DM8

Devoir maison à rendre le 03/01/2023

Exercice 1

Soit p un entier naturel et f une fonction continue, strictement positive, décroissante sur $[p,+\infty[$ et telle que $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} f(k)$.

1. (a) Utiliser la décroissance de f pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal p, on a : $S_n - f(p) \leq \displaystyle\int_p^n f(t)\mathrm{d}t$.

   (b) En déduire que la série de terme général $f(n)$ est convergente.

On pose désormais, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$.

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on a :

$$\int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t - f(n) \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

   (b) En déduire une condition suffisante portant sur $f(n)$ et $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ pour que : $R_n \underset{+\infty}{\sim} \displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Dans cette question, pour tout réel x de $[2,+\infty[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$.

   (a) Montrer que cette fonction vérifie les quatre hypothèses de l'énoncé ainsi que la condition trouvée à la question 2.(b).

   (b) En déduire un équivalent, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$.

   (c) La série de terme général R_n est-elle convergente ?

Exercice 2

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0,a[$.

On pose $Z = |X-Y|$ et on admet que $-Y$, $X-Y$ et Z sont des variables aléatoires à densité, elles aussi définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. (a) Déterminer une densité de $-Y$.

   (b) En déduire que la variable aléatoire $X-Y$ admet pour densité la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{a-|x|}{a^2} & \text{si } \ x \in [-a,a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   On note G la fonction de répartition de $X-Y$.

2. (a) Exprimer la fonction de répartition H de la variable Z en fonction de G.
   (b) En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par $h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0,a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
3. Montrer que Z possède une espérance et une variance et les déterminer.
4. Écrire une fonction `Python` simulant la variable Z.

Problème

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geq 2$.
On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à une colonne et n lignes, nommées ¡¡ matrices colonnes ¿¿ dans la suite du problème.
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A.
Si $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors ${}^tV$ désigne la matrice transposée de V.
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ alors le coefficient de la ligne numéro i et de la colonne numéro j de A est noté $a_{i,j}$, la matrice A est notée $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.
Si $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors la matrice colonne V est notée $V = (v_i)_{1\leq i\leq n}$.
Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ alors pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, on note $C_j(A)$ la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée des coefficients de la colonne numéro j de A. Ainsi : $C_j(A) = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n}$.

Partie I : Un exemple

Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0{}^tV_0$.

1. Vérifier que $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.
   Montrer que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.
2. (a) Calculer A_0U_0.
   (b) Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.
   (c) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$. Expliciter P^{-1}.

Partie II : Une caractérisation des matrices de rang 1

3. Soient $U = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ et $V = (v_i)_{1\leq i\leq n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier : $U^tV \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Déterminer les coefficients de U^tV à l'aide des coefficients de U et de V.
   (b) Exprimer $\mathrm{Tr}(U^tV)$ à l'aide des coefficients de U et de V.
   (c) Quel est le rang de U^tV ?
4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
   (a) Montrer qu'il existe $j_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ vérifiant :
   $$C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A).$$

(b) En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U\,{}^tV$.

5. Énoncer une caractérisation des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

Partie III : Une application en probabilités

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose de plus : $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$.

On note, pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $m_{i,j} = P((X=i) \cap (Y=j))$, puis $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $U_X = (P(X=i))_{1 \leq i \leq n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $U_Y = (P(Y=i))_{1 \leq i \leq n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

6. On suppose, dans cette question, que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Calculer $U_X\,{}^tU_Y$. En déduire que la matrice M est de rang 1.

7. On suppose, dans cette question, que la matrice M est de rang 1.
   (a) Montrer : $\quad C_1(M) + \cdots + C_n(M) = U_X$.
   (b) En déduire que, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(M) = \beta_j U_X$.
   (c) Montrer : $\forall j \in [\![1;n]\!],\ P(Y=j) = \beta_j$.
   (d) En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Partie IV : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U\,{}^tV$ et on note $a = \mathrm{Tr}(A)$.

8. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

9. Montrer : ${}^tVU = (a)$, puis : $A^2 = aA$.

10. Montrer que si $a = 0$ alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

11. On suppose $a \neq 0$. Calculer AU. Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.

12. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Partie V : Construction d'un produit scalaire et d'un endomorphisme symétrique

13. Vérifier que : $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}({}^tAA) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2$.

14. Montrer que l'application : $(M,N) \mapsto \langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit dorénavant $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de ce produit scalaire.

On considère une matrice colonne $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j^2 = 1$. On note $S = V\,{}^tV$.

15. Montrer que S est une matrice symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que $S^2 = S$.

16. (a) Montrer que l'application $\Phi : M \mapsto SM$ est un endomorphisme symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que :
$$\forall M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle \Phi(M), N\rangle = \langle M, \Phi(N)\rangle.$$
   (b) Vérifier que $\Phi^2 = \Phi$. Que peut-on dire des valeurs propres de Φ ?
   (c) On note e l'application identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(\Phi)$ et $\mathrm{Ker}(\Phi - e)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.