DM7

Devoir maison à rendre le 12/12/2022

Exercice 1

On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite (espérance nulle et variance égale à 1) et on note Φ la fonction de répartition de X.
On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note F_Y sa fonction de répartition.

1. (a) Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$. En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y.
   (b) Montrer que Y admet une espérance et donner sa valeur.
   (c) Montrer que Y admet une variance et donner sa valeur.
2. On considère la fonction g définie par :
$$g(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi\, x}} \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et} \quad g(x) = 0 \quad \text{si } x \leq 0.$$
   (a) Vérifier, en justifiant que l'on peut procéder au changement de variable $u = \sqrt{2t}$, que :
$$\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$$
   (b) En déduire que g peut être considérée comme une densité.

   On considère dans la suite une variable aléatoire Z de densité g, et on note G sa fonction de répartition.
3. (a) On pose $T = \sqrt{2Z}$. On admet que T est une variable aléatoire à densité. Exprimer la fonction de répartition F_T de T en fonction de G, puis en déduire une densité f_T de T et vérifier que T suit la même loi que Y.
   (b) En déduire que Z possède une espérance et donner sa valeur.
4. On rappelle qu'en `Python`, la commande `rd.normal(m,s)` simule une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(m, s^2)$.
   Écrire une (ou des) commande(s) `Python` utilisant `rd.normal` et permettant de simuler la variable aléatoire Z.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension n, dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et dont la norme associée est notée $\| \cdot \|$. Soit u un vecteur non nul de E, et soit $F = \text{Vect}(u)$.
On pose $G = \{x \in E,\ \langle x, u \rangle = 0\}$.

Préliminaire

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et que pour $x \in E$, on a :
$$x \in G \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in F,\ \langle x, y \rangle = 0.$$
2. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $e_1 = u$.
   En déduire qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ de E telle que $x_1 \in \text{Vect}(u)$.
3. Montrer qu'avec les notations de la question précédente, $G = \text{Vect}(x_2, \ldots, x_n)$. En déduire que G est un hyperplan de E, supplémentaire à F.

Étude d'un endomorphisme de E

Soit φ l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = 2\frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u - x.$$

4. Montrer que φ est un endomorphisme de E tel que $\varphi \circ \varphi = id_E$.
5. Montrer que u est un vecteur propre de φ, associé à une valeur propre que l'on déterminera.
6. Pour $x \in G$, calculer $\varphi(x)$. En déduire une autre valeur propre de φ, et déterminer le sous-espace propre associé.
7. En déduire $\mathrm{Spec}(\varphi)$, puis que $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\varphi)} E_\lambda(\varphi)$.
8. Montrer que φ conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$\forall (z_1, z_2) \in E^2, \quad \langle \varphi(z_1), \varphi(z_2)\rangle = \langle z_1, z_2\rangle.$$

On pourra à cet effet utiliser le résultat de la question 3.

En déduire que φ conserve la norme, c'est-à-dire que : $\forall x \in E,\ \|\varphi(x)\| = \|x\|$.
