DM7

Correction du devoir maison

Exercice 1 (Edhec 2015)

1. (a) On a $X(\Omega) = \mathbb{R}$, et donc $Y = |X| \geq 0$, de sorte que $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $x < 0$, on a $F_Y(x) = P(|X| \leq x) = 0$ car $[|X| \leq x]$ est l'évènement impossible.

Soit à présent $x \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) \\ &= P(X \leq x) - P(X < -x) = P(X \leq x) - P(X \leq -x) \text{ car } X \text{ à densité} \\ &= \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 2\Phi(x) - 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

On sait que la fonction Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. On étudie la continuité en 0 (on rappelle de $\Phi(0) = 1/2$) :

$$\lim_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0 = 2\Phi(0) - 1 = F_Y(0) = \lim_{x \to 0^+} F_Y(x).$$

Donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

On a donc montré que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, donc $\boxed{Y \text{ est une variable à densité.}}$

Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$F_Y'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 2\Phi'(x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Ainsi une densité de Y est (en fixant la valeur en 0 arbitrairement) :

$$\boxed{f_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ si } x > 0 \end{cases}}$$

(b) Y admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t) \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$ converge absolument, c'est-à-dire si et seulement si elle converge puisque la fonction intégrée est positive.

La fonction $t \mapsto t e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $[0, +\infty[$, et on a pour tout $A > 0$:

$$\int_0^A t e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^A = 1 - e^{-\frac{A^2}{2}}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} 1 - e^{-\frac{A^2}{2}} = 1$, on en déduit que l'intégrale converge, et qu'elle vaut 1.

Ainsi $\boxed{E(Y) \text{ existe bien}}$, et elle vaut $\boxed{E(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.}$

(c) Y admet une variance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Y(t) \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$ converge absolument, soit si et seulement si cette intégrale converge puisque la fonction intégrée est positive. Soit $A > 0$. On effectue une intégration par partie **sur le segment** $[0, A]$.

$$\begin{array}{c|ccc} + & t & & t e^{-\frac{t^2}{2}} \\ & & \searrow & \\ & & \int & \\ - & 1 & \longleftarrow & -e^{-\frac{t^2}{2}} \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2}}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. On obtient :

$$\int_0^A t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \left[-te^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^A + \int_0^A e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = -Ae^{-\frac{A^2}{2}} + \int_0^A e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{A \to +\infty} -Ae^{-\frac{A^2}{2}} = 0$. D'autre part, on sait que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi} \qquad \text{(densité de la loi normale).}$$

Comme la fonction $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est paire, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. On peut donc conclure que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Ainsi $E(Y^2)$ existe et vaut 1. Donc $\boxed{V(Y) \text{ existe bien}}$ et vaut :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 \boxed{= 1 - \frac{2}{\pi}}$$

Remarque. Autre méthode, en remarquant que $Y^2 = X^2$, on sait que $E(X^2)$ existe (loi normale) et on a donc :

$$E(Y^2) = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1 + 0 = 1.$$

2. (a) La fonction $\varphi(t) = \sqrt{2t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et strictement croissante car la fonction racine carrée l'est. Donc $\boxed{\text{le changement de variable est licite}}$. De plus on a :

$$u = \sqrt{2t} \Rightarrow t = \frac{u^2}{2} \quad \mathrm{d}u = \frac{dt}{\sqrt{2t}}$$

et lorsque $t : 0 \to +\infty$, on a $u : 0 \to +\infty$. On en déduit donc que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}} \mathrm{d}t$ est de même nature que $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u$. Or cette intégrale est convergente puisque c'est une intégrale de Gauss sur $[0, +\infty[$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge également et on a :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u.}$$

(b) On a :

- $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- g est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, comme composée et quotient de fonctions continues qui ne s'annulent pas ;
- On a vu que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(u)\mathrm{d}u = 1$$

Ainsi $\boxed{g \text{ est bien une densité de probabilité.}}$

3. (a) La variable T est bien définie car $Z \geq 0$ presque surement (puisque $P(Z < 0) = \int_{-\infty}^0 g(t)\mathrm{d}t = 0$). De plus, on a $T(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Donc pour tout $x < 0$, on a :

$$F_T(x) = P(T \leq x) = P(\sqrt{2Z} \leq x) = 0.$$

Supposons que $x \geq 0$, on a :

$$F_T(x) = P(\sqrt{2Z} \leq x) = P(2Z \leq x^2) = P\left(Z \leq \frac{x^2}{2}\right) = G(x^2/2)$$

On obtient donc que $\boxed{F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ G(x^2/2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$.

