DS1

Correction du devoir surveillé

Exercice 1.1 (ESCP 2013 Voie T)

1. (a) Les relations $\begin{cases} u_{n+3} = 2u_{n+2} - \dfrac{5}{4}u_{n+1} + \dfrac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} = u_{n+2} \\ u_{n+1} = u_{n+1} \end{cases}$ s'écrivent matriciellement sous la forme

$$\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix},$$ c'est-à-dire $\boxed{X_{n+1} = AX_n}$ puisqu'on a $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = A.$

(b) On montre, par récurrence, que, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = A^n X_0$.

Init. La formule est vraie pour $n = 0$: $X_0 = A^0 X_0$ ($A^0 = I$).

Hér. Soit n un entier naturel pour lequel on a $X_n = A^n X_0$. Puisque $X_{n+1} = AX_n$, on a alors :

$$X_{n+1} = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$

La formule est donc encore vraie pour l'entier $n+1$.

On peut alors conclure que, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = A^n X_0$.

2. (a) On trouve $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I.$

On en déduit que $P \times \dfrac{1}{4}Q = \dfrac{1}{4}PQ = I$, ce qui montre que $\boxed{P \text{ est inversible, avec } P^{-1} = \dfrac{1}{4}Q}$.

(b) On trouve $PT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

et $AP = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

On voit que $AP = PT$. En multipliant cette égalité, membre à membre à droite par P^{-1}, on obtient $\boxed{A = PTP^{-1}}$.

On montre alors, par récurrence, que, pour tout entier $n \geq 0$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

Init. La formule est vraie pour $n = 0$: $A^0 = I$ et $PT^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.
On a aussi montré qu'elle est vraie pour $n = 1$: $A^1 = PT^1P^{-1}$.

Hér. On suppose alors que, pour un entier $n \geq 1$, on a $A^n = PT^nP^{-1}$. On en déduit :

$$A^{n+1} = A^nA = \left(PT^nP^{-1}\right)\left(PTP^{-1}\right) = PT^n\left(P^{-1}P\right)TP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$$

car $P^{-1}P = I$. La formule est donc encore vraie pour l'entier $n+1$

Par principe de récurrence, on a $\boxed{A^n = PT^nP^{-1} \text{ entier } n \geq 0}$.

3. Soit D la matrice définie par : $D = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = T - D$.

(a) On a $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'où $\boxed{N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0 \times N^{k-2} = 0_3 \text{ pour tout entier } k \geq 2}$.

(b) On trouve $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND\ (= \frac{1}{2}N)$.

De $N = T - D$, on déduit $T = D + N$. Puisque $DN = ND$ (D et N **commutent**), la formule du binôme donne, pour tout entier $n \geq 2$:

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Puisque, pour tout $k \geq 2$, $N^k = 0$, la somme se réduit aux termes correspondant à $k = 0$ et à $k = 1$.
Puisque $\binom{n}{0} D^n N^0 = D^n$, et $\binom{n}{1} D^{n-1} N = nD^{n-1}N$, on a $T^n = D^n + nD^{n-1}N$.

D étant diagonale, on a $D^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $D^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où

$D^{n-1}N = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il vient :

$$\begin{aligned} T^n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\boxed{T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$. On voit (remplacer n par 0, puis par 1) que la formule est aussi vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq 0$.

(c) On trouve $PT^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix}$

puis

$$A^n = PT^nP^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

D'où $\boxed{A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4 \times 2^n - n - 3 & \frac{3}{2}n - 4 \times 2^n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 4 \times 2^n - 2n - 4 & 3n - 4 \times 2^n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4 \times 2^n - 4n - 4 & 6n - 4 \times 2^n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

4. (a) On obtient u_n en calculant le vecteur-colonne X_n par la formule $X_n = A^n X_0$. Comme $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient X_n en recopiant simplement la première colonne de A^n. Ainsi, $X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4 \times 2^n - n - 3 \\ 4 \times 2^n - 2n - 4 \\ 4 \times 2^n - 4n - 4 \end{pmatrix}$,

et, en particulier ($X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$)

$$\boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 \times 2^n - 4n - 4)\,.}$$

(b) Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$. Comme de plus, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{4}{2^n} = 0$, on a conclut que

$$\boxed{\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 4}$$

5. On peut procéder ainsi.

```python
def suite(n) :
    u = 0
    v = 0
    w = 1
    for k in range(1,n+1):
            t = 2*w-(5/2)*v+(1/4)*u
            u = v
            v = w
            w = t
    return u
```

Exercice 1.2 (Edhec 2018)

1. On applique le théorème de la bijection :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est polynomiale, donc **continue**.
- f_n est également dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (car polynomiale), et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f_n'(x) = -1 - nx^{n-1} < 0.$$

Donc f_n est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}_+$.

