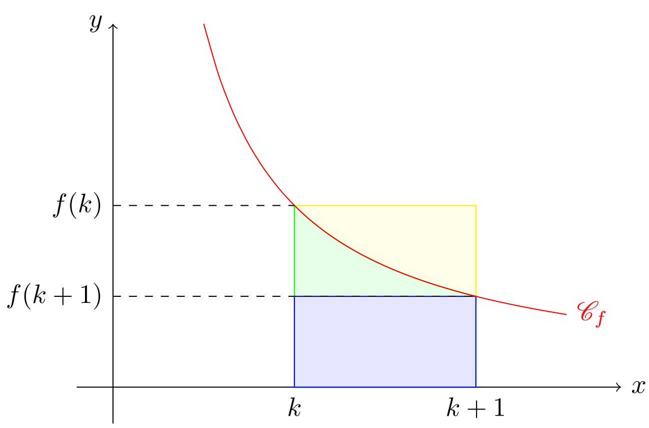
DM8

Correction du devoir maison

Exercice 1 (Edhec 2003)

1. (a) Pour tout $p \leq k \leq n-1$, on a par décroissance de f que :
$$\forall t \in [k, k+1], \quad f(k+1) \leq f(t).$$
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :
$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Sommons ces inégalités pour $k = p, \ldots, n-1$:
$$\sum_{k=p}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=p}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t$$
par la relation de Chasles. Enfin on a en effectuant un glissement d'indice :
$$\sum_{k=p}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=p+1}^{n} f(k) = S_n - f(p).$$
Ainsi on a :
$$\boxed{\forall n \geq p, \quad S_n - f(p) \leq \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t.}$$
(b) Puisque f est une fonction continue et positive, on a pour tout $n \geq p$:
$$S_n \leq \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(p) \leq \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}_{\geq 0} + f(p) \leq \int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + f(p).$$
La série $\sum_{n\geq p} f(n)$ est à termes positifs (car f est positive), et on vient de montrer que la suite (S_n) de ces sommes partielles est majorée. Par le théorème de la limite monotone, la série $\boxed{\sum_{n\geq p} f(n) \text{ converge donc.}}$

2. (a) Utilisons de nouveau la décroissance de la fonction f. Pour tout $n \geq p$ et pour tout $k \geq n$, on a :
$$\forall t \in [k, k+1], \quad f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$
Par croissance de l'intégrale, on obtient :
$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t = f(k). \qquad (*)$$
Ces inégalités $(*)$ peuvent aussi se retrouver géométriquement :



L'air du rectangle bleu ci-dessous est plus petit que l'air du domaine vert, lui même plus petit que l'air du rectangle jaune. Or ces aires valent respectivement $f(k+1)\times(k+1-k) = f(k+1)$, $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $f(k)\times(k+1-k) = f(k)$.

Soit $N \geq n$. Sommons les inégalités $(*)$ pour tout $n \leq k \leq N$:

$$\sum_{k=n}^{N} f(k+1) \leq \sum_{k=n}^{N} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{N} f(k),$$

ce qui donne par glissement d'indice dans la première expression, et par relation de Chasles dans la deuxième :

$$\sum_{k=n+1}^{N+1} f(k) \leq \int_n^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{N} f(k).$$

Par passage à la limite dans les inégalités, on obtient en faisant tendre N vers $+\infty$ (tout converge !) :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \underbrace{\leq}_{(*)} \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \underbrace{\leq}_{(**)} \sum_{k=n}^{+\infty} f(k) = R_n + f(n),$$

ce qui se réécrit :

$$\boxed{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \underbrace{\leq}_{(**)} R_n \underbrace{\leq}_{(*)} \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

(b) Notons tout d'abord que f étant **continue** et **strictement positive** sur $[p,+\infty[$, on a $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t > 0$ pour tout $n \geq p$ par stricte positivité de l'intégrale. En divisant l'inégalité de la question précédente par cette quantité, on obtient donc :

$$1 - \frac{f(n)}{\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} \leq \frac{R_n}{\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} \leq 1.$$

Supposons que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$ existe et vaut 1, ce qui se réécrit :

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi une condition suffisante pour que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est que :

$$\boxed{f(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)}.$$

3. Dans cette question, pour tout réel x de $[2,+\infty[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$.

(a) La fonction f est bien continue comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas, strictement positive sur $[2,+\infty[$. Elle est également décroissante car $x \mapsto x\ln(x)^2$ est croissante et positive sur $[2,+\infty[$ (comme produit de fonctions qui le sont).

Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^2}$ converge. La fonction intégrée étant « de la forme $\dfrac{u'}{u^2} = u'u^{-2}$ », on a pour tout $A > 2$:

$$\int_2^A \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^2} = \left[\frac{(\ln(t))^{-1}}{-1}\right]_2^A = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(A)} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ln(2)}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^2}$ converge donc bien (et vaut $\dfrac{1}{\ln(2)}$).

Reste à étudier si f satisfait la condition de la question 2.(b). On a par le même calcul que précédemment :

$$\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^2} = \frac{1}{\ln(n)}$$

On a donc :

$$\frac{f(n)}{\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^2}} = \frac{1}{n\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc bien :

$$f(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

D'où le résultat voulu.

(b) Par la question 2.(b), on a donc :

$$\boxed{R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(n)}.}$$

(c) Procédons par théorème de comparaison.

- $nR_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par théorème de comparaison, ce qui se réécrit $\dfrac{1}{n} = o(R_n)$;
- $R_n \geq 0$ pour tout $n \geq 2$;
- $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

Par théorème de comparaison, la série $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 2} R_n \text{ diverge.}}$

Autre méthode. La fonction ln est concave (car de classe $\mathscr{C}^2$ et de dérivée seconde $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ négative). Sa courbe est en dessous de ses tangentes, en particulier de sa tangente en 1 d'équation $y = x - 1$, de sorte que :

$$\forall x > 0, \quad \ln(x) \leq x - 1.$$

On en déduit que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{\ln(n)}.$$

Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1}$ diverge (série harmonique), il en est de même de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n)}$, et de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} R_n$ par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

Exercice 2 (Edhec 2010)

1. (a) Commençons par rappeler que X et Y sont des variables à densité, de densité :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1/a \text{ si } t \in [0, a[; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$Z = -Y$ étant une fonction affine d'une variable à densité (de la forme $Z = aY + b$ avec $a = -1$ et $b = 0$), elle est à densité, de densité donnée par la formule :

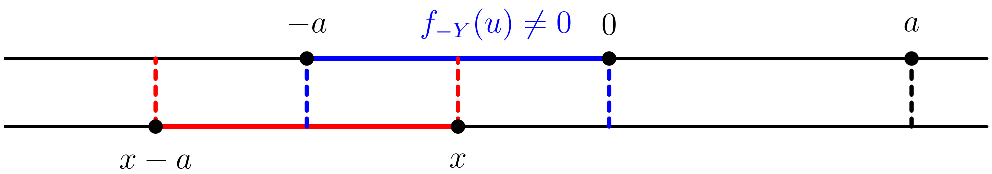
$$f_Z : t \mapsto \frac{1}{|a|} f_Y\left(\frac{t-b}{a}\right) = f_Y(-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -t \notin [0, a] \\ 1 & \text{si } -t \in [0, a] \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [-a, 0] \\ \frac{1}{a} & \text{si } t \in [-a, 0] \end{cases}.$$

(b) On procède en quatre étapes.

