DS1

Devoir Surveillé du 21/09/2022

Durée : 2h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

On se propose d'étudier la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 telle que $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, soit X_n la matrice à trois lignes et une colonne définie par : $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Justifier pour tout entier naturel n, l'égalité : $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) En déduire pour tout entier naturel n, la relation $X_n = A^n X_0$.

2. Soit P, Q et T les matrices suivantes : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer le produit PQ. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer sa matrice inverse P^{-1}.
   (b) Calculer les produits PT et AP. En déduire pour tout entier naturel n, l'égalité $A^n = PT^nP^{-1}$.

3. Soit D la matrice définie par : $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = T - D$.
   (a) Déterminer pour tout entier $k \geq 2$, la matrice N^k.
   (b) Vérifier que $DN = ND$ et montrer que pour tout entier naturel n, on a :
   $$T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (c) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice A^n.

4. (a) Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

5. Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def suite(n)`, qui à un entier naturel n donné par l'utilisateur, renvoie le terme u_n.

Exercice 2

La lettre n désigne un entier naturel non nul.
Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une seule solution, notée u_n.
2. (a) Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
   (d) Montrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) vaut 1.
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -n\, v_n$.
   (b) Établir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{n\, v_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$ et en déduire que : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.
   (c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.
4. Donner la nature des séries de termes généraux v_n et v_n^2.

Exercice 3

1. À l'aide de la formule de Taylor-Young, montrer que lorsque x est au voisinage de 0 on a :
$$\ln(2 - e^x) = -x - x^2 + o(x^2).$$
2. (a) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :
$$2 - e^{1/k} \in]0, 1[.$$
   (b) En déduire le signe de $\ln(2 - e^{1/k})$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
   (c) Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(2 - e^{1/k})$?
   (d) Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose :
$$V_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(2 - e^{1/k}) \text{ et } u_n = \exp V_n.$$
   Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
3. (a) Montrer que :
$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(2 - e^{1/k}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right].$$
   (b) Déterminer un équivalent, quand k tend vers $+\infty$, de $\ln(2 - e^{1/k}) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$.
   (c) En déduire que u_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $\dfrac{K}{n}$ avec $K > 0$.
   Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?
4. On pose
$$S_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k u_k.$$
   (a) Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.
   (b) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont deux suites adjacentes.
   (c) En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.