- On a $f_n(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty$.

D'après le théorème de la bijection, f_n réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty, 1]$. Puisque $0 \in]-\infty, 1]$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On la note dans la suite u_n.

Mise en garde.

Dire que $f_n'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ ne suffit pas pour conclure que f_n est strictement décroissante. Rappelons le résultat de cours suivant :

> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
> Si f' est strictement négative, sauf éventuellement en un nombre fini de points de I où f' s'annule, alors f est strictement décroissante.

En particulier ici $f_n' < 0$ sur $\mathbb{R}_+$, donc f_n est strictement décroissante.

2. (a) On a $f_n(0) = 1$, $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(1) = -1$. Comme de plus f_n est strictement décroissante, on en déduit que u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

(b) Rappelons comment procéder.

Méthode. Monotonie d'une suite implicite.

Pour déterminer la monotonie d'une suite implicite, on peut comparer les images $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, et conclure grâce à la monotonie de f_{n+1}.

Puisque $u_n \in]0,1[$, on a $u_n^{n+1} \leq u_n^n$, et donc :

$$f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} \geq 1 - u_n - u_n^n = f_n(u_n) = 0.$$

Puisque f_{n+1} est strictement décroissante et que

$$f_{n+1}(u_n) \geq 0 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$

on en déduit que $u_n \leq u_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite (u_n) est croissante.

(c) La suite (u_n) est **croissante** et **majorée** (car $u_n \in]0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Par le théorème de la limite monotone, on peut donc conclure que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ finie. De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 1.$$

Par passage à la limite dans une inégalité, on obtient donc que $0 \leq \ell \leq 1$.

Mise en garde.

Une inégalité stricte devient large quand on passe à la limite !

(d)

Idée.

Il faut pour ce type de question penser à revenir à l'équation $f_n(u_n) = 0$ pour obtenir des informations sur (u_n).

Par l'absurde, supposons que $0 \leq \ell < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_n(u_n) = 0 \quad \text{soit } 1 - u_n - u_n^n = 0.$$

(u_n) étant croissante et convergente vers ℓ, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n \leq \ell, \quad \text{d'où} \quad 0 \leq u_n^n \leq \ell^n.$$

Or par hypothèse $0 \leq \ell < 1$, donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n = 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$. Ainsi tous les termes de l'égalité $1 - u_n - u_n^n = 0$ convergent. Par le théorème de passage à la limite dans les (in)égalités, on en déduit que :

$$1 - \ell - 0 = 0 \quad \text{soit encore } \ell = 1.$$

D'où une contradiction puisque $\ell < 1$ par hypothèse. On peut donc conclure que $\ell = 1$.

Mise en garde.

Ne pas confondre le théorème des gendarmes et le théorème de passage à la limite dans les (in)égalités.

- Pour appliquer le théorème de passage à la limite dans les inégalités, il faut savoir au préalable que **tous** les termes convergent.
- Le théorème des gendarmes est d'une autre nature et démontre deux choses : la **convergence** de la suite encadrée et la valeur de sa limite.

3. (a) Puisque $u_n \in]0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $v_n = 1 - u_n \in]0,1[$ et $\ln(v_n)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus on a $1 - u_n - u_n^n = 0$ et donc :

$$\ln(v_n) = \ln(1-u_n) = \ln(u_n^n) = n\ln(u_n) = n\ln(1+(u_n-1)).$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n - 1 = 0$, on a(en utilisant l'équivalent usuel $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$) :

$$\ln(1+(u_n-1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - 1 = -v_n.$$

D'où finalement $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$.

