DM6

Correction du devoir maison

Exercice 1 (ESCP 2001 Voie E)

1. Tout d'abord, il n'est pas possible de tirer la deuxième boule noire avant la première. Donc si $j \leq i$, on a $P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = 0$.

   On suppose alors $1 \leq i < j \leq N$.

   Première méthode.

   Il y a $\binom{N}{2}$ manières de choisir les numéros des tirages auxquels sont sorties les boules noires. Or tous les tirages étant équiprobables, et un seul d'entre eux réalisant l'évènement $[X_1 = i] \cap [X_2 = j]$ (celui où les numéros des tirages des boules noirs sont i et j), on en déduit que :

   $$P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \frac{1}{\binom{N}{2}} = \frac{2}{N(N-1)}.$$

   Deuxième méthode.

   Notons B_k (resp. N_k) l'évènement « obtenir une boule blanche (resp. noire) au k-ième tirage ».
   On a $[X_1 = i] \cap [X_2 = j] = B_1 \cap \cdots \cap B_{i-1} \cap N_i \cap B_{i+1} \cap \cdots \cap B_{j-1} \cap N_j$.
   On en déduit par la formule des probabilités composées que :

   $$\begin{aligned} P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2)\dots P_{B_1\cap\cdots\cap B_{i-1}}(N_i)\dots P_{B_1\cap\cdots\cap B_{j-1}}(N_j) \\ &= \frac{N-2}{N}\frac{N-3}{N-1}\frac{N-4}{N-2}\cdots\frac{N-i}{N-i+2}\frac{2}{N-i+1}\frac{N-i+1}{N-i}\cdots\frac{N-i-j+1}{N-i-j+2}\frac{1}{N-i-j+1} \\ &= \frac{2}{N(N-1)} \end{aligned}$$

   Finalement, on obtient bien :

   $$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2, \quad P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq N, \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leq i < j \leq N. \end{cases}}$$

2. Notons tout d'abord que $\boxed{X_1(\Omega) = [\![1, N-1]\!] \text{ et que } X_2(\Omega) = [\![2, N]\!].}$

   On détermine les lois marginales. D'après la formule des probabilités totales appliquée au SCE $([X_2 = j])_j$, on a pour tout $1 \leq i \leq N-1$:

   $$P(X_1 = i) = \sum_{j=2}^{N} P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \sum_{j=i+1}^{N} P([X_1 = i] \cap [X_2 = j])$$

   les termes avec $j \leq i$ étant nuls. On obtient donc

   $$P(X_1 = i) = \sum_{j=i+1}^{N} \frac{2}{N(N-1)} \boxed{= \frac{2(N-i)}{N(N-1)}.}$$

   De même la formule des probabilités totales appliquée au SCE $([X_1 = i])_i$ donne pour tout $2 \leq j \leq N$,

   $$P(X_2 = j) = \sum_{j=1}^{N-1} P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{N(N-1)} \boxed{= \frac{2(j-1)}{N(N-1)}.}$$

   Les deux variables ne sont pas indépendantes car on a par exemple $P([X_1 = 3]) \neq 0$, $P([X_2 = 2]) \neq 0$, mais $P([X_1 = 3] \cap [X_2 = 2]) = 0$.

3. (a) Notons tout d'abord que $Y = N+1-X_2$ prend ses valeurs dans $[\![1, N-1]\!]$.
Pour tout $j \in [\![1, N-1]\!]$, on a

$$P(Y=j) = P(X_2 = N+1-j) = \frac{2(N+1-j-1)}{N(N-1)} = \frac{2(N-j)}{N(N-1)} = P(X_1 = j).$$

Ainsi $\boxed{\text{les variables } Y = N+1-X_2 \text{ et } X_1 \text{ suivent bien les mêmes lois.}}$

(b) On a tout d'abord que $Z = X_2 - X_1$ prend ses valeurs dans $[\![1, N-1]\!]$ puisque $1 \leq X_1 < X_2 \leq N$.
Pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, on a par la formule des probabilités totales appliquée au SCE $([X_1 = i])_i$:

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= \sum_{i=1}^{N-1} P([X_2 - X_1 = k] \cap [X_1 = i]) = \sum_{i=1}^{N-1} P([X_1 = i] \cap [X_2 = k+i]) \\ &= \sum_{i=1}^{N-k} P([X_1 = i] \cap [X_2 = k+i]) \end{aligned}$$

