

DM5  
**Correction du devoir maison (ESSEC 2008)**

**Partie I.**

1. (a) Soient  $P, Q \in \mathcal{P}$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda P + \mu Q)(x) &= (\lambda P + \mu Q)(x+1) - (\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda P(x+1) + \mu Q(x+1) - \lambda P(x) - \mu Q(x) \\ &= \lambda(P(x+1) - P(x)) + \mu(Q(x+1) - Q(x)) = \lambda \Delta(P)(x) + \mu \Delta(Q)(x). \end{aligned}$$

De plus, pour tout  $P \in \mathcal{P}$ ,  $\Delta(P)$  est une fonction polynomiale par définition de  $\Delta$ . Donc  $\Delta$  est un endomorphisme de  $\mathcal{P}$ .

(b) Soit  $P \in \mathcal{P}$  de degré  $r$  strictement positif. Notons  $a_0, \dots, a_r \in \mathbb{R}$  ses coefficients, de sorte que  $P : x \mapsto \sum_{k=0}^r a_k x^k$ . On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x) = \sum_{k=0}^r a_k (x+1)^k - \sum_{k=0}^r a_k x^k = \sum_{k=0}^r a_k [(x+1)^k - x^k].$$

D'après la formule du binôme, on a  $[(x+1)^k - x^k] = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^i$  qui est une fonction polynomiale de degré exactement  $k-1$ . Puisque  $a_r \neq 0$ , le degré de  $\Delta(P)$  est donc égal à  $r-1$ .

(c) Si  $P : x \mapsto \lambda \in \mathbb{R}$  est constant, alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x) = \lambda - \lambda = 0.$$

Donc  $P$  appartient à  $\text{Ker}(\Delta)$ .

Supposons à présent que  $P$  ne soit pas constant, et notons  $r > 0$  son degré. D'après la question précédente,  $\text{deg}(\Delta(P)) = r-1$  et donc  $\Delta(P) \neq 0_{\mathcal{P}}$ . Ainsi  $P$  n'appartient pas à  $\text{Ker}(\Delta)$ .

On a donc montré que  $\text{Ker}(\Delta) = \mathcal{P}_0$ .

2. (a) Pour tout  $P \in \mathcal{P}_r$ , on a :

- soit  $\text{deg}(P) \leq 0$ , et dans ce cas  $\Delta(P) = 0_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}_r$  ;
- soit  $\text{deg}(P) = d > 0$ , et dans ce cas le degré de  $\Delta(P)$  est  $d-1 \leq r$ , de sorte que  $\Delta(P) \in \mathcal{P}_r$ .

Dans tous les cas, on a donc que  $\Delta(P) \in \mathcal{P}_r$ . Le sous-espace vectoriel  $\mathcal{P}_r$  est donc stable par  $\Delta$ . On peut donc considérer l'endomorphisme induit  $\Delta_r$  par  $\Delta$  sur  $\mathcal{P}_r$ .  $\Delta_r$  est bien défini (c'est-à-dire à valeurs dans  $\mathcal{P}_r$ ) et linéaire (car  $\Delta$  l'est).

(b) Soit  $P \in \mathcal{P}_r$ . On a :

$$P \in \text{Ker}(\Delta_r) \iff \Delta_r(P) = 0 \iff \Delta(P) = 0.$$

Ainsi, on a  $\text{Ker}(\Delta_r) = \text{Ker}(\Delta) \cap \mathcal{P}_r = \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_r = \mathcal{P}_0$ .

(c) On a  $\dim(\text{Ker}(\Delta_r)) = \dim(\mathcal{P}_0) = 1$ , d'où par le théorème du rang :

$$\dim(\text{Im}(\Delta_r)) = \dim(\mathcal{P}_r) - \dim(\text{Ker}(\Delta_r)) = r + 1 - 1 = r.$$

D'autre part, on a d'après les questions précédentes,  $\text{Im}(\Delta_r) \subset \mathcal{P}_{r-1}$ . Comme  $\dim(\text{Im}(\Delta_r)) = r = \dim(\mathcal{P}_{r-1})$ , on a donc  $\text{Im}(\Delta_r) = \mathcal{P}_{r-1}$ .

(d) Soit  $Q \in \mathcal{P}$ . Il existe  $r \geq 1$  tel que  $Q \in \mathcal{P}_{r-1}$ . Par la question précédente,  $Q$  appartient à l'image de  $\Delta_r$ , de sorte qu'il existe  $P \in \mathcal{P}_r$  tel que :

$$Q = \Delta_r(P) = \Delta(P).$$

D'où la surjectivité de l'application  $\Delta$ .

3. Notons  $\delta$  la restriction de  $\Delta$  à  $\mathcal{E}$ .  $\delta$  est linéaire par définition. Montrons que c'est un isomorphisme de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{P}$ .

- On a  $\text{Ker}(\delta) = \text{Ker}(\Delta) \cap \mathcal{E} = \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{E} = \{0_{\mathcal{P}}\}$  (car une application polynomiale constante qui s'annule en 0 est l'application polynomiale nulle). Donc  $\delta$  est injective.
- Soit  $Q \in \mathcal{P}$ . D'après la question précédente, il existe  $P \in \mathcal{P}$  tel que :

$$\Delta(P) = Q.$$

Posons alors  $\tilde{P} = P - P(0)$ . On a  $\tilde{P} \in \mathcal{E}$  et :

$$\delta(\tilde{P}) = \Delta(\tilde{P}) = \Delta(P - P(0)) = \Delta(P) - \Delta(P(0)) = Q - 0 = Q$$

car  $P(0) \in \mathcal{P}_0 = \text{Ker}(\Delta)$ . Ainsi  $\delta$  est surjective.