- **Étape 1 : Justification du produit de convolution.**
Comme X et Y sont indépendantes, il en est de même de X et $-Y$ par lemme de coalition. De plus la densité de $-Y$ (ou celle de X) est bornée. Par le théorème du cours, $X - Y$ est donc une variable à densité, de densité définie (et continue) sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x-t)\,\mathrm{d}t$$

- **Étape 2 : Réduction du domaine d'intégration.**
Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. f_X étant nulle en dehors de $[0, a[$, on a :
$$g(x) = \int_0^a f_X(t) f_{-Y}(x-t)\,\mathrm{d}t.$$
Effectuons le changement de variable $u = x - t$ (affine donc licite). Lorsque $t : 0 \to a$, $u : x \to x - a$. En notant que $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}t$, on obtient après changement de variable :
$$g(x) = \int_x^{x-a} f_X(x-u) f_{-Y}(u)(-\,\mathrm{d}u = \int_{x-a}^{x} f_X(x-u) f_{-Y}(u)\,\mathrm{d}u.$$

- **Étape 3 : Détermination de $[x-a, x] \cap]-a, 0]$.**
On obtient le diagramme suivant :



On obtient à l'aide de la représentation graphique que :
$$[x-a, x] \cap]-a, 0] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \leq -a \text{ ou } x > a, \\ ]-a, x] & \text{si } x \in]-a, 0] \\ [x-a, 0] & \text{si } x \in]0, a]. \end{cases}$$

- **Étape 4 : Calcul de $g(x)$.**
On a donc quatre cas à considérer :
  - Si $x \leq -a$ ou $x > a$, alors $[x-a, x] \cap]-a, 0] = \emptyset$ et $g(x) = 0$.
  - Si $x \in]-a, 0]$, on obtient :
$$g(x) = \int_{-a}^{x} \frac{\mathrm{d}u}{a^2} = \frac{x+a}{a^2} = \frac{a-|x|}{a^2}.$$

– Si $x \in]0,a]$, on a dans ce cas :

$$g(x) = \int_{x-a}^{0} \frac{\mathrm{d}u}{a^2} = \frac{a-x}{a^2} = \frac{a-|x|}{a^2}.$$

Finalement, on obtient que $\boxed{g\colon x \mapsto \begin{cases} \frac{a-|x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a,a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ est une densité de } X-Y.}$

2. (a) On a $(X-Y)(\Omega) = [-a,a]$ à partir de la densité g. On en déduit que $Z(\Omega) = [0,a]$. En particulier, on a $H(x) = 0$ pour tout $x < 0$ et $H(x) = 1$ pour tout $x > a$. Soit à présent $x \in [0,a]$. On a :

$$\begin{aligned} H(x) &= P(Z \leq x) = P(|X-Y| \leq x) = P(-x \leq X-Y \leq x) \\ &= P(X-Y \leq x) - P(X-Y < -x) = G(x) - G(-x) \end{aligned}$$

car $X-Y$ est une variable à densité. On obtient donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ G(x) - G(-x) & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}}$$

(b) On admet que Z est une variable aléatoire à densité (ce qu'on aurait d'ailleurs pu démontrer en vérifiant que H est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points 0 et a). On obtient en dérivant que pour tout $x \neq 0, a$:

$$H'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ g(x) + g(-x) & \text{si } x \in]0,a[\\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}.$$

Ainsi une densité de Z est donnée par (en fixant arbitrairement les valeurs en 0 et a) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\frac{a-|x|}{a^2} & \text{si } x \in [0,a] \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$$

Comme $x \in [0,a]$ est positif, on en conclut que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \frac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0,a] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}.$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Z admet un moment d'ordre k si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{2t^k(a-t)}{a^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Or c'est l'intégrale d'une fonction continue sur $[0,a]$, donc elle converge bien absolument. Ainsi Z admet un moment à tous les ordres. En particulier, Z admet une espérance et une variance. De plus on a :

$$\begin{aligned} E(Z^k) &= \int_0^a x^k h(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{a^2}\int_0^a \left[ax^k - x^{k+1}\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{a^2}\left[\frac{ax^{k+1}}{k+1} - \frac{x^{k+2}}{k+2}\right]_0^a = \frac{2}{a^2}\left[\frac{a^{k+2}}{k+1} - \frac{a^{k+2}}{k+2}\right] = \frac{2a^k}{(k+1)(k+2)} \\ V(Z) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2a^2}{12} - \left(\frac{2a}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{9} \end{aligned}$$

On obtient donc $\boxed{E(Z) = \frac{a}{3}}$ et $\boxed{V(Z) = \frac{a^2}{18}}$.

