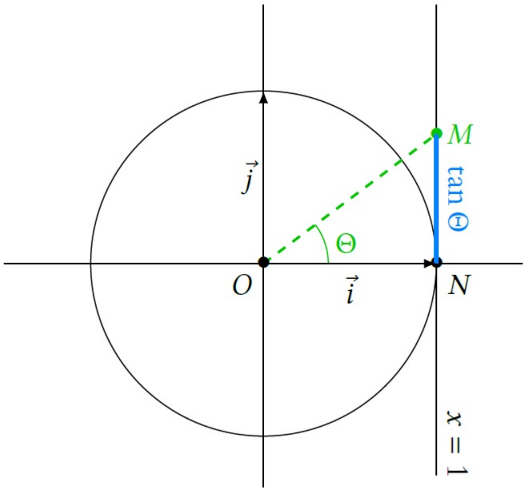
6. La fonction de répartition de Θ est :

$$\boxed{F_\Theta : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{\pi}{2} \\ \dfrac{x-(-\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})} & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{\pi}{2} \\ \dfrac{x}{\pi}+\dfrac{1}{2} & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}.}$$

7. (a) On représente la situation considérée sur le dessin suivant :

Dans le triangle rectangle ONM, on a :

$$\tan(\Theta) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{NM}{ON} = \frac{Y}{1} \boxed{= Y.}$$



(b) On a $X(\Omega) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$. Donc on a $Y(\Omega) = \mathbb{R}$. Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\tan(\Theta) \leq x) = P(\Theta \leq \arctan(x))$$

par croissance de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$. On obtient donc :

$$\boxed{F_Y : x \mapsto F_\Theta(\arctan(x)).}$$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, de sorte que :

$$F_Y(x) = F_\Theta(\arctan(x)) = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

Puisque arctan est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, F_Y l'est aussi. $\boxed{Y \text{ est donc une variable à densité}}$ (sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).

Une densité de Y est alors : $\boxed{f_Y : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}.}$

$\boxed{Y \text{ suit donc une loi de Cauchy.}}$

8. Comme rappelé, `rd.random()` simule une réalisation d'une loi uniforme sur $[0,1]$. Et on se souvient que si $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$, alors $a+(b-a)U$ suit une loi $\mathscr{U}([a,b])$. Pour $a = -\frac{\pi}{2}$ et $b = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que la variable `theta` contient une réalisation de la loi $\mathscr{U}\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$. Et d'après le résultat de la question précédente, Y contient une réalisation de la loi de Cauchy. $\boxed{\text{Le programme simule donc la loi de Cauchy.}}$

Partie IV : Simulation d'une autre loi

10. h est une fonction positive et continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

    Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1. On procède pour cela au changement de variable $t = e^x$. On a $x : -\infty \to +\infty$, et donc $t : 0 \to +\infty$, et $\mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x$. La fonction $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et est strictement monotone (croissante), donc le changement de variable est licite.

    Par théorème de changement de variable, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ est de même nature que l'intégrale $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$, soit encore de $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t$ par parité de f_1. Or, cette dernière intégrale converge et vaut 1 d'après la partie II. Ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

    $\boxed{h \text{ est donc une densité de probabilité.}}$

11. On procède en 4 étapes.

    - **Étape 1 : détermination de l'ensemble image.** Puisque $h(x) \neq 0$, on a $Z(\Omega) = \mathbb{R}$, et donc $T(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \leq 0$, on a donc $F_T(x) = P(T \leq x) = 0$.
    - **Étape 2 : détermination de F_T.**
      Pour tout $x > 0$, on a :
      $$F_T(x) = P(T \leq x) = P(e^Z \leq x) = P(Z \leq \ln(x)) = F_Z(\ln(x)).$$
      Ainsi, on a :
      $$F_T : x \mapsto \begin{cases} F_Z(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$
    - **Étape 3 : T est à densité.**
      La fonction F_Z est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car h est continue sur $\mathbb{R}$). Par composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, F_T est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. En particulier, elle est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, où l'on a :
      $$\lim_{x \to 0^-} F_T(x) = 0 = F_T(0)$$
      et
      $$\lim_{x \to 0^+} F_T(x) = \lim_{x \to 0^+} F_Z(\ln(x)) = 0$$
      car $\lim_{x \to -\infty} F_Z(x) = 0$, F_Z étant la fonction de répartition de la variable réelle Z. Ainsi F_T est continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$. $\boxed{T \text{ est donc bien une variable à densité.}}$
    - **Étape 4 : détermination d'une densité de T.**
      Pour tout $x > 0$, on a :
      $$F_T'(x) = \frac{1}{x}F_Z'(\ln(x)) = \frac{1}{x}\frac{2}{\pi}\frac{e^{\ln(x)}}{e^{2\ln(x)}+1} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$
      Une densité de T est donc :
      $$\boxed{f_T : x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.}$$

12. On procède de même qu'à la question précédente.

- **Étape 1 : détermination de l'ensemble image.** Puisque $f_1(x) \neq 0$, on a $Y(\Omega) = \mathbb{R}$, et donc $U(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Pour tout $x < 0$, on a donc $F_U(x) = P(U \leq x) = 0$.
- **Étape 2 : détermination de F_U.**
Pour tout $x \geq 0$, on a :
$$\begin{aligned} F_U(x) &= P(U \leq x) = P(|Y| \leq x) = P(-x \leq Y \leq x) = P(Y \leq x) - P(Y < -x) \\ &= P(Y \leq x) - P(Y \leq x) \quad \text{car } Y \text{ est continue} \\ &= F_Y(x) - F_Y(-x) \end{aligned}$$
Ainsi, on a :
$$F_U : x \mapsto \begin{cases} F_Y(x) - F_Y(-x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$
- **Étape 3 : U est à densité.**
La fonction F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car f_1 est continue sur $\mathbb{R}$). Par composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, F_U est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. En particulier, elle est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, où l'on a :
$$\lim_{x \to 0^-} F_U(x) = 0 = F_U(0) = \lim_{x \to 0^+} F_U(x).$$
Ainsi F_U est continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$. $\boxed{U \text{ est donc une variable à densité.}}$
- **Étape 4 : détermination d'une densité de T.**
Pour tout $x > 0$, on a :
$$F_U'(x) = F_Y'(x) + F_Y'(-x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$
Une densité de U est donc :
$$f_U : x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Puisque f_T et f_U sont égales, $\boxed{U \text{ suit la même loi que } T.}$

13. On simule la variable Y à l'aide de la fonction `simu()`, puis en prenant la valeur absolue la variable U. Comme U et T suivent la même loi, cela correspond à une simulation de la variable T. Puisque $Z = \ln(T)$, on termine en prenant le logarithme. Ce qui donne :

```python
U = np.abs(simu())
Z = np.log(U)
print(Z)
```