DM4

Correction du devoir maison

Exercice 1 (Edhec 2016)

1. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f \circ (f - \mathrm{Id})^2 = 0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

   (a) On a :

$$(f - \mathrm{Id})^2 + f \circ (2\mathrm{Id} - f) = f^2 - 2f + \mathrm{Id} + 2f - f^2 \boxed{= \mathrm{Id}}$$

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a donc :

$$\boxed{x = (f - \mathrm{Id})^2(x) + (f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x).}$$

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$f((f - \mathrm{Id})^2(x)) = \underbrace{f \circ (f - \mathrm{Id})^2}_{=0_{\mathscr{L}(E)}}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

   par hypothèse. Donc $(f - \mathrm{Id})^2(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$.

   D'autre part, on a :

$$(f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x) = f((2\mathrm{Id} - f)(x)) \in \mathrm{Im}(f).$$

   Ainsi d'après la question précédente, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x = \underbrace{(f - \mathrm{Id})^2(x)}_{\in \mathrm{Ker}(f)} + \underbrace{(f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x)}_{\in \Im(f)} \in \mathrm{Ker}(f) + \Im(f).$$

   Donc $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) + \Im(f)$. Comme de plus on a $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \Im(f)$ par le théorème du rang, on peut donc conclure que :

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).}$$

2. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que : $f \circ (f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id}) = 0$.

   (a) Posons $P = aX + b$. On substitue dans l'expression :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(X^2 - 5X + 4) + aX^2 + bX = 1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} + a = 0 & \text{terme en } X^2 \\ -\frac{5}{4} + b = 0 & \text{terme en } X \\ 1 = 1 & \text{terme constant} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{5}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

   Ainsi le polynôme P recherché existe bien et vaut $\boxed{P = \frac{5 - X}{4}}$.

   (b) On obtient donc :

$$\frac{1}{4}(f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id}) + f \circ P(f) = \mathrm{Id}.$$

   Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$x = \frac{1}{4}(f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id})(x) + f \circ P(f)(x)$$

   Or on a :

- $f \circ P(f)(x) = f(P(f)(x))$ appartient à $\Im(f)$;
- $f((f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id})(x)) = \underbrace{f \circ (f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id})}_{=0_{\mathscr{L}(E)}}(x) = 0$ donc $\dfrac{1}{4}(f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id})(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$.

Ainsi, de même que précédemment, on obtient que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) + \Im(f)$. Comme de plus $\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \Im(f)$ par le théorème du rang, on en déduit que :

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).}$$

3. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f, dont le degré est égal à p (avec $p \geq 2$), et tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

(a) P est de degré p, donc il existe $a_0, a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p.$$

De plus on a $0 = P(0) = a_0$ et $a_1 = P'(0) \neq 0$. D'où le résultat.

(b) Soit $y \in \mathrm{Ker}(f) \cap \Im(f)$. Puisque $y \in \Im(f)$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$. On a alors :

$$0_{\mathbb{R}^n} = f(y) = f^2(x)$$

On en déduit alors que $f^k(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $k \geq 2$.

P est annulateur par hypothèse, donc on a :

$$a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_p f^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}.$$

On évalue en x :

$$a_1 f(x) + \underbrace{a_2 f^2(x) + \cdots + a_p f^p(x)}_{=0_{\mathbb{R}^n}} = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Et donc on a $a_1 y = 0_{\mathbb{R}^n}$. Puisqu'enfin $a_1 \neq 0$, on en déduit que $y = 0_{\mathbb{R}^n}$. On peut donc conclure que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0\}$. L'autre inclusion étant immédiate puisque $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel, on peut donc conclure que $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}}$.

Enfin, par le théorème du rang, on a $\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \Im(f)$. On obtient donc que :

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).}$$

(c) Cette question généralise les deux précédentes car :

- Dans la question 1, le polynôme annulateur est $P = X(X-1)^2$.
- Dans la question 2, le polynôme annulateur est $P = X(X-1)(X-4)$.