En effet, pour $i > N-k$, on a $k+i \geq N+1$ et donc $[X_2 = k+i]$ est impossible. On en déduit donc :

$$P(Z=k) = \sum_{i=1}^{N-k} \frac{2}{N(N-1)} \boxed{= \frac{2(N-k)}{N(N-1)}}.$$

Ainsi on retrouve la loi de X_1, et $\boxed{Z = X_2 - X_1 \text{ et } X_1 \text{ suivent donc les mêmes lois.}}$

4. (a) Tout d'abord, notons que $E(X_1)$ et $E(X_2)$ existent bien car ce sont des variables aléatoires finies. Puisque $X_2 - X_1$ et X_1 ont même loi, et que $N+1-X_2$ et X_1 ont même loi, on a :

$$\begin{cases} E(X_2 - X_1) = E(X_1) \\ E(N+1-X_2) = E(X_1) \end{cases} \underset{\text{lin. de l'esp.}}{\Rightarrow} \begin{cases} E(X_2) - E(X_1) = E(X_1) \\ N+1-E(X_2) = E(X_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(X_2) = 2E(X_1) \\ N+1 = 3E(X_1) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} E(X_2) = 2\dfrac{N+1}{3} \\ E(X_1) = \dfrac{N+1}{3} \end{cases}$$

Autre méthode. Si on ne pensait à exploiter les résultats de la question 3. (même si l'énoncé le suggérait), on pouvait aussi faire un calcul direct (mais c'était plus long). Faisons le par exemple pour $E(X_1)$:

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \sum_{i=1}^{N-1} iP([X_1 = i]) = \sum_{i=1}^{N-1} i\frac{2(N-i)}{N(N-1)} = \frac{2}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1} i - \frac{2}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N-1} i^2 \\ &= \frac{2}{N-1}\frac{N(N-1)}{2} - \frac{2}{N(N-1)}\frac{(N-1)N(2N-1)}{6} = N - \frac{2N-1}{3} \boxed{= \frac{N+1}{3}}. \end{aligned}$$

(b) De même $V(X_1)$ et $V(X_2)$ existent bien car les variables sont finie. Et puisque $N+1-X_2$ et X_1 ont même loi, on a :

$$V(X_1) = V(N+1-X_2) \overset{(*)}{=} (-1)^2 V(X_2) \boxed{= V(X_2).}$$

Rappel. Calcul de la variance.
Rappelons que si X est une variable aléatoire admettant une variance et si $a, b \in \mathbb{R}$, alors $aX+b$ admet une variance et on a :

$$V(aX+b) = a^2 V(X). \qquad (*)$$

(c) $X_2 - X_1$ ayant même loi que X_1, on a $V(X_2 - X_1) = V(X_1)$. De plus on a :

$$\begin{aligned} V(X_2 - X_1) &= \mathrm{Cov}(X_2 - X_1, X_2 - X_1) \\ &= \mathrm{Cov}(X_2, X_2 - X_1) - \mathrm{Cov}(X_1, X_2 - X_1) \quad \text{par lin. à gauche} \\ &= \mathrm{Cov}(X_2, X_2) - \mathrm{Cov}(X_2, X_1) - \mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{Cov}(X_1, X_1) \quad \text{par lin. à droite} \\ &= V(X_2) - 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + V(X_1) \quad \text{par symétrie} \end{aligned}$$

Ainsi on a $V(X_1) = V(X_1) - 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + V(X_1)$, ce qui donne $\boxed{V(X_1) = 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2).}$

(d) On a :

$$\rho_{X_1,X_2} = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)}\sqrt{V(X_2)}} = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{V(X_1)} \boxed{= \frac{1}{2}.}$$

Puisque $\rho_{X_1,X_2} \neq 0$, on retrouve tout d'abord que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes. De plus ρ_{X_1,X_2} étant > 0, on en déduit que $\boxed{\text{lorsque } X_1 \text{ augmente, } X_2 \text{ a tendance à augmenter.}}$ On pouvait s'y attendre, car plus X_1 est grand, plus X_2 est grand puisque $X_2 > X_1$.