On admet que T est une variable à densité (on pourrait le montrer...). De plus g est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, donc G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur ces intervalles. Il en est donc de même de F_T par composition, et on a pour tout $x \neq 0$:

$$F_T'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xG'(x^2/2) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Une densité possible de T est donc (en fixant arbitrairement la valeur en 0)

$$\boxed{f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ xg(x^2/2) = x\sqrt{\dfrac{2}{\pi x^2}}e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}}.$$

On note donc que $\boxed{T \text{ et } Y \text{ ont la même densité, et donc suivent la même loi.}}$

(b) Comme Y possède une variance, on en déduit que T possède aussi une variance, et donc que $T^2 = 2Z$ admet une espérance. Ainsi $\boxed{Z = \dfrac{T^2}{2} \text{ admet une espérance}}$ qui vaut :

$$E(Z) = E\left(\frac{T^2}{2}\right) = \frac{1}{2}E(T^2) = \frac{1}{2}E(Y^2) \boxed{= 1.}$$

4. On a $Z = \dfrac{T^2}{2}$ et T suit la même loi que $|X|$, donc T^2 suit la même loi que X^2 où $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$. Pour simuler la variable Z, on commence donc par simuler une loi $\mathscr{N}(0,1)$ à l'aide de la commande `grand(1,1,"nor",0,1)`.

```
X = grand(1,1,"nor",0,1)
Z = (X^2)/2
```

Exercice 2 (Ecricome 1997)

Préliminaire

1. On utilise la caractérisation des sous-espaces vectoriels.

   - $0_E \in G$ car $\langle 0_E, u\rangle = 0$.
   - Soient $x_1, x_2 \in G$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a :

   $$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, u\rangle \underbrace{=}_{\text{lin. à gauche}} \lambda_1 \underbrace{\langle x_1, u\rangle}_{=0 \text{ car } x_1 \in G} + \lambda_2 \underbrace{\langle x_2, u\rangle}_{=0 \text{ car } x_2 \in G} = 0.$$

   Ainsi $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ appartient bien à G.

   Donc $\boxed{G \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } E.}$

   Soit $x \in E$. Montrons l'équivalence proposée.

   $\Rightarrow$ Si $x \in G$, alors on a $\langle x, u\rangle = 0$. Et pour tout $y \in F = \text{Vect}(u)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda u$. On a alors :

   $$\langle x, y\rangle \underbrace{=}_{\text{lin. à droite}} \lambda\langle x, u\rangle = 0.$$

   $\Leftarrow$ Supposons que pour tout $y \in F$, on a $\langle x, y\rangle = 0$. Alors en particulier pour $y = u \in F$, on obtient :

   $$\langle x, u\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in G.$$

   D'où l'équivalence souhaitée : $\boxed{x \in G \Leftrightarrow \forall y \in F,\ \langle x, y\rangle = 0.}$

2. Puisque $u \neq 0_E$, la famille (u) est libre. Par le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une $\boxed{\text{base } (e_1, e_2, \ldots, e_n) \text{ de } E \text{ telle que } e_1 = u.}$

   En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à cette famille (qui est bien libre), on obtient une famille orthonormale $\mathscr{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ de E satisfaisant (étant donné la première étape de l'algorithme de Gram-Schmidt) :
$$x_1 = \frac{u}{\|u\|} \in \mathrm{Vect}(u).$$
   Notons enfin que la famille $\mathscr{B}$ est libre en tant que famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul (c'est une famille orthonormée). Étant de cardinal $n = \dim(E)$, $\boxed{\mathscr{B} \text{ est donc une base orthonormée de } E.}$