$\delta$  est bien un isomorphisme de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{P}$ .

4. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La propriété de l'énoncé : «  $N_n(0) = 0$  et  $\Delta(N_n) = N_{n-1}$  » est équivalente à : «  $N_n \in \mathcal{E}$  et  $\delta(N_n) = N_{n-1}$  », ou encore à : «  $N_n$  est l'antécédent de  $N_{n-1}$  par  $\delta$  ».

La suite  $(N_n)$  est donc l'unique suite définie par récurrence par :

$$N_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, N_n = \delta^{-1}(N_{n-1}).$$

(b) Montrons le par récurrence sur  $n$ .

**Init.** Pour  $n = 1$ , on a  $P : x \mapsto \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = x$ . Et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x) = (x+1) - x = 1 = N_0(x) \text{ et } N_1(0) = 0.$$

Par unicité (de l'antécédent par  $\delta$ ), on a donc  $P = N_1$  et la propriété est vraie au rang  $n = 1$ .

**Hér.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons la propriété vraie au rang  $n$ . Montrons-là au rang  $n + 1$ .

Par hypothèse de récurrence, on a  $N_n : x \mapsto \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (x - k)$ .

Posons  $P : x \mapsto \frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - k)$ . On a  $P(0) = 0$  de sorte que  $P \in \mathcal{E}$ . De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} \Delta(P)(x) &= P(x+1) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n ((x+1) - k) - \frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - k) \\ &= \frac{(x+1)x(x-1)\dots(x-n+1)}{(n+1)!} - \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)(x-n)}{(n+1)!} \\ &= \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{(n+1)!} \underbrace{[(x+1) - (x-n)]}_{=n+1} \\ &= \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = N_n(x). \end{aligned}$$

Par unicité (de l'antécédent par  $\delta$ ), on a bien  $P = N_{n+1}$ . D'où la propriété au rang  $n + 1$ .

Par principe de récurrence, on a pour tout entier naturel  $n$  non nul et tout  $x$  réel :

$$N_n(x) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (x - k).$$

(c) Pour tout  $n \in \llbracket 0, r \rrbracket$ , le degré de  $N_n$  est égal à  $n$ . La famille  $(N_n)_{n \in \llbracket 0, r \rrbracket}$  est donc bien une famille de vecteurs de  $\mathcal{P}$ , et est libre car ce sont des fonctions polynomiales de degrés deux à deux distincts. De plus, cette famille est de cardinal  $r + 1 = \dim(\mathcal{P}_r)$ . La famille  $(N_n)_{n \in \llbracket 0, r \rrbracket}$  est une base de  $\mathcal{P}_r$ .

(d) Soit  $Q \in \mathcal{P}_r$ . Puisque  $(N_n)_{n \in \llbracket 0, r \rrbracket}$  est une base de  $\mathcal{P}_r$ , il existe (un unique)  $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$  tel que :

$$Q = a_0 N_0 + \dots + a_r N_r.$$

On a  $\Delta(N_0) = 0$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $\Delta(N_n) = N_{n-1}$ . Par une récurrence facile, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \Delta^k(N_n) = \begin{cases} N_{n-k} & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$ . On a par linéarité de  $\Delta^r$  :

$$\Delta^k(Q) = \sum_{n=0}^r a_n \Delta^k(N_n) = \sum_{n=k}^r a_n N_{n-k} = a_k + \sum_{n=k+1}^r a_n N_{n-k}$$

Puisque  $N_i(0) = 0$  si  $i \geq 1$ , on obtient en prenant  $x = 0$  dans cette dernière égalité :

$$\Delta^k(Q)(0) = a_k.$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\forall Q \in \mathcal{P}_r, \quad Q = \sum_{n=0}^r \Delta^n(Q)(0) N_n.}$$

(e) Si  $Q = 0$ , alors l'ensemble des fonctions polynomiales  $P$  satisfaisant  $\Delta(P) = 0$  est  $\text{Ker}(\Delta) = \mathcal{P}_0$ .

Supposons  $\deg(Q) = r \geq 0$ . Par ce qui a été fait précédemment, un antécédent de  $Q$  par  $\Delta$  est de degré  $r + 1$ . Soit  $P \in \mathcal{P}_{r+1}$ . Puisque  $(N_n)_{n \in \llbracket 0, r+1 \rrbracket}$  est une base de  $\mathcal{P}_{r+1}$ , il existe  $a_0, \dots, a_{r+1} \in \mathbb{R}$  tel que :

$$P = \sum_{n=0}^{r+1} a_n N_n.$$

On a :

$$\begin{aligned} \Delta(P) = Q &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{r+1} a_n \Delta(N_n) = Q \text{ par lin. de } \Delta \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{r+1} a_n N_{n-1} = \sum_{n=0}^r \Delta^n(Q)(0) N_n \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^r a_{n+1} N_n = \sum_{n=0}^r \Delta^n(Q)(0) N_n \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \llbracket 0, r \rrbracket, a_{n+1} = \Delta^n(Q)(0) \text{ par liberté de la fam. } (N_n)_{n \in \llbracket 0, r \rrbracket}. \end{aligned}$$

