DM6

Devoir maison à rendre le 15/11/2022

Exercice 1

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.

Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, successivement et **sans remise**, les N boules de cette urne.

Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

1. Soient i et j deux entiers de l'intervalle $[\![1, N]\!]$. Montrer qu'on a :

$$P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq N, \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leq i < j \leq N. \end{cases}$$

2. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_1 et X_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?

3. (a) Montrer que la variable $Y = N + 1 - X_2$ a même loi que X_1.
   (b) Déterminer la loi de la variable $Z = X_2 - X_1$ et la comparer à celle de X_1.

4. À l'aide des résultats de la question 3 :
   (a) Calculer les espérances $E(X_1)$ et $E(X_2)$.
   (b) Montrer l'égalité des variances $V(X_1)$ et $V(X_2)$.
   (c) Établir la relation : $2\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = V(X_1)$ où $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ désigne la covariance des variables X_1 et X_2.
   (d) En déduire la valeur de ρ_{X_1, X_2} et interpréter son signe.

Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les intégrales : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}} \,\mathrm{d}t$ et $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}} - u^{\frac{2}{n}}}{1-u} \,\mathrm{d}u$.

1. **Convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.**
   (a) Vérifier que :

$$\forall n \geq 1, \quad \forall t \in [0, 1[, \quad \frac{1}{1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}} - (1 - t) = \frac{(1-t)\,t^n}{1 - t^n}.$$

   En déduire que : $\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_n - \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{n+1}$.

   Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$?

   (b) En utilisant le changement de variable $u = t^n$, établir que :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}.$$

2. **Résultats intermédiaires.**
   (a) Pour tout entier $k \geq 1$, calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{(\ln(x))^k}{x-1}$.
   (b) Soit k un entier naturel non nul.

   Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(x))^k}{x-1} \,\mathrm{d}x$.

   (c) On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - e^{2x}$.

   À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 1 appliquée à la fonction f, montrer que :

$$\forall x \in]-\infty, 0], \quad \left|e^x - e^{2x} + x\right| \leq \frac{3x^2}{2}.$$

3. **Application.**

   (a) En utilisant la question 2, démontrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad \left| v_n + \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u} \, \mathrm{d}u \right| \leq \frac{3}{2n^2} \int_0^1 \frac{(\ln(u))^2}{1-u} \, \mathrm{d}u.$$

   (b) *On considère l'intégrale* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u} \, \mathrm{d}u$ *que l'on ne cherchera pas à calculer.*

   Donner alors un équivalent de v_n, puis de $u_n - \dfrac{1}{2}$, en fonction de I.