Dans les deux cas, P satisfait $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. On est donc bien dans la situation de la question 3. En particulier, le résultat de la question 3 implique les résultats des questions 1 et 2.

Exercice 2 (EML 2019)

1. Pour toute fonction polynomiale P de $\mathbb{R}_n[x]$, $\Psi_a(P) = 2P + (x-a)P'$ est une fonction polynomiale. De plus si $\deg(P) \leq n$, on a $\deg(P') \leq n-1$ et $\deg((X-a)P') \leq n-1+1 = n$. Par somme, on a $\deg(P + (x-a)P') \leq n$, et donc $\Psi_a(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\Psi_a(\lambda P + \mu Q) &= 2(\lambda P + \mu Q) + (x-a)(\lambda P + \mu Q)' \\
&= 2\lambda P + 2\mu Q + (x-a)(\alpha A' + P') \text{ par linéarité de la dérivation} \\
&= \lambda\left(2P + (x-a)P'\right) + \mu\left(2Q + (x-a)Q'\right) = \lambda \Psi(P) + \mu \Psi(Q)
\end{aligned}$$

Donc Ψ_a est linéaire.

$\boxed{\Psi_a \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[x].}$

2. On calcule $\Psi_a(1) = 2 \times 1 + 0 = 2$, et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\Psi_a(x^k) = 2x^k + (x-a)kx^{k-1} = (2+k)x^k - akx^{k-1}.$$

On obtient :

$$\boxed{M_{\mathscr{B}}(\Psi_a) = \begin{pmatrix} 2 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & -2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & -na \\ 0 & \dots & & 0 & n+2 \end{pmatrix}}.$$

3. Ψ_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$, et est bijectif car sa matrice $M_{\mathscr{B}}(\Psi_a)$ est inversible (elle est triangulaire supérieure sans 0 sur la diagonale). $\boxed{\Psi_a \text{ est donc un automorphisme de } \mathbb{R}_n[x].}$

4. (a) La famille $\mathscr{C}$ est libre car formée de polynômes de degrés deux à deux distincts, et de cardinale $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[x])$. $\boxed{\mathscr{C} \text{ est donc une base de } \mathbb{R}_n[x].}$

   (b) On a $\Psi_a(Q_0) = 2 = 2Q_0$, et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

   $$\Psi_a(Q_k) = 2Q_k(X) + (X-a)\big(k(X-a)^{k-1}\big) = (2+k)Q_k.$$

   Ainsi $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0, n]\!], \Psi_a(Q_k) = (2+k)Q_k.}$

   (c) Avec les calculs effectués à la question précédente, on obtient :

   $$\boxed{M_{\mathscr{C}}(\Psi_a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & n+2 \end{pmatrix}}.$$

5. (a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on a :

   $$\big((x-a)^2P(x)\big)' = 2(x-a)P + (x-a)^2P' = (x-a)\big(2P + (x-a)^2P'\big) \boxed{= (x-a)\Psi_a(P).}$$

   (b) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ et pour tout réel $x \neq a$, on a :

   $$\Phi_a(\Psi_a(P))(x) = \frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x (t-a)\Psi_a(P)(t)\mathrm{d}t.$$

   L'intégrale existe car on intègre une fonction continue sur un segment. De plus $t \mapsto (t-a)\Psi_a(P)(t)$ a pour primitive $t \mapsto (t-a)^2P(t)$ d'après ce qui précède, d'où :

   $$\Phi_a(\Psi_a(P))(x) = \frac{1}{(x-a)^2}\Big[(t-a)^2P(t)\Big]_a^x = \frac{1}{(x-a)^2}(x-a)^2P(x) = P(x).$$

   Il reste le cas $x = a$, pour lequel on a :

   $$\Phi_a(\Psi_a(P))(a) = \frac{\Psi_a(P)(a)}{2} = \frac{2P(a) + (a-a)P'(a)}{2} = P(a).$$

   Ainsi $\boxed{\text{pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X] : \quad \Phi_a(\Psi_a(P)) = P.}$

   (c) Notons tout d'abord que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x], \Phi_a(P)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. En effet, $t \mapsto (t-a)P(t)$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$, et on peut bien l'intégrer sur le segment $[a, x]$ pour tout réel $x \neq a$.