(b) On a $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0^+$, donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(v_n) = -\infty$. D'autre part, on a $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln(v_n)}{nv_n} = 1$ et on obtient $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right) = 0$. Par opération sur les limites, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0.$$

On a $-\ln(v_n)$ et $nv_n > 0$, d'où :

$$\frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = \frac{\ln(-\ln(v_n)) - \ln(n) - \ln(v_n)}{-\ln(v_n)} = \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1.$$

De plus, on a $\lim_{n\to+\infty} -\ln(v_n) = +\infty$ et $\lim_{u\to+\infty} \frac{\ln(u)}{u} = 0$ par croissances comparées, d'où par composition des limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} = 0.$$

On a donc finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1 = 0.$$

Ainsi on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} = -1$, et donc $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

(c) On a montré que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$ et que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$. Donc on a $nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, soit encore $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

4. La série $\sum v_n$ est à termes positifs d'après les questions précédentes. On utilise le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

- $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$;
- $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$ pour tout $n \geq 3$;
- la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique).

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\sum v_n$ diverge.

De même, la série $\sum v_n^2$ est à termes positifs, et on a :

- $v_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{n^2}$;
- $\frac{\ln(n)^2}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ puisque $\frac{\frac{\ln(n)^2}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{\ln(n)^2}{n^{1/2}} \to 0$ par croissances comparées ;

- la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (série de Riemann d'exposant $\alpha = 3/2 > 1$).

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\sum v_n^2$ converge.

Exercice 1.3 (D'après Ecricome 2007)

1. Soit f la fonction définie sur $]-\infty, \ln 2[$ par $f(x) = \ln(2 - e^x)$.

> **Rappel. Formule de Taylor-Young.**
> Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle I. Alors f admet un développement limité à l'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en tout point de I, et on a pour tout $(x, a) \in I^2$:
> $$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n).$$

La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty, \ln 2[$, on a d'après la formule de Taylor-Young que pour x au voisinage de 0 :
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2).$$
On a $f(0) = \ln 1 = 0$, et pour tout $x \in]-\infty, \ln 2[$:
$$f'(x) = \frac{-e^x}{2 - e^x} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{-e^x(2-e^x) + e^x(-e^x)}{(2-e^x)^2} = \frac{-2e^x}{(2-e^x)^2},$$
d'où $f'(0) = -1$ et $f''(0) = -2$. On en déduit que pour x au voisinage de 0 :
$$\boxed{\ln(2 - e^x) = -x - x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2).}$$

2. (a) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. On a :
$$0 < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 < e^{1/k} \leq e^{1/2}$$
par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. D'où :
$$2 - e^{1/2} \leq 2 - e^{1/k} < 2 - 1 = 1.$$
De plus, on a $e < 4$. Par stricte croissance de la fonction racine sur $[0, +\infty[$, on obtient $e^{1/2} < 2$ donc $2 - e^{1/2} > 0$.

On a donc bien $\boxed{0 < 2 - e^{1/k} < 1}$.

(b) On sait que pour tout $x \in]0, 1[$, $\ln x < 0$. Par 2.(a), on en déduit que :
$$\boxed{\forall k \geq 2, \quad \ln(2 - e^{1/k}) < 0.}$$

(c) On applique le théorème de comparaison pour les séries à termes généraux de signes constants :
- Pour tout $k \geq 2$, $\ln(2 - e^{1/k}) < 0$. Donc le terme général de la série $\sum_{k \geq 2} \ln(2 - e^{1/k})$ est de **signe constant** (négatif) ;
- On a $\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} = 0$ et par 1., $\ln(2 - e^x) \underset{x \to 0}{\sim} -x$ donc $\ln(2 - e^{1/k}) \underset{k \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{k}$;
- La série harmonique $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge.

Par comparaison, $\boxed{\text{la série de terme général } \ln(2 - e^{1/k}) \text{ diverge.}}$

(d) $(V_n)_{n \geq 2}$ est la suite des sommes partielles associée à la série de terme général **négatif** $\ln(2 - e^{1/k})$. Elle est donc décroissante. Par le théorème de la limite monotone, on a deux cas possibles :

- soit (V_n) est minorée et dans ce cas elle converge. Mais cela contredirait la divergence de la série $\sum \ln(2 - e^{1/k})$ établie à la question précédente.
- soit elle n'est pas minorée, et dans ce cas elle tend vers $-\infty$.

