DM4

Devoir maison à rendre le 07/11/2022

Exercice 1

1. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f \circ (f - \mathrm{Id})^2 = 0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Déterminer $(f - \mathrm{Id})^2 + f \circ (2\mathrm{Id} - f)$.

   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x = (f - \mathrm{Id})^2(x) + (f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x)$.

   (c) Utiliser ce dernier résultat pour établir que : $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

2. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que : $f \circ (f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id}) = 0$.

   (a) Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant : $\dfrac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X) = 1$.

   (b) En déduire que : $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

3. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f, dont le degré est égal à p (avec $p \geq 2$), et tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

   (a) Montrer qu'il existe p réels $a_1, \dots, a_p$ avec $a_1 \neq 0$, tels que $P = a_1 X + \cdots + a_p X^p$.

   (b) En déduire que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$, puis établir que : $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

   (c) En quoi cette question est-elle une généralisation des deux précédentes ?

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes (ou fonctions polynomiales) à coefficients réels de degré inférieurs ou égal à n, et $\mathscr{B} = (1, x, \dots, x^n)$ sa base canonique.

Dans tout cet exercice, a désigne un réel quelconque.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, on pose : $\Psi_a(P) = 2P + (x-a)P'$.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, on définit également la fonction $\Phi_a(P)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_a(P)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)^2} \displaystyle\int_a^x (t-a)P(t)\mathrm{d}t & \text{si } x \neq a, \\ \dfrac{P(a)}{2} & \text{si } x = a. \end{cases}$$

1. Montrer que l'application $\Psi_a : P \mapsto \Psi_a(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

2. Déterminer la matrice de Ψ_a dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[x]$.

3. Justifier que Ψ_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

4. (a) On définit, pour tout k de $[\![0; n]\!]$, le polynôme Q_k par : $Q_k = (x-a)^k$.
   Prouver que $\mathscr{C} = (Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

   (b) Calculer, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, $\Psi_a(Q_k)$.

   (c) En déduire la matrice de Ψ_a dans la base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}_n[x]$.

5. (a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, exprimer $\left((x-a)^2 P(x)\right)'$ en fonction de $\Psi_a(P)$.

   (b) En déduire, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$: $\Phi_a(\Psi_a(P)) = P$.

   (c) En déduire que $\Phi_a : P \mapsto \Phi_a(P)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ et que $\Phi_a^{-1} = \Psi_a$.

   (d) En déduire la matrice de Φ_a dans la base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}_n[x]$.

Problème

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On dispose de deux urnes U et V, l'urne U contenant une boule blanche et $(n-1)$ boules noires et l'urne V contenant une boule noire et $(n-1)$ boules blanches.

Un joueur choisit une urne au hasard pour le premier tirage puis il effectue des tirages d'une boule avec remise de cette boule dans l'urne dont elle provient, selon trois protocoles étudiés dans les trois parties de ce problème.

Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on note B_i l'événement « on obtient une boule blanche au i^{eme} tirage ».

On note X le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule noire et Y le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule blanche. On admet que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Pour finir, on note U l'événement « le premier tirage a lieu dans l'urne U ».

Partie 1

Dans cette partie, les tirages qui suivent le premier tirage ont lieu dans l'urne qui a été choisie au premier tirage.

1. (a) Déterminer $P(X=1)$.

   (b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $(X=k)$ à l'aide de certains des événements B_i ou $\bar{B}_i$, puis montrer que :

   $$\forall k \geq 2,\ P(X=k) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right)$$

   Vérifier que cette formule reste valable pour $k=1$.

2. Établir que X possède une espérance et donner sa valeur.

3. Montrer que X et Y suivent la même loi.

4. On décide de coder l'événement U par 1 et l'événement $\overline{U}$ par 0.

   Recopier et compléter (en remplaçant les parties étoilées) le programme `Python` suivant pour qu'il calcule et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience décrite dans cette partie.

```python
import numpy.random as rd

def cb(n):
        hasard = rd.randint(0,2)
        x=1
        if hasard == 0 :
                while rd.randint(1,n+1)>1 :
                        x=x+1
        else
                while ****************
                        ****************
        return x
```

Partie 2

Dans cette partie, les tirages qui suivent le premier tirage ont lieu dans l'urne U si le tirage précédent a donné une boule blanche et dans l'urne V sinon.

1. (a) Donner $P(X=1)$.
   (b) En procédant comme dans la partie 1, montrer que :

$$\forall k \geq 2,\ P(X=k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\frac{n-1}{n}$$

2. Établir que X possède une espérance et donner sa valeur.

3. Montrer que X et Y suivent la même loi.

4. Avec les mêmes conventions et les mêmes notations que celles de la partie 1, écrire un programme permettant le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience décrite dans cette partie.

Partie 3

Dans cette partie, chacun des tirages suivant le premier tirage a lieu dans la même urne que le tirage qui le précède si ce dernier a donné une boule blanche et dans l'autre urne dans le cas contraire.

1. (a) Donner $P(X=1)$.
   (b) Toujours selon la même méthode, montrer que :

$$\forall k \geq 2,\ P(X=k) = \frac{(n-1)^{k-1}+n-1}{2n^k}$$

   Vérifier que la formule précédente reste valable pour $k=1$.
   (c) Établir que X possède une espérance puis montrer que $E(X) = \dfrac{n^2}{2(n-1)}$.

2. (a) En procédant comme à la question 1b, montrer que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(Y=2i) = \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\frac{n^2-2n+2}{2n^2}$$

   (b) Montrer également que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(Y=2i+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i}$$

   Vérifier que cette formule reste valable pour $i=0$.
   (c) On pose $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ E_{2m}(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2m} kP(Y=k)$ et $\forall m \in \mathbb{N},\ E_{2m+1}(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2m+1} kP(Y=k)$.
      i. Montrer que la suite $(E_{2m}(Y))_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.
      ii. Montrer que la suite $(E_{2m+1}(Y))_{m\in\mathbb{N}}$ converge et a la même limite que $(E_{2m}(Y))_{m\in\mathbb{N}^*}$.
      iii. En déduire que Y possède une espérance et que $E(Y) = \dfrac{3n^2}{2(n^2-n+1)}$.

3. (a) Montrer que X et Y suivent la même loi lorsque $n=2$. Quelle est cette loi ?
   (b) Comment pouvait-on justifier, sans calcul, les deux résultats ci-dessus ?

4. Montrer que $E(Y) \leq E(X)$ avec égalité si et seulement si $n=2$.

5. Écrire un programme permettant le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience décrite dans cette partie.