4. On peut procéder ainsi :

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
def simulation(a):
        x=a*rd.random()
        y=a*rd.random()
        z=np.abs(x-y)
        return z
```

Problème 1 (EM Lyon 2013)

Partie I : Un exemple

1. On effectue le produit matriciel :

$$A_0 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\2 & -2 & 4 & -2\\3 & -3 & 6 & -3\\4 & -4 & 8 & -4\end{pmatrix}}.$$

On observe que toutes les colonnes de la matrice sont proportionnelles et non toutes nulles. Donc $\mathrm{rg}(A_0) = 1$, $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } A_0}$ et on a $\dim(E_0(A_0)) = 4 - 1 = 3$.

Soit $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$X \in E_0(A_0) \Leftrightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0.$$

Il s'agit d'un système linéaire d'une équation à 4 inconnues. Il y a donc une inconnue principale, x_1 par exemple, et trois inconnues paramètres, x_2, x_3, x_4. On a donc :

$$E_0(A_0) = \left\{\begin{pmatrix}x_2 - 2x_3 + x_4\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\ x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Ces trois vecteurs engendrent $E_0(A_0)$. Ils forment une famille libre de plus car ils sont échelonnés.

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est donc une base de } E_0(A_0).}$$

2. (a) On a :

$$A_0U_0 = U_0\,{}^tV_0U_0 = U_0\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = U_0(1 - 2 + 6 - 4)\ \boxed{= U_0.}$$

(b) On déduit du calcul précédent que 1 est valeur propre de A_0 et que $U_0 \in E_1(A_0)$. Ainsi on a $\dim(E_1(A_0)) \geq 1$. De plus on a vu que $\dim(E_0(A_0)) = 3$ et on sait par le cours que $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(A_0)} \dim(E_\lambda(A_0)) \leq 4$. On en déduit donc que :

$$4 = 3 + 1 \leq \dim(E_0(A_0)) + \dim(E_1(A_0)) \leq \sum_{\lambda \in Sp(A_0)} \dim(E_\lambda(A_0)) \leq 4.$$

On obtient donc que $\mathrm{Sp}(A_0) = \{0, 1\}$, $\dim(E_1(A_0)) = 1$ et $\dim(E_0(A_0)) + \dim(E_1(A_0)) = 4$. Donc $\boxed{A_0 \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).}$

(c) Puisque $\dim(E_1(A_0)) = 1$ et que $U_0 \in E_1(A_0)$, on a $E_1(A_0) = \mathrm{Vect}(U_0)$. (U_0) est donc une base de $E_1(A_0)$, et on a obtenu une base du sous-espace propre $E_0(A_0)$ à la question 1.

Avec ce qui précède, on a $\boxed{A_0 = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

On calcule P^{-1} par l'algorithme de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_2 \leftarrow L_3 \leftarrow L_4 \leftarrow L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_1 + 2L_2 - L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 4 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 4 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 4 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Donc on retrouve que P est inversible (ce qu'on savait puisque c'est une matrice de passage entre deux bases) et on a $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 & 2 \\ -3 & 3 & -5 & 3 \\ -4 & 4 & -8 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$.

Partie II : Une caractérisation des matrices de rang 1

3. (a) Rappelons que pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, on définit la matrice $A \times B := (c_{i,j}) \in \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, r]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Ici on a $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et ${}^tV \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ donc par définition du produit matriciel, le produit $U\,{}^tV$ a un sens, et $\boxed{\text{c'est une matrice de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$ De plus on a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\boxed{(U\,{}^tV)_{i,j} = \sum_{k=1}^{1} u_{i,k}v_{k,j} = u_iv_j.}$$

