DM3

Correction du devoir maison

Exercice 1

1. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Montrons que F_i est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$:

   - Le polynôme nulle $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ appartient bien à F_i puisque $P(j) = 0$ pour tout $j \in [\![0, n]\!]$ distinct de i.
   - Soit $P, Q \in F_i$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a pour tout $j \in [\![0, n]\!]$ distinct de i :

   $$(\lambda P + \mu Q)(j) = \lambda \underbrace{P(j)}_{=0 \text{ car } P \in F_i} + \mu \underbrace{Q(j)}_{=0 \text{ car } P \in F_i} = 0.$$

   Donc $\lambda P + \mu Q$ appartient bien à F_i.

   Ainsi $\boxed{F_i \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_n[X].}$

2. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On a :

   $$\begin{aligned} P \in F_i &\Leftrightarrow \forall j \neq [\![0, n]\!] \setminus \{i\}, \quad P(j) = 0 \\ &\Leftrightarrow L_i = \prod_{j \neq i} (X - j) = (X - 0) \dots (X - (i-1))(X - (i+1)) \dots (X - n) \text{ divise } P \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X],\ P = Q \times L_i \underset{\deg(P) \leq n \text{ et } \deg(L_i) = n}{\Leftrightarrow} \boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R},\ P = \lambda L_i} \end{aligned}$$

   On a ainsi montré que $F_i = \text{Vect}(L_i)$. En particulier, F_i est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus (L_i) est une famille génératrice de F_i formée de 1 vecteur non nul. Elle est donc libre, et forme une base de F_i qui est donc de dimension 1.

   > **Déjà vu ?**
   > On reconnait ici la famille $(L_0, \dots, L_n)$ des polynômes de Lagrange associés aux entiers $0, 1, \dots, n$, à ceci près qu'ils n'ont pas été normalisé. Ils vérifient donc ici pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:
   > $$L_i(j) = 0 \text{ si } j \neq i \text{ et } L_i(i) \neq 0.$$

3. Pour tout $0 \leq i \leq n$, on a montré que $\mathscr{B}_i = (L_i)$ est une base de F_i. Pour montrer que les sous-espaces $F_0, \dots, F_n$ sont en somme direct, il nous suffit de montrer que la famille $\mathscr{B} = (L_0, \dots, L_n)$ est libre. Soient pour cela $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que :

   $$\alpha_0 L_0 + \dots + \alpha_n L_n = 0. \qquad (*)$$

   Montrons que $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0$. Pour cela, prenons $i \in [\![0, n]\!]$ et $X = i$ dans $(*)$. On obtient :

   $$\underbrace{\alpha_0 L_0(i) + \dots + \alpha_{i-1} L_{i-1}(i)}_{=0} + \alpha_i \underbrace{L_i(i)}_{\neq 0} + \underbrace{\alpha_{i+1} L_{i+1}(i) + \dots + \alpha_n L_n(i)}_{=0} = 0.$$

   D'où $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, et le fait que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est libre. On peut donc conclure que $\boxed{\text{la somme } \sum_{i=0}^{n} F_i \text{ est directe.}}$

4. $\bigoplus_{i=0}^{n} F_i$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, de dimension $\text{Card}(\mathscr{B}) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$.

   Ainsi, on a $\boxed{\mathbb{R}_n[X] = \bigoplus_{i=0}^{n} F_i.}$

Exercice 2 (Ecricome 2008)

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. (a) Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et la série de terme général $f_n(0)$ converge. Supposons $x \in \mathbb{R}_+^*$ à présent. On a :
   - $\forall n \geq 1,\ f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{x}{n(n+x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$.
   - $\dfrac{1}{n^2} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.
   - $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc convergente.

   Par théorème de comparaison, $\boxed{\text{la série de terme général } f_n(x) \text{ est convergente.}}$

   (b) On a $F(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{f_n(0)}_{=0} \boxed{= 0}$. Pour tout $N \geq 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(1) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

   Ainsi $\boxed{F(1) \text{ est égal à } 1.}$

2. Soit $n \geq 1$. La fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ comme composée et quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, on a pour tout $x \geq 0$:

$$0 \leq f_n'(x) = \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

   $\sum \dfrac{1}{n^2}$ étant convergente en tant que série de Riemann d'exposant $2 > 1$, on en déduit par théorème de comparaison que $\boxed{\sum_{n\geq 1} f_n'(x) \text{ converge, et ceci pour tout } x \geq 0.}$

3. (a) La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[n, +\infty[$, et on a pour tout $t \in [n, +\infty[$:

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} \text{ et } \varphi''(t) = \frac{2}{t^3}.$$