Les fonctions polynomiales telles que  $\Delta(P) = Q$  sont donc les fonctions polynomiales de la forme :

$$\boxed{P = a_0 + \sum_{n=1}^{r+1} \Delta^{n-1}(Q)(0) N_n \text{ avec } a_0 \text{ constante réelle quelconque.}}$$

(f) On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n Q(k) = \sum_{k=0}^n [P(k+1) - P(k)] \quad \boxed{= P(n+1) - P(0).}$$

Prenons à présent  $Q : x \mapsto x^2$ . Puisque  $N_1 : x \mapsto x$  et  $N_2 : x \mapsto \frac{x(x-1)}{2}$ , on a  $Q = 2N_2 + N_1$ . D'après les calculs précédents, une fonction polynomiale  $P$  telle que  $\Delta(P) = Q$  est par exemple :

$$P : x \mapsto 2N_3(x) + N_2(x) = \frac{1}{3}x(x-1)(x-2) + \frac{1}{2}x(x-1) = \frac{1}{6}x(x-1)(2x-1).$$

On a donc :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = P(n+1) - P(0) \quad \boxed{= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).}$$

### 5. Méthode 1. Par récurrence.

**Init.** Prenons  $n = 0$ . On a pour toute fonction polynomiale  $Q$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\sum_{i=0}^0 (-1)^{0-i} \binom{0}{i} Q(x+i) = Q(x).$$

D'où la propriété au rang  $n = 0$ .

**Hér.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons la propriété vraie au rang  $n$ .

On a par hypothèse de récurrence que pour toute fonction polynomiale  $Q \in \mathcal{P}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\Delta^n(Q)(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} Q(x+i).$$

En appliquant  $\Delta$  qui est linéaire, on a :

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1}(Q)(x) &= \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \Delta(Q)(x+i) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} [Q((x+i)+1) - Q(x+i)] \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} Q(x+i+1) - \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} Q(x+i) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n-(i-1)} \binom{n}{i-1} Q(x+i) + \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i+1} \binom{n}{i} Q(x+i) \\ &= Q(x+n+1) + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i+1} \binom{n}{i-1} Q(x+i) + (-1)^{n+1} Q(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i+1} \binom{n}{i} Q(x+i) \\ &= Q(x+n+1) + (-1)^{n+1} Q(x) + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i+1} \left[ \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] Q(x+i) \\ &= Q(x+n+1) + (-1)^{n+1} Q(x) + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i+1} \binom{n+1}{i} Q(x+i) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n-i+1} \binom{n+1}{i} Q(x+i) \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang  $n+1$ .

On conclut par principe de récurrence.

**Méthode 2. Par la formule du binôme de Newton.**

Notons  $T$  l'application qui à  $P \in \mathcal{P}$  associe  $Q : x \mapsto P(x+1)$ . On montre facilement que  $T$  est un endomorphisme de  $\mathcal{P}$ , et on a :

$$\Delta = T - \text{Id}.$$

Puisque  $T$  et  $\text{Id}$  **commutent**, on a par la formule du binôme de Newton que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\Delta^n = (T - \text{Id})^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} T^i \circ (-\text{Id})^{n-i} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} T^i.$$

Par une récurrence immédiate, on a pour toute fonction polynomiale  $Q$  et tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T^k(Q)(x) = Q(x+k).$$

On en déduit que pour toute fonction polynomiale  $Q$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\boxed{\Delta^n(Q)(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} Q(x+i).}$$

6. (a) i. Soient  $g$  et  $h$  appartenant à  $\mathcal{C}(\Delta_r)$  tels que  $g(N_r) = h(N_r)$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$ , on a :

$$\begin{aligned} g(N_{r-k}) &= g(\Delta_r^k(N_r)) = g \circ \Delta_r^k(N_r) \underset{g \in \mathcal{C}(\Delta_r)}{=} \Delta_r^k \circ g(N_r) = \Delta_r^k \circ h(N_r) \\ &= \Delta_r^k \circ h(N_r) \underset{h \in \mathcal{C}(\Delta_r)}{=} h \circ \Delta_r^k(N_r) = h(N_{r-k}) \end{aligned}$$

Les endomorphismes  $g$  et  $h$  coïncident sur la base  $(N_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  de  $\mathcal{P}_r$ . Elles sont donc égales.

- ii. Soit  $g$  un endomorphisme de  $\mathcal{P}_r$ .  $g(N_r)$  appartient à  $\mathcal{P}_r$  et  $(N_k)_{k \in \llbracket 0, r \rrbracket}$  est une base de  $\mathcal{P}_r$ . D'où l'existence de  $a_0, a_1, \dots, a_r$  réels tels que :

$$\boxed{g(N_r) = a_r N_r + a_{r-1} N_{r-1} + \dots + a_1 N_1 + a_0 N_0.}$$

- iii. Soit  $g \in \mathcal{C}(\Delta_r)$ . Par la question précédente, il existe des réels  $a_0, \dots, a_r$  tels que :

$$g(N_r) = \sum_{k=0}^r a_k N_k = \sum_{k=0}^r a_k \Delta_r^{r-k}(N_r) = \left[ \sum_{k=0}^r a_k \Delta_r^{r-k} \right] (N_r).$$

Or l'endomorphisme  $\sum_{k=0}^r a_k \Delta_r^{r-k}$  est un polynôme en  $\Delta_r$ , il commute donc avec  $\Delta_r$ , et appartient à  $\mathcal{C}(\Delta_r)$ . Par la question 6.(a).i., on a donc :

$$g = \sum_{k=0}^r a_k \Delta_r^{r-k}$$

Ainsi  $(Id_{\mathcal{P}}, (\Delta_r)^1, \dots, (\Delta_r)^{r-1}, (\Delta_r)^r)$  est une famille génératrice de  $\mathcal{C}(\Delta_r)$ .