D'autre part, on sait que Ψ_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$, elle admet donc une bijection réciproque Ψ_a^{-1} qui est elle-même un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Avec la question précédente, on a pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$:

$$\Phi_a(P) = \Phi_a\left(\Psi_a\left(\Psi_a^{-1}(P)\right)\right) = \Psi_a^{-1}(P).$$

Ainsi on a $\Phi_a = \Psi_a^{-1}$. En particulier, Φ_a est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}_n[x]$.

On peut donc conclure que $\boxed{\Phi_a \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[x] \text{ et que } \Phi_a^{-1} = (\Psi_a^{-1})^{-1} = \Psi_a.}$

(d) On a :

$$M_{\mathscr{C}}(\Phi_a) = M_{\mathscr{C}}(\Psi_a^{-1}) \boxed{= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1/(n+2) \end{pmatrix}}.$$

Problème (Edhec 2007)

Partie 1

1. (a) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet $(U, \bar{U})$, on a :

$$P(X=1) = P(\bar{B}_1) = P(U)P_U(\bar{B}_1) + P(\bar{U})P_{\bar{U}}(\bar{B}_1) = \frac{1}{2} \times \frac{n-1}{n} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2}.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'événement $(X = k)$ est réalisé si et seulement si les $k-1$ premiers tirages amènent une boule blanche et le $k^{\text{ème}}$ amène une noire. Donc on a

$$\boxed{(X=k) = B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k.}$$

Alors, toujours avec la formule des probabilités totales, on a

$$P(X=k) = \frac{1}{2}P_U(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k) + \frac{1}{2}P_{\bar{U}}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k)$$

Or, la famille d'événements $(B_i)_{i \geq 1}$ est mutuellement indépendante pour la probabilité P_U et pour la probabilité $P_{\bar{U}}$ car les tirages se font avec remise dans la même urne une fois le premier tirage effectué. On obtient donc

$$P(X=k) = \frac{1}{2}\left[P_U(B_1)\dots P_U(B_{k-1})P_U(\bar{B}_k) + P_{\bar{U}}(B_1)\dots P_{\bar{U}}(B_{k-1})P_{\bar{U}}(\bar{B}_k)\right]$$

Comme $P_U(B_i) = \frac{1}{n}$ et $P_{\bar{U}}(B_i) = \frac{n-1}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$, on obtient

$$\boxed{P(X=k) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right]}$$

Pour $k = 1$, le membre de gauche vaut $\frac{1}{2}$ et le menbre de droite vaut $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^0 \frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^0 \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{2} \times 1$. Donc la formule est encore vraie pour $k = 1$.

2. Les séries $\displaystyle\sum_{k \geq 1} k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}$ et $\displaystyle\sum_{k \geq 1} k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$ sont des séries géométriques dérivées. Comme $\frac{1}{n}$ et $\frac{n-1}{n}$ sont dans $]0,1[$ alors ces séries convergent absolument ce qui prouve que la série $\displaystyle\sum_{k \geq 1} kP(X=k)$ converge absolument et assure l'existence de l'espérance. De plus, on a

$$E(X) = \frac{1}{2}\left[\frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{n-1}{n} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2}\right]$$

Conclusion. $\boxed{X \text{ admet une espérance et } E(X) = \dfrac{n^2}{2(n-1)}}$.

3. En raisonnant comme à la question 1, on a:

$$P(Y=1) = P(B_1) = P(U)P_U(B_1) + P(\bar{U})P_{\bar{U}}(B_1) = \cdots = \frac{1}{2} = P(X=1)$$

$$P(Y=k) = P(\bar{B}_1 \cap \cdots \cap \bar{B}_{k-1} \cap B_k) = \cdots = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right] = P(X=k)$$

puisque $P_U(\bar{B}_i) = P_{\bar{U}}(B_i)$ pour tout entier $i \geq 1$. Donc X et Y suivent la même loi.

