DM19

Devoir Maison type Maths 3 facultatif

Exercice 1

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. On se place dans un espace euclidien E de dimension n et on note $\mathscr{B} = (e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_n)$ une base orthonormale de E. Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

Partie 1 : définition de l'adjoint $u^\star$ d'un endomorphisme u de E.

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E.
On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté $u^\star$, qui à tout vecteur y de E associe le vecteur $u^\star(y)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$$

1. (a) Montrer que si $u^\star$ existe, alors on a, pour tout y de E :

$$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i.$$

   (b) En déduire que si $u^\star$ existe, alors $u^\star$ est unique.

2. (a) Vérifier que l'application $u^\star$ définie par l'égalité établie à la question 1.(a) est effectivement un endomorphisme de E.

   (b) Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de E, appelé adjoint de u, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle.$$

Partie 2 : étude des endomorphismes normaux.

On dit que u est un endomorphisme normale quand on a l'égalité :

$$u \circ u^\star = u^\star \circ u.$$

3. Soit f un endomorphisme symétrique de E. Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.

4. (a) Montrer que : $\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|u^\star(x)\|$.

   (b) En déduire que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^\star)$.

5. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par $u^\star$.

6. On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous espace propre associé.

   (a) Montrer que E_λ est stable par $u^\star$.

   (b) Établir que $(u^\star)^\star = u$ puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Exercice 2

Partie I : Étude d'une fonction f définie par une intégrale.

1. Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   On note $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0;+\infty[$, par :
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) \geq \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$
   En déduire que : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$

3. Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ 0 < f(x) \leq \dfrac{1}{x}.$
   En déduire que : $f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0.$

4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et que :
$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   En déduire que : $f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}.$

Partie II : Une autre expression intégrale de f.

A - Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale.

5. Soit $(x,h) \in]0;+\infty[\times\mathbb{R}^*$ tel que $h > -\dfrac{x}{2}$.

   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

   (b) Établir que : $\forall t \in [0;+\infty[,\quad \left| \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+t} - \dfrac{1}{x+t} \right) + \dfrac{1}{(x+t)^2} \right| \leq \dfrac{2|h|}{x^3}.$

   (c) En déduire que : $\left| \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t \right| \leq \dfrac{2|h|}{x^3}.$

6. En déduire que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $\forall x \in]0;+\infty[,\quad f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.$

7. Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$ et tout $(\varepsilon, A) \in]0;1] \times [1;+\infty[$:
$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t}dt.$$

8. En déduire que : $\forall x \in]0;+\infty[,\quad f'(x) = -\dfrac{1}{x} + f(x).$

9. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x \in]0;+\infty[,\quad f''(x) = \dfrac{1}{x^2} + f'(x).$

B - Intervention d'une fonction auxiliaire g.

On note $g :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0;+\infty[$, par : $g(x) = e^{-x}f(x)$.

10. Démontrer que g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $\forall x \in]0;+\infty[,\quad g'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x}.$

11. Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ converge et que :
$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u,$$
puis que : $\quad \forall x \in]0;+\infty[, \quad f(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$

12. Montrer que : $\quad \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.$

13. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$?

Partie III : Étude d'une densité.

On note $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par : $\quad h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(1)}\dfrac{e^{-t}}{1+t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$

14. Montrer que h est une densité.

15. Soit X une variable aléatoire réelle admettant h pour densité.
Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$ à l'aide de $f(1)$.

Exercice 3

Partie I : Un calcul d'intégrales

1. Déterminer pour quelles valeurs du réel α l'intégrale J_α converge, où :
$$J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^\alpha}.$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel α supérieur ou égal à 1, on a :
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\alpha} J_\alpha.$$
En déduire que pour tout réel α supérieur ou égal à 1, on a :
$$J_{\alpha+1} = \frac{2\alpha-1}{2\alpha} J_\alpha.$$

3. Calculer J_1. Pour n entier supérieur ou égal à 1, calculer J_n.

Partie II : Loi de Student à n degrés de liberté

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g_n par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel k_n tel que la fonction $f_n = \dfrac{1}{k_n} g_n$ soit une densité de probabilité.
Exprimer k_n à l'aide de $J_{\frac{n+1}{2}}$ (on pourra à cet effet utiliser le changement de variable $y = \frac{t}{\sqrt{n}}$).

5. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité f_n.
On dit alors que X suit une loi de Student à n degrés de liberté.

   (a) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $n > 1$. Déterminer $E(X)$ dans ce cas.

(b) Montrer que X admet une variance si et seulement si $n > 2$. Exprimer alors $V(X)$ en fonction de k_n, n et $J_{\frac{n+1}{2}}$, puis vérifier que :
$$V(X) = \frac{n}{n-2}.$$

Lorsque $n = 1$, la loi de Student à 1 degré de liberté s'appelle loi de Cauchy, et une densité sur $\mathbb{R}$ est donc :
$$f_1 : t \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}.$$

Partie III : Simulation d'une loi

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un rayon lumineux part de l'origine O et frappe un écran représenté par la droite d'équation $x = 1$, en un point M. On suppose que Θ, mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$, est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On note Y la variable aléatoire égale à l'ordonnée du point M.

6. Rappeler l'expression de la fonction de répartition de la variable Θ.

7. (a) Justifier que $Y = \tan(\Theta)$.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y.
   (c) En déduire que Y est une variable aléatoire à densité, dont on précisera une densité. Reconnaitre la loi de Y.

8. On rappelle qu'en langage `Python`, la fonction `rd.random()` simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$. On considère le programme informatique suivant.

```python
def simu():
      theta = np.pi*rd.random()-np.pi/2
      return np.tan(theta)
```

   Quelle loi de probabilité ce programme permet-il de simuler ? Expliquer.

Partie IV : Simulation d'une autre loi

10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.
    Montrer que h est une densité.
    On pourra utiliser le changement de variable $t = e^x$ après l'avoir justifié.

11. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et Z une variable aléatoire à densité, de densité h. On pose $T = e^Z$.
    Montrer que T est une variable à densité, et déterminer une densité de T.

12. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy, et soit $U = |Y|$.
    Montrer que U est une variable à densité suivant la même loi que T.

13. Écrire une (ou des) commande(s) `Python` utilisant la fonction `simu()` de la partie III et permettant de simuler la variable Z.