Montrons que cette famille est libre. Soient pour cela  $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$  tels que :

$$a_0 Id + a_1 \Delta_r + \dots + a_r \Delta_r^r = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_r)}.$$

Évaluons cette identité en  $N_r$  :

$$a_0 N_r + a_1 \Delta_r(N_r) + \dots + a_r \Delta_r^r(N_r) = 0_{\mathcal{P}_r},$$

soit encore :

$$a_0 N_r + a_1 N_{r-1} + \dots + a_r N_0 = 0_{\mathcal{P}_r},$$

Or  $(N_k)_{k \in \llbracket 0, r \rrbracket}$  est une famille libre de  $\mathcal{P}_r$ , d'où  $a_0 = a_1 = \dots = a_r$ . Ainsi  $(Id_{\mathcal{P}}, (\Delta_r)^1, \dots, (\Delta_r)^{r-1}, (\Delta_r)^r)$  est une famille libre.

$\boxed{(Id_{\mathcal{P}}, (\Delta_r)^1, \dots, (\Delta_r)^{r-1}, (\Delta_r)^r)}$  est donc une base de  $\mathcal{C}(\Delta_r)$  qui est de dimension  $r + 1$ .

- iv. On a pour toute fonction polynomiale  $P$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$d \circ \Delta(P)(x) = P'(x+1) - P'(x) = \Delta \circ d(P)(x).$$

Donc  $d$  appartient à  $\mathcal{C}(\Delta)$ .

Supposons qu'il existe  $a_0, a_1, \dots, a_r$  des réels tels que  $d = a_0 Id_{\mathcal{P}} + a_1 (\Delta)^1 + \dots + a_r (\Delta)^r$ . On a en évaluant en  $N_{r+1}$  :

$$N'_{r+1} = a_0 N_{r+1} + a_1 N_r + \dots + a_r N_1.$$

En prenant  $x = 0$  dans cette égalité, on obtient :

$$N'_{r+1}(0) = a_0 N_{r+1}(0) + a_1 N_r(0) + \dots + a_r N_1(0) = 0.$$

Ainsi 0 serait racine au moins double de  $N_{r+1}$ . Or ceci est faux, car on a obtenu que  $N_{r+1}(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-r)}{(r+1)!}$ , et donc que 0 est racine simple de  $N_{r+1}$ . D'où une contradiction.

Ceci montre que  $\mathcal{C}(\Delta)$  n'est pas réduit au sous-espace vectoriel  $\{P(\Delta), P \in \mathcal{P}\}$ , contrairement au commutant de  $\Delta_r$ .

- (b) On a  $\Delta_r(N_0) = 0$  et pour tout  $n \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on a  $\Delta_r(N_n) = N_{n-1}$ . Notons  $\mathcal{B} = (N_n)_{n \in \llbracket 0, r \rrbracket}$  Ainsi, on a :

$$M_{\mathcal{B}}(\Delta_r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r+1}(\mathbb{R}).$$

Pour montrer que  $(\Delta_r)^{r+1} = 0$ , on peut le faire matriciellement (la matrice est triangulaire supérieure stricte). On peut aussi remarquer que pour tout  $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$  :

$$(\Delta_r)^{r+1}(N_k) = (\Delta_r)^{r+1-k}(N_0) = \Delta_r^{r-k}(\Delta_r(N_0)) = \Delta_r^{r-k}(0_{\mathcal{P}_r}) = 0_{\mathcal{P}_r}.$$

Ainsi,  $\Delta_r$  s'annule sur la base  $\mathcal{B}$ . C'est donc l'endomorphisme nul :  $\boxed{(\Delta_r)^{r+1} = 0.}$



**Pour aller plus loin.**

Ainsi  $\Delta_r$  est donc un endomorphisme nilpotent, d'indice  $r + 1$  car on a  $\Delta_r^r(N_r) = N_0 \neq 0_{\mathcal{P}_r}$ . Et on a vu que son commutant est de dimension  $r + 1$ , avec pour base  $(\text{Id}, \Delta_r, \dots, \Delta_r^r)$ .

En fait, on peut montrer plus généralement le résultat suivant (que je vous laisse en exercice) : pour  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme nilpotent d'indice  $n = \dim(E)$ , son commutant  $\mathcal{C}(f)$  est de dimension  $n$ , et  $(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$  est une base de  $\mathcal{C}(f)$ .