Ainsi on a $\boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty}$, et par composition des limites, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

3. (a) On a pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^{n}\left[\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right] = \sum_{k=2}^{n}\ln(2-e^{1/k}) - \sum_{k=2}^{n}(\ln(k-1)-\ln(k))$$
$$= V_n - (\ln(1) - \ln(n)) \text{ par télescopage}$$
$$= \ln(\exp(V_n)) + \ln(n) = \ln(u_n) + \ln(n) = \ln(nu_n).$$

(b) On a d'après 1., $\ln(2-e^x) = -x - x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2)$ et $\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k} = 0$, d'où :

$$\ln(2-e^{1/k}) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

D'autre part, on a $\ln(1-x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2)$ et $\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k} = 0$ donc :

$$\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{k}\right)^2 + o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Par somme, on obtient :

$$\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{1}{2k^2} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Pour obtenir l'équivalent demandé, on prend le premier terme du développement limité obtenu :

$$\boxed{\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2k^2}.}$$

(c) On procède par comparaison :

- $\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2k^2}$;
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{2k^2} \leq 0$;
- La série de Riemann $\sum_{k\geq1}\frac{1}{k^2}$ converge $(2 > 1)$

Par comparaison, on en déduit que la série $\sum_{k\geq2}\left[\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]$ converge. Notons $S = \sum_{k=2}^{+\infty}\left[\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]$ la somme de cette série.

On a d'après 3.(a), $\lim_{n\to+\infty}\ln(nu_n) = S$. Par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = e^S.$$

En notant $K = e^S$, on a $K > 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{K/n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{nu_n}{K} = 1$ d'où $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n}}$.

On en déduit la nature de la série des u_n comme suit :

- On a $u_n \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n}$;
- On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{K}{n} \geq 0$;

- La série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge.

Par comparaison, $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ diverge}}$.

4. (a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n = \exp(V_n) > 0$ et on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\exp(V_{n+1})}{\exp V_n} = \exp(V_{n+1}-V_n) = \exp\left(\sum_{k=2}^{n+1}\ln(2-e^{1/k}) - \sum_{k=2}^{n}\ln(2-e^{1/k})\right)\\ &= \exp(\ln(2-e^{1/(n+1)})) = 2-e^{1/(n+1)} < 1 \quad \text{d'après 2.(a).}\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_{n+1} < u_n$.
La suite $\boxed{(u_n)_{n\geq 2} \text{ est donc strictement décroissante}}$.

(b) On revient à la définition de suites adjacentes.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=2}^{2n+2}(-1)^k u_k - \sum_{k=2}^{2n}(-1)^k u_k = (-1)^{2n+1}u_{2n+1} + (-1)^{2n+2}u_{2n+2}\\ &= -u_{2n+1} + u_{2n+2} \leq 0.\end{aligned}$$

Donc la suite $(S_{2n})_{n\geq 1}$ est décroissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= \sum_{k=2}^{2n+3}(-1)^k u_k - \sum_{k=2}^{2n+1}(-1)^k u_k = (-1)^{2n+2}u_{2n+2} + (-1)^{2n+3}u_{2n+3}\\ &= u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0.\end{aligned}$$

Donc la suite $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ est croissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k u_k - \sum_{k=1}^{2n} k u_k = (-1)^{2n+1}u_{2n+1} = -u_{2n+1}.$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(S_{2n+1}-S_{2n}) = \lim_{n\to+\infty}(-u_{2n+1}) = 0$ d'après 2.(d).

On en déduit que $\boxed{\text{les suites } (S_{2n})_{n\geq 1} \text{ et } (S_{2n+1})_{n\geq 1} \text{ sont adjacentes}}$.

(c) Par le théorème des suites adjacentes, on en déduit que $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ convergent vers la même limite.

Comme ce sont les suites extraites d'indices pairs et impairs, on en déduit que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge. Or, c'est la suite des sommes partielles associée à la série de terme général $(-1)^n u_n$. Donc par définition, $\boxed{\text{la série de terme général } (-1)^n u_n \text{ converge}}$.

Déjà vu ?

La série étudiée à la question 4. est dîtes alternée car son terme général est de la forme $(-1)^n u_n$ avec $u_n > 0$. On a déjà rencontré de telles séries en TD avec la série harmonique alternée. C'est un thème classique dans les épreuves de concours. Les arguments utilisés sont souvent les mêmes, et il est intéressant de les connaitre en toute généralité (même si ces résultats sont hors programme). Pour cela, voir le :

☞ **Complément de cours 1. Autour des séries alternées.**