(b) On déduit du calcul précédent que :

$$\mathrm{Tr}(U\,{}^tV) = \sum_{k=1}^{n}(U\,{}^tV)_{k,k} \boxed{= \sum_{k=1}^{n} u_kv_k.}$$

(c) Notons C_j la j-ème colonne de la matrice $U\,{}^tV$. Alors on a :

$$C_j = \begin{pmatrix} u_1v_j \\ \vdots \\ u_nv_j \end{pmatrix} = v_j \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = v_jU.$$

Ainsi toutes les colonnes sont colinéaires à U. Donc on a $\mathrm{rg}(U\,{}^tV) \leq 1$. Comme de plus U et V sont non nuls, l'un des coefficients de $U\,{}^tV$ est non nul. Donc $\boxed{U\,{}^tV \text{ est de rang } 1.}$

4. (a) Puisque A est de rang 1, elle est en particulier non nulle. Soit $j_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que la colonne $C_{j_0}(A)$ de A est non nulle. Puisque A est de rang 1, on a :

$$\dim(\mathrm{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A))) \underset{\mathrm{rg}(A)=1}{=} 1 \underset{C_{j_0}(A) \neq 0_{n,1}}{=} \dim(\mathrm{Vect}(C_{j_0}(A)))$$

et donc (puisque $\mathrm{Vect}(C_{j_0}(A)) \subset \mathrm{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A))$) :

$$\mathrm{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A)) = \mathrm{Vect}(C_{j_0}(A)).$$

En particulier pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $C_j(A)$ appartient à $\mathrm{Vect}(C_{j_0}(A))$ et il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ vérifiant $\boxed{C_j(A) = \alpha_jC_{j_0}(A).}$ Notons en particulier que $\alpha_{j_0} = 1 \neq 0$.

(b) Notons alors $U = C_{j_0}(A)$ et $V = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a :

$$a_{i,j} = (C_j(A))_i = (\alpha_jC_{j_0}(A))_i = \alpha_j(C_{j_0}(A))_i = v_ju_i = (U\,{}^tV)_{i,j}.$$

Ainsi on a bien l'existence de deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $\boxed{A = U\,{}^tV.}$

5. On déduit ainsi des question 3. et 4. qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices colonnes U et V non nulles telles que $A = U\,{}^tV$.

Partie III : Une application en probabilités

6. D'après 3., on a $U_X\,{}^tU_Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$(U_X\,{}^tU_Y)_{i,j} = u_iv_j = P(X=i)P(Y=j)$$

Les variables X et Y étant supposées indépendantes, on a :

$$P(X=i)P(Y=j) = P(X=i, Y=j) = m_{i,j}.$$

Ainsi on en déduit que $\boxed{U_X\,{}^tU_Y = M}$ et donc que $\boxed{M \text{ est de rang } 1}$ d'après la question 3.

7. (a) On a par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements $([Y=j])_{j=1,\dots,n}$ que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$(U_X)_{i,1} = P(X=i) = \sum_{j=1}^{n} P([X=i]\cap[Y=j]) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$$

D'où l'égalité $\boxed{C_1(M)+\cdots+C_n(M) = U_X.}$

(b) Tout d'abord, le vecteur U_X est non nul puisque la somme de ses composantes vaut 1. De plus la matrice M est de rang 1 par hypothèse, donc :

$$\dim(\mathrm{Vect}(C_1(M),\dots,C_n(M))) = 1.$$

On a également l'inclusion suivante d'après la question précédente :

$$\mathrm{Vect}(U_X) \subset \mathrm{Vect}(C_1(M),\dots,C_n(M)).$$

Comme $\dim(\mathrm{Vect}(U_X)) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1(M),\dots,C_n(M)))$, on en déduit l'égalité de ces sous-espaces :

$$\mathrm{Vect}(U_X) = \mathrm{Vect}(C_1(M),\dots,C_n(M)).$$

Ainsi pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $C_j(M)$ appartient à $\mathrm{Vect}(U_X)$, et il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{C_j(M) = \beta_j U_X.}$

(c) Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a vu qu'il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(M) = \beta_j U_X$. Faisons la somme S des coefficients de ce vecteur. On a