4. Rappelons tout d'abord que la commande `rd.randint(a,b)` renvoie une réalisation de la loi uniforme discrète sur $[\![a, b-1]\!]$.

La variable `hasard` contient le choix de l'urne. La suite nous indique que si `hasard==0`, alors les tirages se font dans l'urne V. En effet, il y a $n-1$ boules blanches dans l'urne V et une boule noire. Donc on tire une boule noire avec probabilité $\frac{1}{n}$ et des boules blanches avec probabilité $\frac{n-1}{n}$. On représente cela en considérant que les boules blanches sont numérotées de 2 à n, et la boule noire est numérotée 1. Tant que `rd.randint(1,n+1)>1`, on obtient donc des boules blanches et on continue à faire des tirages en affectant $x = x+1$ à chaque tirage supplémentaire (la variable x compte le nombre de tirages effectués).

Si on fait les tirages dans l'urne U (cas considéré dans `else`), on a donc une boule blanche qu'on numérote 1, et $n-1$ boules noires qu'on numérotera de 2 à n. Tant qu'on obtient la boule blanche, c'est à dire tant que `rd.randint(1,n+1)<2`, alors on continue à faire des tirages, et on remplace alors x par $x+1$. On obtient donc le programme suivant.

```
import numpy.random as rd

def cb(n):
        hasard = rd.randint(0,2)
        x=1
        if hasard == 0 :
                while rd.randint(1,n+1)>1:
                        x=x+1
        else :
                while rd.randint(1,n+1)<2
                        x=x+1
    return x
```

Partie 2

1. (a) La situation est la même qu'à la première partie concernant le choix initial de l'urne et le premier tirage. Donc on a $\boxed{P(X=1) = \frac{1}{2}}$.

   (b) Soit $k \geq 2$. On a encore

$$P(X=k) = \frac{1}{2}P_U(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k) + \frac{1}{2}P_{\bar{U}}(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k)$$

Cette fois-ci, il n'y a plus, *a priori*, indépendance mutuelle des B_i pour P_U. On a par formule des probabilités composées

$$P_U(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k) = P_U(B_1)P_{U\cap B_1}(B_2)\ldots P_{U\cap B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(\bar{B}_k)$$

Comme tout les tirages s'effectuent dans U (blanche à chaque tirage sauf à la fin mais on s'arrête), on obtient

$$P_U(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k) = \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \frac{n-1}{n}$$

De même, *a priori*, il n'y a plus indépendance mutuelle pour $P_{\bar{U}}$. On a

$$P_{\bar{U}}(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k) = P_{\bar{U}}(B_1) P_{\bar{U} \cap B_1}(B_2) \dots P_{\bar{U} \cap B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(\bar{B}_k)$$

Ici, seul le premier tirage est effectué dans V, tous les suivants le sont dans U. Donc on a

$$P_{\bar{U}}(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k) = \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \frac{n-1}{n}$$

On en déduit que $\boxed{\forall k \geq 2,\ P(X=k) = \frac{1}{2}\frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}}$.

2. On a encore affaire à une série géométrique dérivée puisque

$$\forall k \geq 2,\ kP(X=k) = k\frac{1}{2}\frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} = \frac{n-1}{2} k \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}$$

d'où la convergence absolue et donc l'existence de l'espérance. Pour le calcul, il faut faire attention au terme pour $k=1$.

$$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} - 1 \right) = \frac{n-1}{2} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{2-n}{2} = \frac{3n-2}{2(n-1)}$$

Conclusion. $\boxed{X \text{ admet une espérance et } E(X) = \frac{3n-2}{2(n-1)}}$.