Exercice 2 (Ecricome 2010)

1. **Convergence de la suite** $(u_n)_{n \geq 1}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1[$. On a :

$$1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} \underset{t \neq 1}{=} \frac{1 - t^n}{1 - t}.$$

On obtient :

$$\frac{1}{1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}} - (1 - t) = \frac{1 - t}{1 - t^n} - (1 - t) = (1 - t)\left(\frac{1}{1 - t^n} - 1\right) \boxed{= \frac{(1 - t)t^n}{1 - t^n}.}$$

Soit toujours $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1[$. On a $t^n \leq t$, de sorte que $1 - t \leq 1 - t^n$. Ainsi, on a $0 < \dfrac{1 - t}{1 - t^n} \leq 1$, et donc $0 \leq \dfrac{(1 - t)t^n}{1 - t^n} \leq t^n$ puisque $t^n \geq 0$. On en déduit l'encadrement suivant pour tout $t \in [0, 1[$:

$$0 \leq \frac{1}{1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}} - (1 - t) \leq t^n.$$

Et ces inégalités sont encore vérifiées pour $t = 1$, puisqu'alors $\dfrac{1}{1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}} - (1 - t) = \dfrac{1}{n} \leq 1$. Par croissance et linéarité de l'intégrale, on obtient en intégrant ces inégalités :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}} - \int_0^1 (1 - t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t.$$

Or on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}} = u_n$, $\displaystyle\int_0^1 (1 - t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1 - t)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n + 1}\right]_0^1 = \frac{1}{n + 1}$. On obtient donc :

$$\boxed{0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n + 1}.}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n + 1} = 0$, il vient par théorème des gendarmes que $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to \infty} u_n \text{ existe et vaut } \tfrac{1}{2}.}$

(b) Soit $n \geq 1$. On applique le théorème de changement de variable à l'intégrale v_n. Notons pour commencer que la fonction $u \mapsto \dfrac{u^{\frac{1}{n}} - u^{\frac{2}{n}}}{1-u}$ est continue sur $[0,1[$, et donc que l'intégrale v_n est généralisée en 1.

On pose $\varphi : t \mapsto t^n$. Lorsque $u : 0 \to 1$, on a $t : 0 \to 1$. φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone (croissante) sur $]0,1[$, de sorte que le changement de variable proposé est licite. On a $u = t^n$, d'où $\mathrm{d}u = nt^{n-1}\,\mathrm{d}t$.

Par le théorème de changement de variable, l'intégrale v_n est de même nature que :

$$\int_0^1 \frac{(t^n)^{\frac{1}{n}} - (t^n)^{\frac{2}{n}}}{1-t^n} nt^{n-1}\,\mathrm{d}t = n\int_0^1 \frac{t-t^2}{1-t^n}t^{n-1}\,\mathrm{d}t = n\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^n}t^n\,\mathrm{d}t.$$

Or on a par la question précédente que pour tout $t \in [0,1[$:

$$\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{1-t}{1-t^n}t^n. \qquad (*)$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t)$ étant continue sur $[0,1]$, $t \mapsto \dfrac{1-t}{1-t^n}t^n$ est continue sur $[0,1[$ et prolongeable par continuité en 1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^n}t^n\,dt$ est donc faussement généralisée en 1, elle converge donc.

Par le théorème de changement de variable, l'intégrale v_n converge, et on a :

$$v_n = n\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^n}t^n\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, en intégrant l'égalité $(*)$ entre 0 et 1 (toutes les intégrales convergent d'après ce qui précède), on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^n}t^n\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t)\,\mathrm{d}t \\ &\underset{\text{Tout conv.}}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = u_n - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On peut conclure :

$$v_n = n\left(u_n - \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}.}$$

2. **Résultats intermédiaires.**

(a) Rappelons pour commenter la limite usuelle suivante (donnée par le taux d'accroissement du logarithme en 1) :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$$

Ceci donne le résultat pour $k = 1$. Lorsque $k \geq 2$, on a :

$$\frac{(\ln(x))^k}{x-1} = \frac{\ln(x)}{x-1}(\ln(x))^{k-1} \underset{x\to 1}{\to} 1 \times 0 = 0.$$

Pour résumer, on a donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{(\ln(x))^k}{x-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(b) $f_k : x \mapsto \dfrac{(\ln(x))^k}{x-1}$ est une fonction continue sur l'intervalle $]0,1[$, donc l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(x))^k}{x-1}\,\mathrm{d}x$ est généralisée en 0 et en 1.

En 1, on a vu que f_k admet une limite finie. Elle est donc prolongeable par continuité en 1, et l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{(\ln(x))^k}{x-1}\,\mathrm{d}x$ est faussement généralisée en 1, donc convergente.

En 0, on a :

- $f_k(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ car $\sqrt{x} \times \dfrac{(\ln(x))^k}{x-1} \to \frac{0}{-1} = 0$ par croissances comparées ;
- $\frac{1}{\sqrt{x}} \geq 0$ sur l'intervalle $]0,1/2]$;
- $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ converge (intégrale de Riemann en 0 d'exposant $1/2 < 1$).