$$S = \sum_{i=1}^{n} (C_j(M))_i = \sum_{i=1}^{n} P([X=i]\cap[Y=j]) = P([Y=j])$$

d'après la formule des probabilités totales avec pour SCE $([X=i])_{i=1,\dots,n}$. D'autre part on a :

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\beta_j U_X)_i = \beta_j \sum_{i=1}^{n} P(X=i) = \beta_j$$

car $([X=i])_{i=1,\dots,n}$ est un système complet d'évènements.

On obtient bien que : $\boxed{\forall j \in [\![1;n]\!],\ P(Y=j) = \beta_j.}$

(d) Pour tout $i,j \in [\![1,n]\!]$, on a finalement que

$$(C_j(M))_i = \beta_j (U_X)_i \text{ soit encore } P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j).$$

Ainsi $\boxed{\text{les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ sont bien indépendantes.}}$

Remarque. On a donc montré que X et Y sont indépendantes si et seulement si M est de rang 1.

Partie IV : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

8. A étant de rang 1, $\boxed{0 \text{ est bien valeur propre de } A}$ et on a par le théorème du rang :

$$\boxed{\dim(E_0(A)) = n - \mathrm{rg}(A) = n-1.}$$

9. On a :

$$^{t}VU = \left(\sum_{k=1}^{n} v_k u_k\right) = (\mathrm{Tr}(U\ {}^{t}V)) \boxed{= (a)}$$

d'après la question 3.(b). On en déduit que :

$$A^2 = U\ {}^{t}VU\ {}^{t}V = U(\ {}^{t}VU)\ {}^{t}V = U(a)\ {}^{t}V = aU^{t}V \boxed{= aA.}$$

10. On suppose que $a = 0$. Alors $A^2 = 0_{n,n}$ d'après la question précédente, et X^2 est un polynôme annulateur de A. Les valeurs propres possibles se trouvent parmi les racines de X^2. Ainsi A n'a qu'une seule valeur propre possible qui est 0. Et c'est bien une valeur propre d'après la question 8. Comme $\dim(E_0(A)) = n - 1 < n$, on peut donc conclure que $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

11. On suppose $a \neq 0$. On a :
$$AU = U\ {}^tVU = U(a)\ \boxed{= aU.}$$
Puisque U est non nulle, on en déduit que U est un vecteur propre de A de valeur propre associée a. En particulier $\dim(E_a(A)) \geq 1$. On a donc :
$$n = (n-1) + 1 \leq \dim(E_0(A)) + \dim(E_a(A)) \leq \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim(E_\lambda(A)) \leq n.$$
Ainsi on obtient que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, a\}$, $\dim(E_a(A) = 1$ et que $\dim(E_0(A)) + \dim(E_a(A)) = n$. On peut donc conclure que $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

12. On a donc montré qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Partie V : Construction d'un produit scalaire et d'un endomorphisme symétrique

13. On a pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:
$$(\ {}^tAA)_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} (\ {}^tA)_{i,j}(A)_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}a_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2.$$
On en déduit que :
$$Tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tAA)_{i,i}\ \boxed{= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2.}$$

14. Montrons que l'application $(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle = Tr(\ {}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
    - *linéarité à gauche :* soient $(M_1, M_2, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^3$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned}
\langle \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2, N \rangle &= \mathrm{Tr}(\ {}^t(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)N) \\
&= \mathrm{Tr}((\lambda_1\ {}^tM_1 + \lambda_2\ {}^tM_2)N) \text{ par lin. de la transposition} \\
&= \mathrm{Tr}(\lambda_1\ {}^tM_1N + \lambda_2\ {}^tM_2N) \\
&= \lambda_1 \mathrm{Tr}(\ {}^tM_1N) + \lambda_2 \mathrm{Tr}(\ {}^tM_2N) \text{ par lin. de la trace} \\
&= \lambda_1 \langle M_1, N \rangle + \lambda_2 \langle M_2, N \rangle