(c) Supposons qu'un tel endomorphisme existe. On a :

$$g \circ \Delta_r = g \circ g \circ g = \Delta_r \circ g.$$

Donc  $g$  appartiendrait au commutant de  $\Delta_r$ . D'après la question 6., il existerait donc  $a_0, \dots, a_r$  des réels tels que :

$$g = a_0 \text{Id} + a_1 \Delta_r + \dots + a_r \Delta_r^r.$$

On aurait alors :

$$\Delta_r \circ g = g \circ g = a_0^2 \text{Id} + 2a_0 a_1 \Delta_r + \sum_{k=2}^r b_k \Delta_r^k$$

où les  $b_k$  sont des réels dont la valeur importe peu (ils s'écrivent en fonction des  $a_k$ ). Puisque la famille  $(\Delta_r^k)_{k \in \llbracket 0, r \rrbracket}$  est libre, on obtient  $a_0^2 = 0$  et  $2a_0 a_1 = 1$ , ce qui donnerait  $0 = 1$ . D'où une contradiction. Il n'existe donc pas de  $g \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_r)$  tel que  $g \circ g = \Delta_r$ .

**Autre méthode. En utilisant l'Exercice 6.8 du TD.**

On a vu dans l'exercice 6.8 du TD que si  $f \in \mathcal{L}(E)$  est un endomorphisme nilpotent, et si  $n = \dim(E)$ , alors  $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Ici, on a  $g \circ g = \Delta_r$ , d'où :

$$g^{2(r+1)} = \Delta_r^{r+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_r)}.$$

$g$  est donc un endomorphisme nilpotent de  $\mathcal{P}_r$ . Comme  $\dim(\mathcal{P}_r) = r + 1$ , on a d'après l'exercice 6.8 :

$$g^{r+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_r)}.$$

Notons  $k = \begin{cases} \frac{r+1}{2} & \text{si } r \text{ impair,} \\ \frac{r+2}{2} & \text{si } r \text{ pair.} \end{cases}$ . On a  $k < r + 1$  et :

$$\Delta_r^k = g^{2k} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_r)}.$$

Donc l'indice de nilpotence de  $\Delta_r$  serait  $\leq k < r + 1$ . Or, on a  $\Delta_r^r(N_r) = N_0 \neq 0_{\mathcal{P}_r}$ . D'où une contradiction.

## Partie II.

1. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \notin \mathbb{N}$ , les  $N_n(x)$  sont non nuls, et les  $u_n$  sont non nuls. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^t \frac{|N_{n+1}(x)|}{|N_n(x)|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^t \frac{|x-n|}{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{t-1} \frac{|x-n|}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{t-1} \left|1 - \frac{x}{n}\right|.$$

À partir d'un certain rang  $N$ , on a  $1 - \frac{x}{n} > 0$  pour tout  $n \geq N$ . Et on a :

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = (t-1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \\ &= \frac{t-1}{n} - \frac{t-1}{2n^2} - \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{t-1-x}{n} - \frac{t-1+x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On a alors plusieurs cas à considérer :

- Si  $t - 1 - x \neq 0$ , alors  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t-1-x}{n}$ . De plus  $\frac{1}{n} \geq 0$  pour tout  $n \geq 1$  et la série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge. Par théorème de comparaison, la série de terme général  $v_n$  diverge également.

- Si  $t - 1 - x = 0$  et  $t - 1 + x^2 \neq 0$ , alors  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t - 1 + x^2}{n^2}$ . De plus  $\frac{1}{n^2} \geq 0$  pour tout  $n \geq 1$  et la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge. Par théorème de comparaison, la série de terme général  $v_n$  converge également.
- Si  $t - 1 - x = 0$  et  $t - 1 + x^2 = 0$ , alors  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Comme  $\frac{1}{n^2} \geq 0$  pour tout  $n \geq 1$  et que  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge,  $\sum v_n$  converge également par théorème de comparaison.

Finalement, la série  $\sum v_n$  converge si et seulement si  $t = 1 + x$ .

(b) On a  $\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_n) - \ln(u_1)$ . On en déduit selon les cas :

- si  $t < x + 1$ , la série  $\sum v_n$  diverge. De plus, puisque dans ce cas  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t - 1 - x}{n}$ ,  $v_n$  est négatif à partir d'un certain rang. La suite des sommes partielles de  $\sum v_n$  est donc décroissante à partir d'un certain rang. Par théorème de limite monotone, soit elle est minorée et converge vers une limite finie, soit elle n'est pas minorée et sa limite est  $-\infty$ . Comme la série  $\sum v_n$  diverge, elle n'est pas minorée donc, et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} v_k = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) - \ln(u_1) = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

- si  $t > x + 1$ , la série  $\sum v_n$  diverge, et dans ce cas,  $v_n$  est positif à partir d'un certain rang. On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} v_k = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

- si  $t = x + 1$ , la série  $\sum v_n$  converge. Notons  $S(x)$  sa somme. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) - \ln(u_1) = S(x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_1 e^{S(x)}.$$

En posant  $C(x) = u_1 e^{S(x)} > 0$ , on en déduit donc que  $u_n = n^{x+1} |N_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C(x)$ , soit encore :

$$|N_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C(x)}{n^{x+1}}.$$

2. (a) Prenons  $f : x \mapsto b^x$ . On a :

$$a_n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(i) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} b^i (-1)^{n-i} = \boxed{(b-1)^n}$$

par la formule du binôme de Newton.