   En particulier, on a pour tout $t \in [n, +\infty[$:

$$|\varphi''(t)| \leq \frac{2}{n^3} =: M.$$

   Par l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, on a donc que pour tout $(x, x_0) \in [n, +\infty[^2$:

$$\boxed{|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq \frac{M}{2!}(x - x_0)^2 = \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.}$$

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned}
|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| &= |\varphi(n) - \varphi(n+x+h) - \varphi(n) + \varphi(n+x) + h\varphi(n+x)| \\
&= |\varphi(n+x+h) - \varphi(n+x) - h\varphi(n+x)| \\
&\leq \frac{((n+x+h) - (n+x))^2}{n^3} = \frac{h^2}{n^3}
\end{aligned}$$

   en appliquant l'inégalité démontrée à la question précédente (possible car $n+x$ et $n+x+h$ appartiennent à $[n, +\infty[$). Puisque $\sum \dfrac{1}{n^3}$ est une série de Riemann d'exposant $3 > 1$, elle converge. Par théorème de comparaison, $\boxed{\text{la série } \sum |f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| \text{ converge.}}$

(c) On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x+h \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x) &= \frac{1}{h}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x+h) - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) - h\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)\right)\\ &= \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(f_n(x+h)-f_n(x)-hf_n'(x)\right)\end{aligned}$$

D'après la question précédente, la série de terme général $f_n(x+h)-f_n(x)-hf_n'(x)$ converge absolument, et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f_n(x+h)-f_n(x)-hf_n'(x)| \leq \frac{h^2}{n^3}.$$

Par inégalité triangulaire, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| &\leq \left|\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(f_n(x+h)-f_n(x)-hf_n'(x)\right)\right|\\ &\leq \frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(x+h)-f_n(x)-hf_n'(x)|\\ &\leq \frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{h^2}{n^3} = |h|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.\end{aligned}$$

En posant $K = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$, on a donc bien que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x+h \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| \leq K|h|.}$$

(d) Puisque $\lim_{h\to 0} K|h| = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \text{ existe et vaut } G(x).$$

Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\boxed{F \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et que } F' = G.}$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ **fixé**.

(a) La fonction $\varphi_x : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} = \frac{x}{t(t+x)}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, de sorte que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \varphi_x(k+1) \leq \varphi_x(t) \leq \varphi_x(k).$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient en intégrant ces inégalités entre k et $k+1$ que :

$$\varphi_x(k+1) = \int_k^{k+1}\varphi_x(k+1)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1}\varphi_x(k)\,\mathrm{d}t = \varphi_x(k).$$

En notant que $\varphi_x(k+1) = f_{k+1}(x)$ et $\varphi_x(k) = f_k(x)$, on obtient l'inégalité souhaitée :

$$\boxed{f_{k+1}(x) \leq \int_k^{k+1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)\,\mathrm{d}t \leq f_k(x).}$$

(b) Soit $n \geq 2$. Sommons ces inégalités pour $k = 1, \ldots, n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1}(x) \leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x).$$

D'où par changement d'indice et relation de Chasles :

$$\sum_{k=2}^{n} f_k(x) \leq \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x).$$

On a donc, d'une part, que :

$$\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) \leq \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) + \underbrace{f_n(x)}_{\geq 0} = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Et d'autre part :

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + \sum_{k=2}^{n} f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t.$$

D'où les inégalités suivantes pour tout $n \geq 2$:

$$\boxed{\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t.}$$

(c) On a :

$$\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t = [\ln(t) - \ln(t+x)]_1^n = \ln(n) - \ln(n+x) - \ln(1) + \ln(1+x) = \ln\left(\frac{n}{n+x}\right) + \ln(1+x).$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n+x} = 1$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\dfrac{n}{n+x}\right) = 0$ (par continuité de la fonction logarithme). En passant à la limite dans l'inégalité obtenue à la question précédente, on obtient donc (puisque tout converge dans ces inégalités) :

$$\boxed{\ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).}$$

(d) Pour tout $x > 0$, on a $\ln(1+x) > 0$. D'où en divisant les inégalités précédentes par $\ln(1+x)$:

$$1 \leq \frac{F(x)}{\ln(1+x)} \leq 1 + \frac{x}{(x+1)\ln(1+x)}$$

On a $\dfrac{x}{(x+1)\ln(1+x)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(1+x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{\ln(1+x)}$ existe et vaut 1, ce qui s'écrit aussi :

$$\boxed{F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(1+x).}$$

Pour aller plus loin.

On a :

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi, on a plus simplement $F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(x)$.