\end{aligned}$$
D'où la linéarité à gauche.
    - *symétrie :* soient $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :
$$\langle N, M \rangle = \mathrm{Tr}(\ {}^tNM) = \mathrm{Tr}(\ {}^t(\ {}^tMN)) = \mathrm{Tr}(\ {}^tMN) = \langle M, N \rangle$$
D'où la symétrie, et par conséquent la linéarité à droite également.
    - *Positif :* pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :
$$\langle A, A \rangle = \mathrm{Tr}(\ {}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 \geq 0$$

- *Défini positif :* pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(\ {}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{j,i}^2}_{\geq 0} = 0 \\ \Leftrightarrow \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ a_{j,i} = 0 \\ \Leftrightarrow A = 0_{n,n}\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire.}}$

15. On a :

$$ {}^tS = {}^t\ (V{}^tV) = {}^t\ ({}^tV){}^tV = V{}^tV \boxed{= S}$$

donc la matrice S est symétrique. De plus, on a :

$$S^2 = V{}^tVV{}^tV = V\left(\sum_{j=1}^{n} v_j^2\right)\ {}^tV = V(1)\ {}^tV = V\ {}^tV \boxed{= S.}$$

16. (a) On vérifie aisément que Φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\langle \Phi(M), N\rangle &= \mathrm{Tr}(\ {}^t(\Phi(M))N) = \mathrm{Tr}(\ {}^t(SM)N) = \mathrm{Tr}(\ {}^tM\ {}^tSN) = \mathrm{Tr}(\ {}^tMSN) \\ &= \mathrm{Tr}({}^tM\Phi(N)) = \langle M, \Phi(N)\rangle\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme symétrique de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ muni de } \langle\cdot,\cdot\rangle.}$

(b) On a pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\Phi^2(M) = \Phi(\Phi(M)) = \Phi(SM) = S^2M = SM = \Phi(M)$$

Ainsi on a :

$$0_{n,n} = \Phi^2(M) - \Phi(M) = (\Phi^2 - \Phi)(M).$$

Donc $\boxed{\Phi^2 - \Phi = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))}}$ et $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de Φ. On en déduit que les valeurs propres possibles de Φ sont parmi les racines de $X^2 - X$, c'est-à-dire $\boxed{0 \text{ ou } 1.}$

Montrons que 0 et 1 sont effectivement valeurs propres :

- On a $\Phi(S) = S^2 = S$ et $S \neq 0_n$ car S est de rang 1 (résultat de la partie II). Donc 1 est bien valeur propre de Φ.
- Puisque $\Phi^2 = \Phi$, Φ est un projecteur. Il est en particulier diagonalisable. Supposons que 1 soit sa seule valeur propre. Alors Φ serait l'identité. Or $\Phi(I_n) = SI_n = S \neq I_n$ car $\mathrm{rg}(I_n) = n \neq 1 = \mathrm{rg}(S)$.

Ainsi on a $\boxed{\mathrm{Sp}(\Phi) = \{0, 1\}.}$

(c) Puisque Φ est un projecteur, on sait que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(\Phi)$ et $\mathrm{Ker}(\Phi - e) = \mathrm{Im}(\Phi)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, soit :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\Phi) \oplus \mathrm{Ker}(\Phi - e).$$

Montrons qu'ils sont de plus orthogonaux. Soit pour cela $M \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ et $N \in \mathrm{Ker}(\Phi - e)$ (de telle sorte que $N = \Phi(N)$). On a :

$$\langle M, N\rangle = \langle M, \Phi(N)\rangle \overset{\Phi \text{ sym.}}{=} \langle \Phi(M), N\rangle = \langle 0_{n,n}, N\rangle = 0.$$

Les sous-espaces $\boxed{\mathrm{Ker}(\Phi) \text{ et } \mathrm{Ker}(\Phi - e) \text{ sont donc supplémentaires orthogonaux dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

Autre méthode. Φ étant à la fois un projecteur et un endomorphisme symétrique, c'est un projecteur orthogonal. Par le cours, les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(\Phi)$ et $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Ker}(\Phi - e)$ sont donc supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.