3. Montrer que $G = \mathrm{Vect}(x_2, \ldots, x_n)$ par double inclusion :

   $\subset$ Soit $x \in G$. Puisque $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E, on a :
$$x = \langle x, x_1\rangle x_1 + \langle x, x_2\rangle x_2 + \cdots + \langle x, x_n\rangle x_n.$$
   Mais $x_1 \in \mathrm{Vect}(u) = F$, de sorte que $\langle x, x_1\rangle = 0$ d'après la question 1. Ainsi, on a :
$$x = \langle x, x_2\rangle x_2 + \cdots + \langle x, x_n\rangle x_n \in \mathrm{Vect}(x_2, \ldots, x_n).$$
   $\supset$ Soit $i \in [\![2, n]\!]$, on a :
$$\langle x_i, u\rangle = \|u\|\langle x_i, x_1\rangle = 0$$
   car la famille $\mathscr{B}$ est orthogonale (et même orthonormale). Ainsi, on a $x_i \in G$ par définition de G. Et comme G est un sous-espace de E d'après la question 1., on en déduit l'inclusion $\mathrm{Vect}(x_2, \ldots, x_n) \subset G$.

   D'où l'égalité $\boxed{G = \mathrm{Vect}(x_2, \ldots, x_n).}$

   Puisque $(x_2, \ldots, x_n)$ est une famille libre (en tant que sous-famille de la famille libre $\mathscr{B}$), on a $\dim(G) = n - 1$ et $\boxed{G \text{ est bien un hyperplan de } E}$. De plus, puisque $\mathscr{B}$ est une base de E, on a :
$$E = \mathrm{Vect}(x_1) \oplus \mathrm{Vect}(x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{Vect}(u) \oplus G = F \oplus G.$$
   Donc $\boxed{G \text{ est supplémentaire à } F.}$

Étude d'un endomorphisme de E

4. φ est bien à valeurs dans E. Il suffit donc de montrer que φ est linéaire. Soit pour cela $x_1, x_2 \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= 2\frac{\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u - (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \underbrace{=}_{\text{lin. à gauche}} 2\lambda_1\frac{\langle x_1, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u - \lambda_1 x_1 + 2\lambda_2\frac{\langle x_2, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u - \lambda_2 x_2 \\ &= \lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2)\end{aligned}$$
   $\boxed{\varphi \text{ est bien un endomorphisme de } E.}$

   Soit $x \in E$. On a :
$$\begin{aligned}\varphi \circ \varphi(x) &= \varphi\left(2\frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u - x\right) = 2\frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\varphi(u) - \varphi(x) \quad \text{car } \varphi \text{ lin.} \\ &= 2\frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\left(2\frac{\langle u, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u - u\right) - 2\frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u + x = 2\frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u - 2\frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u + x = x\end{aligned}$$
   Ainsi on a $\boxed{\varphi \circ \varphi = id_E.}$

5. On a $u \neq 0_E$ par hypothèse et :
$$\varphi(u) = 2\frac{\langle u, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u - u = u.$$
   Donc $\boxed{u \text{ est un vecteur propre de } \varphi, \text{ associé à la valeur propre } 1.}$

6. Soit $x \in G$. On a $\langle x, u\rangle = 0$, de sorte que :

$$\varphi(x) = 2\frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u - x = -x.$$

Donc $G \subset E_{-1}(\varphi)$, de sorte qu'on a $\dim(E_{-1}(\varphi)) \geq \dim(G) = n-1$. Ainsi $\boxed{-1 \text{ est valeur propre de } \varphi.}$

Montrons l'inclusion réciproque $E_{-1}(\varphi) \subset G$. Soit $x \in E_{-1}(\varphi)$, on a :

$$\varphi(x) = -x \quad \Rightarrow \quad 2\frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u = 0_E \quad \underset{u \neq 0_E}{\Rightarrow} \quad \frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle} = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x, u\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in G.$$