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Posons  $Q = \sum_{k=0}^n a_k N_k$ . D'après la question 4.(d), on a  $Q = \sum_{k=0}^n \Delta^k(Q)(0) N_k$ . Puisque la famille  $(N_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est libre, on obtient :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = \Delta^k(Q)(0).}$$

Montrons que la fonction  $x \mapsto f(x) - Q(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n a_k N_k(x)$  s'annule en  $0, 1, \dots, n$ .

**Méthode 1. Calcul direct.**

Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On a :

$$Q(i) = \sum_{k=0}^n a_k N_k(i).$$

Or on a :

$$N_k(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > i \\ \frac{i(i-1)\dots(i-k+1)}{k!} = \frac{i!}{k!(i-k)!} = \binom{i}{k} & \text{si } k \leq i \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} Q(i) &= \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} a_k = f(i) - \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} a_k = \sum_{k=0}^i \sum_{j=0}^k \binom{i}{k} \binom{k}{j} f(j) (-1)^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^i f(j) \sum_{k=j}^i \frac{i!}{(i-k)!j!(k-j)!} (-1)^{k-j} = \sum_{j=0}^i \frac{i!}{j!} f(j) \sum_{k=j}^i \frac{1}{(i-k)!(k-j)!} (-1)^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^i \frac{i!}{j!} f(j) \sum_{k=0}^{i-j} \frac{1}{(i-k-j)!k!} (-1)^k \end{aligned}$$

Or si  $j \neq i$ , on a par la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{i-j} \frac{1}{(i-k-j)!k!} (-1)^k = \frac{(1 + (-1))^{i-j}}{(i-j)!} = 0.$$

On obtient donc :

$$Q(i) = \frac{i!}{i!} f(i) \sum_{k=0}^0 \frac{1}{(0-k)!k!} (-1)^k = f(i).$$

Donc la fonction  $x \mapsto f(x) - Q(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n a_k N_k(x)$  s'annule en  $0, 1, \dots, n$ .

**Méthode 2. À l'aide des polynômes interpolateurs de Lagrange.**

Soit  $R$  le polynôme de degré  $n$  tel que  $R(i) = f(i)$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  (on a prouvé l'existence d'un tel polynôme dans l'exercice 0.5 du TD0a). D'après la question 4.(d), on a  $R = \sum_{k=0}^n \Delta^k(R)(0) N_k$ . Et d'après 5., on a :

$$\Delta^k(R)(0) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} R(i) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(i) = a_k.$$

On a donc  $R = Q$ . On en déduit donc que pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$f(i) - Q(i) = f(i) - R(i) = 0.$$

(c) Supposons dans un premier temps que  $x \notin \llbracket 0, n \rrbracket$ . Fixons  $A \in \mathbb{R}$  tel que :

$$f(x) - \sum_{k=0}^n a_k N_k(x) = N_{n+1}(x)A$$

Un tel réel  $A$  existe bien puisque  $N_{n+1}(x) \neq 0$ .

La fonction  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et s'annule en  $n + 2$  réels distincts : tous les entiers  $0, 1, \dots, n$  et en  $x$ . En appliquant le théorème de Rolle entre chacun de ces entiers, on en déduit l'existence de  $(n + 1)$  réels distincts  $b_0 < b_1 < \dots < b_{n+1}$  tels que :

$$\varphi'(b_0) = \varphi'(b_1) = \dots = \varphi'(b_{n+1}).$$

En appliquant alors de nouveau le théorème de Rolle à  $\varphi'$  entre chacun des  $b_i$ , on en déduit l'existence de  $n$  réels distincts en lesquels  $\varphi^{(2)}$  s'annule.

En itérant ce procédé (on dit qu'on applique ici le théorème de Rolle en cascade), on en déduit pour tout  $k \in \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$  l'existence de  $n + 2 - k$  réels distincts en lesquels  $\varphi^{(k)}$  s'annule. En particulier pour  $k = n + 1$ , on en déduit l'existence d'un réel  $\theta$  tel que  $\varphi^{(n+1)}(\theta) = 0$ .

Or  $\sum_{k=0}^n a_k N_k$  est une fonction polynomiale de degré  $\leq n$ , donc sa dérivée  $(n + 1)$ -ème est nulle. D'autre

part,  $N_{n+1}$  est une fonction polynomiale de degré  $n + 1$  de terme dominant  $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!}$ , donc on a  $N_{n+1}^{(n+1)} = 1$ . Ainsi on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - A \underset{t=\theta}{\Rightarrow} f^{(n+1)}(\theta) = A.$$



Finalement, on obtient :

$$\varphi(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^n a_k N_k(x) + AN_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n a_k N_k(x) + N_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta).$$

Enfin cette propriété reste vraie lorsque  $x \in \llbracket 0, n \rrbracket$  d'après la question précédente et puisque  $N_{n+1}(x) = 0$  : il suffit de prendre  $\theta$  quelconque.

(d) En reprenant les notations précédentes et compte tenu de l'hypothèse faite ici, on aura :

$$|f^{(n+1)}(\theta)N_{n+1}(x)| \leq M(n+1)|N_{n+1}(x)|.$$

Or on a d'après II.1.(b) que :

$$(n+1)|N_{n+1}(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n+1) \times \frac{C(x)}{(n+1)^{x+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C(x)}{n^x}.$$

Pour tout  $x > 0$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(n+1)}(\theta)N_{n+1}(x) = 0$ . En passant à la limite dans l'égalité de la question précédente, on en déduit que la série  $\sum a_k N_k(x)$  converge et on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x).$$

Notons que cette égalité est encore valable pour  $x = 0$  car  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(0) = a_0 = f(0)$ .