3. On a encore $P(Y=1) = \frac{1}{2} = P(X=1)$. Soit $k \geq 2$. Alors on a

$$P(Y=k) = \frac{1}{2}\left[P_U(\bar{B}_1) P_{U \cap \bar{B}_1}(\bar{B}_2) \dots P_{U \cap \bar{B}_1 \cap \cdots \cap \bar{B}_{k-1}}(B_k) + P_{\bar{U}}(\bar{B}_1) P_{\bar{U} \cap \bar{B}_1}(\bar{B}_2) \dots P_{\bar{U} \cap \bar{B}_1 \cap \cdots \cap \bar{B}_{k-1}}(B_k)\right]$$

Concernant le premier terme, tous les tirages s'effectuent dans V sauf le premier. Pour le second terme, tous les tirages s'effectuent dans V. Ainsi on a

$$P(Y=k) = \frac{1}{2}\left[\frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\frac{n-1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n}\right] = P(X=k)$$

Donc X et Y suivent la même loi.

4. Dans cette situation, on choisit au hasard une des deux urnes. On teste ensuite dans quelle urne on est :

   - si `hasard==0`, alors on effectue le premier tirage dans l'urne V (contenant une boule noire et $n-1$ boules blanches). Si on obtient une boule noire, on s'arrête. Sinon, si on obtient une boule blanche, c'est-à-dire si `rd.randint(1,n+1)>1`, alors on poursuit les tirages dans l'urne U. Tant qu'on obtient des boules blanches dans U, c'est-à-dire tant que `rd.randint(1,n+1)<2`, alors on continue nos tirage. On s'arrête dès qu'on obtient une boule noire.
   - si `hasard == 1`, alors on effectue tous les tirages dans l'urne U (contenant une boule blanche et $n-1$ boules noires). Tant qu'on obtient des boules blanches, c'est à dire tant que `rd.randint(1,n+1)<2`, on poursuit les tirages dans l'urne U.

```
def cb2(n) :
        hasard = rd.randint(0,2)
        y=1
        if hasard == 0 :
                if rd.randint(1,n+1)>1 :
                        y=y+1
                        while rd.randint(1,n+1)<2 :
                                y=y+1
        else :
                while rd.randint(1,n+1)<2 :
                        y=y+1
        return y
```

Partie 3

1. (a) On a encore $\boxed{P(X=1)=\frac{1}{2}}$ puisque le protocole de tirage de la première boule ne change pas.

   (b) Soit $k \geq 2$. On a toujours

$$P(X=k)=\frac{1}{2}\left[P_U(B_1)P_{U\cap B_1}(B_2)\dots P_{U\cap B_1\cap\dots\cap B_{k-1}}(\bar{B}_k)+P_{\bar{U}}(B_1)P_{\bar{U}\cap B_1}(B_2)\dots P_{\bar{U}\cap B_1\cap\dots\cap B_{k-1}}(\bar{B}_k)\right]$$

Concernant le premier terme, tous les tirages s'effectuent dans U. Pour le second, tous les tirages s'effectuent dans V (comme dans la situation de la partie 1). Ainsi on obtient

$$\boxed{P(X=k)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right]=\frac{(n-1)^{k-1}+n-1}{2n^k}}$$

et, évidemment, la formule est encore vraie pour $k=1$.

   (c) Comme la loi de X est la même que celle de la partie 1, alors

$$\boxed{X \text{ admet une espérance et } E(X)=\frac{n^2}{2(n-1)}}.$$

2. (a) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a

$$P(Y=2i)=\frac{1}{2}\left[P_U(\bar{B}_1)P_{U\cap\bar{B}_1}(\bar{B}_2)\dots P_{U\cap\bar{B}_1\cap\dots\cap\bar{B}_{2i-1}}(B_{2i})+P_{\bar{U}}(\bar{B}_1)P_{\bar{U}\cap\bar{B}_1}(\bar{B}_2)\dots P_{\bar{U}\cap\bar{B}_1\cap\dots\cap\bar{B}_{2i-1}}(B_{2i})\right]$$

Dans chacun des deux termes, il y a alternance des tirages dans U et dans V. Comme le nombre de tirage est pair, il y a autant de tirages dans U que dans V. Il ne reste plus qu'à faire attention aux couleurs, ce qui donne

$$P(Y=2i)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{i-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i+1}+\left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}\right]$$

Par factorisation et réduction, on en conclut que $\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(Y=2i)=\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\frac{n^2-2n+2}{2n^2}}$.

