DS11

Concours blanc type Maths 3 du 25/01/2024

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

1. (a) Donner, pour tout réel x strictement positif, une densité de $-xX_0$.

   (b) Montrer que l'on peut choisir comme densité de $X_1 - xX_0$, la fonction f définie par :
$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x+1}\exp\left(\dfrac{\lambda z}{x}\right) & \text{si } z < 0, \\ \dfrac{\lambda}{x+1}\exp(-\lambda z) & \text{si } z \geq 0. \end{cases}$$

   (c) On pose $T = \dfrac{X_1}{X_0}$ et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   Déterminer la fonction de répartition F_T de la variable aléatoire T.

2. On pose $X = \lfloor T \rfloor + 1$, où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T.
   On admet également que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

   (a) Donner sans calcul une densité de $-X_0$.

   (b) Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n et en déduire une densité g_n de Y_n.

   (c) En déduire qu'il existe une densité h_n de $Y_n - X_0$ telle que :
$$\forall x < 0, \quad h_n(x) = \frac{1}{n+1}\lambda e^{\lambda x}.$$

4. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \min\{k \in \mathbb{N}^*,\ X_k > X_0\}$ si cet ensemble n'est pas vide et $Z = 0$ si cet ensemble est vide.

   (a) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\quad [Z > n] \cup [Z = 0] = [Y_n \leq X_0]$.

   (b) Montrer que $[Z = 0] = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} [Y_k \leq X_0]$, puis établir que $P(Z = 0) = 0$.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, les événements $[X = n]$ et $[Z = n]$ ont même probabilité.

5. (a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
   On pose $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - U)$ et on admet que V est une variable aléatoire.
   Déterminer la fonction de répartition de V en fonction de celle de U, puis en déduire la loi suivie par la variable aléatoire V.

   (b) Écrire une fonction `Python`, utilisant la fonction `rd.random()`, qui simule la loi de Z.

Exercice 2

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note $\mathscr{B}_n = (1, x, \dots, x^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

Partie A : Étude d'un produit scalaire.

1. Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[x]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Pour tout couple (P,Q) de $\mathbb{R}[x]^2$, on pose : $\quad \langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$

2. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.

Dans toute la suite du problème, on munit $\mathbb{R}[x]$ de ce produit scalaire et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

3. Calculer, pour tout (i,j) de $\mathbb{N}^2$, $\langle x^i, x^j\rangle$ et, pour tout i de $\mathbb{N}$, $\|x^i\|$.

On admet qu'il existe une unique suite de polynômes $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

- pour tout k de $\mathbb{N}$, le polynôme Q_k est de degré k et de coefficient dominant strictement positif,
- pour tout k de $\mathbb{N}$, la famille $(Q_0,\dots,Q_k)$ est une famille orthonormale.

4. (a) Déterminer Q_0 et Q_1 et vérifier que $Q_2(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

   (b) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, la famille $\mathscr{C}_k = (Q_0,\dots,Q_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[x]$.

On définit la matrice $H_n = (h_{i,j})_{1\leq i,j\leq n+1}$ de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (i,j)\in [\![1,n+1]\!]^2,\ \ h_{i,j} = \langle x^{i-1}, x^{j-1}\rangle.$$

On note également A_n la matrice de la famille $\mathscr{B}_n = (1,x,\dots,x^n)$ dans la base $\mathscr{C}_n$.

5. **Étude du cas $n=2$:**

   (a) Expliciter la matrice H_2.

   Montrer que la matrice H_2 est inversible et vérifier que $H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

   (b) Expliciter la matrice A_2 et calculer ${}^tA_2A_2$. Que remarque-t-on ?

6. On note, pour tout (i,j) de $[\![1,n+1]\!]^2$, $a_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de la matrice A_n.

   (a) Justifier que la matrice A_n est inversible.

   (b) Justifier : $\quad \forall j\in [\![1,n+1]\!],\ x^{j-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_{k,j}Q_{k-1}.$

   En déduire : $\quad \forall (i,j)\in [\![1,n+1]\!]^2,\ \langle x^{i-1}, x^{j-1}\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i}a_{k,j}.$

   (c) Montrer alors la relation : $\quad H_n = {}^tA_nA_n.$

7. (a) Montrer que la matrice H_n est inversible.

   (b) Établir (sans calcul) que la matrice H_n est diagonalisable.

   (c) Montrer que les valeurs propres de H_n sont strictement positives.
   (On pourra calculer, pour tout vecteur propre Y de H_n, ${}^tYH_nY$.)

Partie B : Étude d'une projection.

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$. On définit la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} \langle P, 1\rangle \\ \langle P, x\rangle \\ \vdots \\ \langle P, x^n\rangle \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

8. Soit R un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$.

   On note $V = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de R dans la base $\mathscr{B}_n$.

   (a) Montrer, pour tout i de $[\![0, n]\!]$: $\quad \langle R, x^i\rangle = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \langle x^i, x^k\rangle$.

   (b) Montrer : $\quad R$ est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[x] \iff \forall i \in [\![0, n]\!],\ \langle P, x^i\rangle = \langle R, x^i\rangle$.

   En déduire : $\quad R$ est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[x] \iff V = H_n^{-1}U$.

9. **Retour au cas $n = 2$:** Déterminer le projeté orthogonal du polynôme x^3 sur $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 3

Dans tout le problème, J désigne l'intervalle $]-1, +\infty[$.

Le but du problème est l'étude de l'application f définie, pour tout x de J, par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Préliminaires.

1. Justifier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

2. En admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Partie I : Éléments d'étude de f.

4. Justifier, pour tout $x \in J$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

5. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

6. Montrer que :

$$\forall x \in J, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1},$$

   et en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

7. (a) Montrer que : $\forall (x,y) \in J^2,\ \forall t \in]0,1], \quad (x \leq y \Longrightarrow t^x \geq t^y)$.
   (b) En déduire que f est décroissante sur J.

8. Montrer que : $\forall x \in J, \quad f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$.

9. Déduire des résultats précédents que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

10. Soit $x \in J$.

    (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

    (b) En déduire que la série numérique $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge et que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

11. (a) Montrer que :

$$\forall (x,y) \in J^2,\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| \leq |x-y| \frac{1}{k^2},$$

    puis que :

$$\forall (x,y) \in J^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right).$$

    (b) En déduire que f est continue sur J.

12. Montrer que $f(x) \underset{x\to-1}{\sim} \dfrac{1}{x+1}$. En déduire la limite de f en -1.

Partie II : Dérivabilité de f.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k l'application de classe $\mathscr{C}^2$ de J dans $\mathbb{R}$ définie pour tout x de J par :

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

13. Montrer que :

$$\forall (x,y) \in J^2,\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad |g_k(y) - g_k(x) - (y-x) g_k'(x)| \leq \frac{|y-x|^2}{k^3}.$$

14. (a) Justifier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^3}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 0} g_k'(x)$, pour tout $x \in J$.

    (b) En déduire que f est dérivable sur J et que :

$$\forall x \in J, \quad f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}.$$

    (c) Déterminer $f'(0)$.

15. Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On donne la valeur approchée : $\ln 2 \approx 0,69$.