Si on suppose de plus que  $f(i) = 0$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , alors on a :

$$\forall k \geq 0, \quad a_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(i) = 0.$$

On obtient donc que pour tout  $x \geq 0$  :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x) = 0.$$

$f$  est donc la fonction nulle.

### 3. Étude de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} h^n N_n(x)$ avec $h$ réel :

(a) En utilisant l'équivalent obtenu à la question II.1.(b), on a (puisque  $x \notin \mathbb{N}$  :

$$|h|^n |N_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C(x) \frac{|h|^n}{n^{x+1}}.$$

Si  $|h| > 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|h|^n}{n^{x+1}} = +\infty$  par croissances comparées, et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |h|^n |N_n(x)| = +\infty$ .

Ainsi, si  $|h| > 1$ , la série de terme général  $h^n N_n(x)$  diverge grossièrement.

(b) i. Supposons tout d'abord que  $x \notin \mathbb{N}$ . On a :

- $|h|^n |N_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C(x) \frac{|h|^n}{n^{x+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  par croissances comparées (puisque  $|h| < 1$ ) ;
- $\frac{1}{n^2} \geq 0$  pour tout  $n \geq 0$  ;
- $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série convergente (série de Riemann avec  $\alpha = 2 > 1$ ).

Par théorème de comparaison, la série de terme général  $h^n N_n(x)$  est absolument convergente pour tout  $x \notin \mathbb{N}$ .

Dans le cas où  $x = k \in \mathbb{N}$ , on a  $N_n(x) = 0$  dès que  $n \geq k + 1$ . Donc la série  $\sum h^n N_n(x)$  est absolument convergente (c'est une somme finie).

ii. La fonction  $f : h \mapsto (1+h)^x$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$ . On peut donc lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à tout ordre  $n$  entre 0 et  $h$  :

$$f(h) = \sum_{k=0}^n h^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Or on a pour tout  $k \geq 1$  :

$$\frac{f^{(k)}(h)}{k!} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} (1+h)^{x-k} = N_k(x)(1+h)^{x-k}.$$

Cette égalité reste de plus vraie pour  $k = 0$  puisque  $N_0 = 1$ . On obtient donc en substituant :

$$(1+h)^x = \sum_{k=0}^n h^k N_k(x) + (n+1)N_{n+1}(x) \int_0^h (h-t)^n (1+t)^{x-n-1} dt,$$

ce qui se réécrit encore :

$$(1+h)^x - \sum_{k=0}^n h^k N_k(x) = (n+1)N_{n+1}(x) \int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1} dt. \quad (*)$$

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\left| \frac{1}{h^n} \int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1} dt \right| \leq \frac{1}{|h|^n} \left| \int_0^h \left|\frac{h-t}{1+t}\right|^n (1+t)^{x-1} dt \right|.$$

Posons  $\varphi : t \in ] -1, 1[ \mapsto \frac{h-t}{1+t}$ .  $\varphi$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Et on a :

$$\varphi'(t) = \frac{-(1+t) - (h-t)}{(1+t)^2} = \frac{-1-h}{(1+t)^2} < 0 \quad \text{car } |h| < 1.$$

Ainsi,  $\varphi$  est décroissante. Ses valeurs extrémales sur  $[0, h]$  (ou  $[h, 0]$ ) sont donc obtenues pour  $t = 0$  ou  $t = h$ . On a donc :

$$\forall t \in [0, h] \text{ (ou } [h, 0]), \quad |\varphi(t)| \leq \max(|\varphi(0)|, |\varphi(h)|) = \max(|h|^n, 0) = |h|^n.$$

D'où pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\left| \frac{1}{h^n} \int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1} dt \right| \leq \left| \int_0^h (1+t)^{x-1} dt \right|.$$

Cette dernière quantité étant indépendante de  $n$ ,  $\left(\frac{1}{h^n} \int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1} dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien bornée.

iii. Si  $x = k \in \mathbb{N}$ , on a  $N_{n+1}(x) = 0$  dès que  $n \geq k$ , et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)N_{n+1}(x) \int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1} dt = 0.$$

Sinon, en utilisant l'équivalent de la question II.1.(b), on a :

$$|(n+1)N_{n+1}(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C(x)}{(n+1)^x} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C(x)}{n^x}.$$

D'après la question précédente, il existe une constante  $K$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1} dt \right| \leq K|h|^n.$$

Et puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h^n}{n^x} = 0$  par croissances comparées ( $|h| < 1$ ), on en déduit en passant à la limite dans (\*) que  $\sum_{n \geq 0} h^n N_n(x)$  converge (ce qu'on savait déjà) et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h^n N_n(x) = (1+h)^x.$$

- (c) i. Pour  $x \leq -1$ ,  $x$  n'est pas un entier naturel et l'on a toujours  $N_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C(x)}{n^{x+1}}$ . Puisque  $x+1 \leq 0$ , la suite  $(N_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend donc pas vers 0 (car  $C(x) > 0$ ). Ainsi,  $\sum N_n(x)$  diverge grossièrement.
- ii. En prenant  $h = 1$  dans (\*), on obtient :

$$2^x - \sum_{k=0}^n N_k(x) = (n+1)N_{n+1}(x) \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1} dt.$$

