DM2

Devoir maison type parisiennes à rendre le 26/09/2022

On abordera en priorité les parties I et II de ce devoir maison.

Notations et objectifs.

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0\,,\,1]$ et à valeurs réelles.

Sous réserve d'existence, on note $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{n^2 - x^2}$ et $\psi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x}{n^2 - x^2}$.

Le but du problème est d'obtenir, à l'aide des fonctions φ et ψ, des expressions des fonctions sin, $\dfrac{1}{\sin}$ et $\dfrac{\cos}{\sin}$ comme somme de séries ou produit infini (on parle de développements eulériens).

Plus précisément, dans la partie I, on étudie les premières propriétés de la fonction φ ; dans la seconde partie, on introduit et on étudie l'opérateur T défini sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0\,,\,1], \quad [T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

On en déduit une expression de la fonction $\dfrac{\cos}{\sin}$ puis, dans la partie III, de la fonction sinus. Enfin, dans la partie IV, l'étude de la fonction ψ permet d'obtenir une expression de $\dfrac{1}{\sin}$.

Partie I : Étude de la fonction φ.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x qui n'est pas un entier relatif, la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{2x}{n^2 - x^2}$ est convergente.

   Dans la suite, on notera D l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers relatifs.
   La fonction φ est donc définie sur D.

2. Imparité et périodicité de φ :

   (a) Justifier que φ est impaire.

   (b) Vérifier que pour x dans D : $\dfrac{2x}{n^2 - x^2} = \dfrac{1}{n - x} - \dfrac{1}{n + x}$.

   (c) Montrer que pour x dans D : $\varphi(x + 1) = \varphi(x)$.
   La fonction φ est donc périodique de période 1.

3. Continuité de φ :

   (a) Justifier pour x dans l'ensemble $D \cup \{0, 1\}$, l'existence de

   $$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n - x} - \frac{1}{n + x}\right)$$

   (b) Vérifier que : $\forall x \in D, \quad \varphi(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1 - x} + \dfrac{1}{1 + x} - g(x)$.

   (c) Soit h un nombre réel de $\left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$, montrer que :

   $$\forall x \in [0\,,\,1], \quad |g(x + h) - g(x)| \leq C|h|$$

   où $C = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{2}{(n-1)\left(n - \dfrac{3}{2}\right)}$.

   (d) En déduire que g est continue sur $[0\,,\,1]$ puis que φ est continue sur $]0\,,\,1[$.
   La fonction φ est donc continue sur D.

4. Étude de φ en 0 et en 1 :

   (a) Montrer que $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et que : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\varphi(x) - \dfrac{1}{x}\right) = 0$.

   (b) Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.

Partie II : Étude de l'opérateur T.

On rappelle que E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[\,0\,,\,1\,]$ et à valeurs réelles.

T est l'application définie sur E par : $\forall f \in E$, $\forall x \in [\,0\,,\,1\,]$, $[T(f)](x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$.

On note, pour tout entier naturel k, e_k l'élément de E défini par : $\forall x \in [\,0\,,\,1\,]$, $\quad e_k(x) = x^k$ et pour tout entier naturel n, F_n le sous-espace vectoriel de E dont une base est $B_n = (e_k)_{k\in[\![0\,,n]\!]}$.

5. Vérifier que T est un endomorphisme de E.

6. Étude de T sur F_n :

   (a) Vérifier que $\forall f \in F_n, \quad T(f) \in F_n$.
   On note T_n l'endomorphisme de F_n défini par $\forall f \in F_n$, $T_n(f) = T(f)$.

   (b) Déterminer la matrice de T_n dans la base B_n.

   (c) (Cubes) Quelles sont les valeurs propres de T_n ? T_n est-il diagonalisable ?

7. Étude du noyau de l'endomorphisme $(T - 2\,\mathrm{id}_E)$:

   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(T - 2\,\mathrm{id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.
   Soit f un élément de $\mathrm{Ker}\,(T - 2\,\mathrm{id}_E)$. On note $m = \min\limits_{x\in[\,0\,,\,1\,]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x\in[\,0\,,\,1\,]} f(x)$. On fixe x_0 dans $[\,0\,,\,1\,]$ tel que $m = f(x_0)$ et x_1 dans $[\,0\,,\,1\,]$ tel que $M = f(x_1)$.

   (b) Montrer que $f\left(\dfrac{x_0}{2}\right) = m$.

   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = m$.

   (d) En déduire que $m = f(0)$.

   (e) Faire une étude similaire pour M.

   (f) Montrer alors que f est constante.

8. Étude de la fonction cot :
   Pour tout x dans l'ensemble D, on note $\cot(x) = \pi\dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

   (a) Vérifier que cot est définie et continue sur D, qu'elle est impaire et périodique de période 1.

   (b) Montrer que $\cot(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et que $\cot(x) - \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{\pi^2}{3}x$.

   (c) Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.

   (d) Démontrer que, pour tout nombre réel x dans D, on a : $\dfrac{x}{2} \in D$, $\dfrac{x+1}{2} \in D$ et

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\cot(x)$$

9. Calcul de φ :

   (a) Vérifier que, pour tout nombre réel x dans D, $\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right) + \varphi\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x)$.

   (b) Montrer que $\varphi - \cot$ se prolonge par continuité sur $[\,0\,,\,1\,]$.

