DM3

Devoir maison à rendre le 03/10/2022

Exercice 1

Soit $n \geq 1$ fixé. Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on pose $F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \; : \; \forall j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}, \; P(j) = 0\}$.

1. Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P \in F_i$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (X-j)$.

   En déduire une base de chacun des F_i.
3. Montrer que la somme $F_0 + F_1 + \cdots + F_n$ est directe.
4. En déduire que $\mathbb{R}_n[X] = \displaystyle\bigoplus_{i=0}^{n} F_i$.

Exercice 2

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.

   (b) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.
2. Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n'(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.
3. **Étude de la dérivabilité de F.**

   (a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $(x, x_0) \in [n, +\infty[^2$, on a :
   $$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x-x_0)\varphi'(x_0)| \leq \frac{(x-x_0)^2}{n^3}.$$

   (b) En déduire, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x+h \in \mathbb{R}_+$, la nature de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$.

   (c) Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x+h \in \mathbb{R}_+$, on ait :
   $$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq K|h|.$$

   (d) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $F' = G$.
4. **Recherche d'un équivalent en $+\infty$.**

   Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

   (a) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$f_{k+1}(x) \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \mathrm{d}t \leq f_k(x).$$

(b) En déduire que, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t.$$

(c) En déduire que :

$$\ln(1+x) \leq F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).$$

(d) Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