On a pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $0 \leq \frac{1-t}{1+t} \leq 1-t$  et  $0 \leq (1+t)^{x-1} \leq \max(1, 2^{x-1}) = M$ . On en déduit que :

$$0 \leq \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1} dt \leq M \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{M}{n+1}.$$

Ainsi, on a :

$$\left| 2^x - \sum_{k=0}^n N_k(x) \right| \leq (n+1)|N_{n+1}(x)| \frac{M}{n+1} = M|N_{n+1}(x)|.$$

Si  $x$  est un entier naturel,  $N_{n+1}(x)$  est nul à partir d'un certain rang, de sorte que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_{n+1}(x) = 0$ . Sinon, on a d'après II.1.(b) que  $|N_{n+1}(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C(x)}{(n+1)^{x+1}}$ , et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |N_{n+1}(x)| = 0$  puisque  $x+1 > 0$ .

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} N_n(x)$  est convergente pour  $x > -1$  et que :

$$\forall x > -1, \sum_{n=0}^{+\infty} N_n(x) = 2^x.$$

- (d) i. Étudions la convergence absolue de la série de terme général  $(-1)^n N_n(x)$ .  
 Si  $x \in \mathbb{N}$ ,  $(-1)^n N_n(x)$  est nul dès que  $n \geq x+1$ . Dans ce cas, la série  $(-1)^n N_n(x)$  converge absolument (somme finie).  
 Si  $x \notin \mathbb{N}$ , on a :

- $|(-1)^n N_n(x)| = |N_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C(x)}{n^{x+1}}$  ;
- $\frac{1}{n^{x+1}} \geq 0$  pour tout  $n \geq 1$  ;
- $\sum \frac{1}{n^{x+1}}$  converge si et seulement si  $x+1 > 1$ , soit si et seulement si  $x > 0$  (série de Riemann).

Par théorème de comparaison, la série de terme général  $|(-1)^n N_n(x)|$  converge si et seulement si  $x > 0$ .

Ainsi  $\boxed{\text{la série de terme général } (-1)^n N_n(x) \text{ converge absolument si et seulement si } x \geq 0.}$

Étudions à présent la convergence de  $\sum (-1)^n N_n(x)$ .

- Si  $x \geq 0$ , cette série est absolument convergente, donc convergente.
- Si  $x < 0$  et  $n \geq 0$ ,  $N_n(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$  est du signe de  $(-1)^n$ , donc  $(-1)^n N_n(x)$  est positif. La convergence de la série équivaut alors à son absolue convergence, qui n'a pas lieu dans ce cas.

En conclusion,  $\boxed{\text{la série de terme général } (-1)^n N_n(x) \text{ converge si et seulement si } x \geq 0.}$

ii. Montrons le par récurrence sur  $n \geq 1$ .

**Init.** Pour  $n = 1$ , on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$N_0(x) - N_1(x) = 1 - x = -(x-1) = -N_1(x-1).$$

D'où la propriété au rang  $n = 1$ .

**Hér.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons la propriété vraie au rang  $n$ . Montrons là au rang  $n + 1$ . On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k N_k(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k N_k(x) + (-1)^{n+1} N_{n+1}(x) \stackrel{HR}{=} (-1)^n N_n(x-1) + (-1)^{n+1} N_{n+1}(x) \\ &= (-1)^n [N_n(x-1) - N_{n+1}(x)] = (-1)^n [\Delta(N_{n+1})(x-1) - N_{n+1}(x)] \\ &= (-1)^n [N_{n+1}((x+1)-1) - N_{n+1}(x-1) - N_{n+1}(x)] = (-1)^{n+1} N_{n+1}(x-1) \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang  $n + 1$ .

Par principe de récurrence, on a donc que pour tout  $x$  réel et tout entier naturel  $n$  strictement positif :

$$\boxed{N_0(x) - N_1(x) + \dots + (-1)^n N_n(x) = (-1)^n N_n(x-1). \quad (**)}$$

iii. Soit  $x \geq 0$ . On a différents cas à considérer :

- Si  $x - 1 \in \mathbb{N}$ , c'est-à-dire si  $x \in \mathbb{N}^*$ , alors  $N_k(x) = 0$  pour tout  $k \geq x + 1$  et  $N_n(x - 1) = 0$  pour  $n \geq x$ . On obtient donc en passant à la limite dans  $(**)$  quand  $n \rightarrow \infty$  :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k N_k(x) = 0.}$$

- Si  $x = 0$ ,  $N_k(x) = 0$  pour  $k \geq 1$ , et donc  $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k N_k(x) = N_0(x) = 1.}$

- Si  $x \notin \mathbb{N}$ , l'équivalent  $|N_n(x-1)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C(x)}{n^x}$  montre que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_n(x-1) = 0$  puisque  $x > 0$ . Et en passant à la limite dans  $(**)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k N_k(x) = 0.}$$

**Remarque.** En conclusion de la question II.3., la série  $\sum_{k \geq 0} h^k N_k(x)$  converge si et seulement si :

- $|h| < 1$  et  $x$  quelconque ;
- $h = 1$  et  $x > -1$  ;
- $h = -1$  et  $x \geq 0$ .

De plus, on a l'égalité suivante en cas de convergence (avec la convention  $0^0 = 1$ ) :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} h^k N_k(x) = (1 + h)^x.$$