   (c) Démontrer alors que $\varphi = \cot$.

   Autrement dit : $\forall x \in D, \quad \pi\dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \dfrac{1}{x} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2x}{n^2 - x^2}$.

10. Première application :

(a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - x\cot(x)}{2x^2}$.

Pour tout nombre réel x dans $]\,0\,,\,1\,[$, on pose $\delta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 - x^2} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

(b) Vérifier que $\left|\delta(x) - \dfrac{x^2}{1-x^2}\right| \leq x^2 \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2(n^2-1)}$.

(c) En déduire que $\lim\limits_{x \to 0} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 - x^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

(d) Déterminer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Partie III : Développement eulérien de la fonction sinus.

Pour tout n entier naturel non nul et tout nombre réel x dans $[\,0\,,\,1\,[$, on pose $\alpha_n(x) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)$ et $\beta_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k(x)$.

11. Montrer que, pour tout nombre réel x dans $[\,0\,,\,1\,[$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \alpha_n(x)$ converge. On note alors $\beta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x)$.

12. Explicitation de β : on fixe un nombre réel x dans $]\,0\,,\,1\,[$.

    (a) Pout N entier naturel non nul, calculer $\displaystyle\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{-2t}{n^2-t^2}\right) dt$ en fonction de $\beta_N(x)$.

    (b) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt$.

    (c) Montrer que $\displaystyle\left|\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt - \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{-2t}{n^2-t^2}\right) dt\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

    (d) En déduire que : $\displaystyle\beta(x) = \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt$.

    (e) Montrer alors que, pour tout nombre réel x dans $]\,0\,,\,1\,[$, $\beta(x) = \ln\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$.

13. Pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel non nul n, on pose $P_n(x) = \pi x \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{x^2}{k^2}\right)$.

    (a) Montrer que, pour tout nombre réel x de $[\,0\,,\,1\,[$, la suite $(P_n(x))_{n\geq 1}$ est convergente.

Dans la suite, on pose $P(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x)$ et on note : $P(x) = \pi x \prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)$.

    (b) Vérifier que, pour tout nombre réel x de $[\,0\,,\,1\,[$, $P(x) = \pi x \exp(\beta(x)) = \sin(\pi x)$.

    (c) Montrer que la suite $(P_n(x))_{n\geq 1}$ est en fait convergente pour tout nombre réel x. On note encore $P(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x)$.

    (d) Soient n un entier naturel non nul et x un nombre réel dans $]-n, n[$, montrer que $P_n(x+1) = -\left(\dfrac{n+1+x}{n-x}\right) P_n(x)$.

    (e) En déduire que, pour tout nombre réel x : $P(x+1) = -P(x)$. Vérifier alors que P est 2-périodique sur $\mathbb{R}$.

    (f) Montrer alors que, pour tout nombre réel x, $P(x) = \sin(\pi x)$.

Finalement, on obtient ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi x) = \pi x \prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)$.

Partie IV : Un autre développement du sinus.

Dans cette partie, pour tout entier naturel non nul n et pour tout nombre réel x dans $D \cup \{0\}$, on pose $\lambda_n(x) = \int_0^{\pi} \cos(xt)\cos(nt)dt$ et $\nu_n(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{x}{n^2 - x^2}$.

14. Montrer que pour tout nombre réel x dans $D \cup \{0\}$, la série de terme général $\nu_n(x)$ est convergente. La fonction ψ est donc définie sur $D \cup \{0\}$.

15. Montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout nombre réel x dans $D \cup \{0\}$, $\lambda_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1} x \sin(\pi x)}{n^2 - x^2} = \sin(\pi x)\nu_n(x)$. Pour cela, on pourra utiliser sans la démontrer la formule trigonométrique $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

16. Pour tout nombre réel t et tout entier naturel non nul n, on pose $C_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(kt)$.

    (a) Vérifier que lorsque t n'est pas de la forme $2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, $C_n(t) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin\left((2n+1)\dfrac{t}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}$.

    (b) Expliciter $C_n(t)$ lorsque t s'écrit $2p\pi$ avec p dans $\mathbb{Z}$.

    (c) Donner la valeur de $I_n = \int_0^{\pi} C_n(t)dt$.

17. Soit F une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\int_0^{\pi} F(t) \sin\left((2n+1)\dfrac{t}{2}\right) dt \right) = 0$.

18. Pour x élément de D, on définit la fonction Φ_x sur $[0, \pi]$ par:
$$\Phi_x(t) = \begin{cases} \dfrac{\cos(xt) - 1}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

    (a) Montrer que Φ_x est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

    (b) Vérifier que :
    $\forall t \in [0, \pi],\ C_n(t)(\cos(xt) - 1) = -\dfrac{1}{2}(\cos(xt) - 1) + \dfrac{1}{2}\Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\dfrac{t}{2}\right)$.

    (c) En déduire que :
    $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in D,\ \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(\pi x)}{x} + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\dfrac{t}{2}\right) dt + I_n$.

19. Application.

    (a) Démontrer, à l'aide des questions précédentes que, pour tout x élément de D, $\psi(x)\sin(\pi x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(\pi x)}{x} + \dfrac{\pi}{2}$.

    (b) En déduire que, pour tout x élément de D, $\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)} = \dfrac{1}{x} + 2x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2 - x^2}$.