   (b) Le principe est le même sauf qu'il y a un nombre impair de tirages donc un tirage de plus dans U (resp. V) que dans V (resp. U) pour le premier (resp. second) terme. Par factorisation et réduction, on en conclut que $\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(Y=2i+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i}$.

Pour $i=0$, on a $P(Y=2\times 0+1)=\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^0=\frac{1}{2}$. Ainsi la formule est encore valable pour $i=0$.

(c) On pose: $E_{2m}(Y) = \sum_{k=1}^{2m} kP(Y=k)$ et $E_{2m+1}(Y) = \sum_{k=1}^{2m+1} kP(Y=k)$.

i. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En scindant la première somme, on obtient

$$\begin{aligned} E_{2m}(Y) &= \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1)P(Y=2k+1) + \sum_{k=1}^{m} 2kP(Y=2k) \\ &= \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\frac{n-1}{n^2}\sum_{k=\cancel{0}1}^{m-1} k\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{k-1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{k} + \cancel{2}\frac{n^2-2n+2}{\cancel{2}n^2}\sum_{k=1}^{m} k\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{k-1} \\ &\xrightarrow[m\to+\infty]{} \frac{n-1}{n^2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{n-1}{n^2}\right)^2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{n-1}{n^2}\right)^2} + \frac{n^2-2n+2}{n^2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{n-1}{n^2}\right)^2} \end{aligned}$$

puisqu'on ce sont des séries convergentes. Donc $\boxed{\lim_{m\to+\infty} E_{2m}(Y) = \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}}$.

ii. En procédant de même on a $E_{2m+1}(Y) = \sum_{k=0}^{m} (2k+1)P(Y=2k+1) + \sum_{k=1}^{m} 2kP(Y=2k)$.

Un calcul identique assure que $\boxed{\lim_{m\to+\infty} E_{2m+1}(Y) = \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}}$.

iii. Les suites $(E_{2m}(Y))_{m\geq 1}$ et $(E_{2m+1}(Y))_{m\geq 1}$ sont les suites extraites des rangs pairs et impairs de la suite des sommes partielles de la série définissant l'espérance éventuelle. Comme ces deux suites convergent et ont la même limite alors la suite des sommes partielles converge vers cette limite, d'où la convergence de la série. Comme la série est à termes positifs alors la convergence est aussi absolue.

Conclusion. $\boxed{Y \text{ admet une espérance et } E(Y) = \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}}$.

3. (a) Pour $n=2$, on a immédiatement

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(Y=2i) = \left(\frac{1}{4}\right)^{i} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \qquad \text{et} \qquad \forall i \in \mathbb{N},\ P(Y=2i+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{i} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+1}$$

donc X et Y suivent la même loi $\mathscr{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

(b) Dans le cas $n=2$, la composition des deux urnes est identique donc passer d'une urne à l'autre ne change rien en termes de probabilités : les événements B_i redeviennent mutuellement indépendants. De plus, le nombre total de boules blanches est le même que le nombre total de boules noires (dans chaque urne) et on mesure « le temps d'attente » de la première boule noire (resp. blanche) donc la variable X (resp. Y) suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

4. Il est manifeste que $E(Y) = E(X)$ lorsque $n=2$. Supposons maintenant que $n>2$. Alors on a

$$E(Y) - E(X) = \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)} - \frac{n^2}{2(n-1)} = \frac{n^2(n-2)^2}{2(n-1)(n^2-n+1)}$$

dont tous les facteurs sont strictement positifs ($\Delta(X^2-X+1) = -3 < 0$).
Conclusion. $\boxed{E(Y) \leq E(X) \ \text{ et } \ E(Y) = E(X) \Leftrightarrow n=2}$.

5. On peut reprendre le programme de la partie 1 à l'identique. En effet, comme X est le rang d'apparition de la première boule noire, on poursuit les tirages jusqu'à en obtenir une. Ainsi tant qu'une boule blanche est tirée, on recommence dans la même urne selon le protocole, c'est à dire dans l'urne choisie au départ.