Donc on a $\boxed{E_{-1}(\varphi) = G.}$

Autre méthode. On a d'après ce qui précède que :

$$(n-1) + 1 \leq \dim(E_{-1}(\varphi) + \dim(E_1(\varphi)) \underset{\text{cours}}{\leq} n.$$

On déduit de ces inégalités que :

- $\dim(E_{-1}(\varphi)) = n-1$, et puisque $G \subset E_{-1}(\varphi)$ et que $\dim(G) = n-1$, on a $G = E_{-1}(\varphi)$.
- $\dim(E_1(\varphi)) = 1$, et puisque $u \in E_1(\varphi)$, on a $E_{-1}(\varphi) = \mathrm{Vect}(u) = F$.
- $\mathrm{Spec}(\varphi) = \{-1, 1\}$.

On obtient en particulier aussi les résultats de la question suivante par cette méthode.

7. Puisque $\varphi \circ \varphi = id_E$, le polynôme $P = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est annulateur de φ. Les valeurs propres **possibles** de φ sont donc 1 et -1. Et on a vu que 1 et -1 sont effectivement bien des valeurs propres de φ. Donc on a $\boxed{\mathrm{Spec}(\varphi) = \{-1, 1\}}$.

D'autre part, on a $\dim(E_{-1}(\varphi)) = \dim(G) = n-1$ et $\dim(E_1(\varphi)) \geq 1$, d'où :

$$(n-1) + 1 \leq \dim(E_{-1}(\varphi) + \dim(E_1(\varphi)) \underset{\text{cours}}{\leq} n.$$

En reprenant l'argument évoqué plus haut, on a $\dim(E_1(\varphi)) = 1$, et puisque $u \in E_1(\varphi)$, on a $E_{-1}(\varphi) = \mathrm{Vect}(u) = F$.

Puisque $\dim(E_{-1}(\varphi) + \dim(E_1(\varphi)) = n$ et que $E_1(\varphi)$ et $E_{-1}(\varphi)$ sont en somme directe (car se sont des sous-espaces propres de φ associés à des valeurs propres distinctes), on en déduit que :

$$\boxed{E = E_1(\varphi) \oplus E_{-1}(\varphi) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\varphi)} E_\lambda(\varphi).}$$

8. Soit $(z_1, z_2) \in E^2$. Puisque $E = F \oplus G$, il existe $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G \times F$ tels que :

$$z_i = x_i + y_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2.$$

On a alors :

$$\langle \varphi(z_1), \varphi(z_2)\rangle \underset{\text{lin. de } \varphi}{=} \langle \varphi(x_1) + \varphi(y_1), \varphi(x_2) + \varphi(y_2)\rangle = \langle -x_1 + y_1, -x_2 + y_2\rangle$$

car $x_1, x_2 \in G = E_{-1}(\varphi)$ et $y_1, y_2 \in F = E_1(\varphi)$. Par bilinéarité du produit scalaire, on en déduit que :

$$\langle \varphi(z_1), \varphi(z_2)\rangle = \langle x_1, x_2\rangle - \langle \underbrace{x_1}_{\in G}, \underbrace{y_2}_{\in F}\rangle - \langle \underbrace{y_1}_{\in F}, \underbrace{x_2}_{\in G}\rangle + \langle y_1, y_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle \quad \text{car} \quad G \perp F.$$

D'autre part on a, toujours par bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle z_1, z_2\rangle = \langle x_1 + y_1, x_2 + y_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle + \langle \underbrace{x_1}_{\in G}, \underbrace{y_2}_{\in F}\rangle + \langle \underbrace{y_1}_{\in F}, \underbrace{x_2}_{\in G}\rangle + \langle y_1, y_2\rangle \underset{G \perp F}{=} \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle.$$

Ainsi, on a bien que $\langle \varphi(z_1), \varphi(z_2)\rangle = \langle z_1, z_2\rangle$. $\boxed{\varphi \text{ conserve le produit scalaire.}}$

Pour tout $x \in E$, on a :

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{\langle \varphi(x), \varphi(x)\rangle} \underset{\varphi \text{ conserve le prod. scal.}}{=} \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|.$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ conserve la norme.}}$