Par théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{(\ln(x))^k}{x-1}\,\mathrm{d}x$ converge.

Ainsi $\boxed{\text{l'intégrale } I_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(x))^k}{x-1}\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$

(c) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ (même $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^2$, et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f'(t) = e^t - 2e^{2t}, \quad f''(t) = e^t - 4e^{2t} = e^t(1-4e^t).$$

Soit $x \leq 0$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre 0 et x à l'ordre 1 :

$$|f(x) - f(0) - xf'(0)| \leq \frac{|x|^2}{2!} \sup_{t\in[x,0]} |f''(t)|. \qquad (**)$$

On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = -1$. D'autre part, on a pour tout $t \in [x,0]$:

$$|f''(t)| = |e^t(1-4e^t)| \underset{e^t \leq 1}{=} |1-4e^t|.$$

Or $g : t \mapsto 1 - 4e^t$ est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$, et on a $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 1$ et $g(0) = -3$, de sorte que $|g(t)| \leq 3$ pour tout $t \leq 0$. Ainsi on a $|f''(t)| \leq 3$, et en substituant dans $(**)$:

$$\boxed{\left|e^x - e^{2x} + x\right| \leq \frac{3x^2}{2}.}$$

3. **Application.**

(a) Soit $n \geq 1$, et soit $u \in]0,1[$. Appliquons l'inégalité de la question 2.(c) pour $x = \frac{\ln(u)}{n} \in]-\infty,0]$:

$$\left|e^{\frac{\ln(u)}{n}} - e^{2\frac{\ln(u)}{n}} + \frac{\ln(u)}{n}\right| \leq \frac{3\ln(u)^2}{2n^2},$$

ce qui se récrit :

$$\left|u^{\frac{1}{n}} - u^{\frac{2}{n}} + \frac{\ln(u)}{n}\right| \leq \frac{3\ln(u)^2}{2n^2}. \qquad (***)$$

D'où en divisant par $(1-u) > 0$:

$$0 \leq \left|\frac{u^{\frac{1}{n}} - u^{\frac{2}{n}}}{1-u} + \frac{\ln(u)}{n(1-u)}\right| \leq \frac{3\ln(u)^2}{2n^2(1-u)}.$$

D'après la question 2.(a), l'intégrale $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(u)^2}{(1-u)}\,\mathrm{d}u$ converge. Par théorème de comparaison par inégalité, $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{u^{\frac{1}{n}} - u^{\frac{2}{n}}}{1-u} + \frac{\ln(u)}{n(1-u)}\right)\mathrm{d}u$ converge absolument. Elle converge donc, ce qu'on savait puisqu'elle vaut (par linéarité, tout converge) $v_n + \dfrac{I_1}{n}$. Et on a par inégalité triangulaire (on a montré que toutes les intégrales en jeu convergent) :

$$\left|v_n + \frac{I_1}{n}\right| = \left|\int_0^1 \left(\frac{u^{\frac{1}{n}} - u^{\frac{2}{n}}}{1-u} + \frac{\ln(u)}{n(1-u)}\right)\mathrm{d}u\right| \underset{\text{Inég. triang.}}{\leq} \int_0^1 \left|\frac{u^{\frac{1}{n}} - u^{\frac{2}{n}}}{1-u} + \frac{\ln(u)}{n(1-u)}\right|\mathrm{d}u$$
$$\underset{\text{d'après (***)}}{\leq} \frac{3}{2n^2}\int_0^1 \frac{\ln(u)^2}{1-u}\,\mathrm{d}u.$$

D'où finalement l'inégalité voulue :

$$\boxed{\left|v_n + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u\right| \leq \frac{3}{2n^2}\int_0^1 \frac{(\ln(u))^2}{1-u}\,\mathrm{d}u.}$$

(b) Soit $n \geq 1$. En multipliant l'inégalité précédente par n, on a :

$$|nv_n + I| \leq \frac{3}{2n} I_2.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2n} I_2 = 0$, le théorème des gendarmes nous assure la convergence de la suite (nv_n) vers $-I$. En particulier, on a :

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{I}{n}.}$$

Et comme $u_n - \frac{1}{2} = \dfrac{v_n}{n}$ pour tout $n \geq 1$, on a également l'équivalent :

$$\boxed{u_n - \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{I}{n}.}$$