DS13

Devoir Surveillé type Maths 3 du 09/02/2024

Exercice 1 (Edhec 2010)

1. Comme u est non nul (puisque de norme 1), $\text{Vect}(u)$ est de dimension 1 et son supplémentaire orthogonal est de dimension $\dim(E)-1$. Ainsi, $\boxed{\dim\left((\text{Vect}(u))^{\perp}\right)=1.}$

2. Pour tous $(x,y)\in E^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned} f_\lambda(\alpha x+\beta y) &= \lambda\langle \alpha x+\beta y,u\rangle u+\alpha x+\beta y=\lambda\alpha\langle x,u\rangle u+\lambda\beta\langle y,u\rangle u+\alpha x+\beta y\\ &= \alpha\left[\lambda\langle x,u\rangle u+x\right]+\beta\left[\lambda\langle y,u\rangle u+y\right]=\alpha f_\lambda(x)+\beta f_\lambda(y)\end{aligned}$$
Donc f_λ est linéaire. Comme de plus f_λ va de E dans E, $\boxed{f_\lambda \text{ est bien un endomorphisme de } E.}$

3. Il s'agit de prouver que $g=f_\lambda^2-(\lambda+2)f_\lambda+(\lambda+1)\text{Id}_E$ est l'endomorphisme nul de E. Prenons pour cela $x\in E$. Comme $1=\|u\|^2=\langle u,u\rangle$, $f_\lambda(u)=(\lambda+1)u$, et :
$$\begin{aligned} g(x) &= f_\lambda(\lambda\langle x,u\rangle u+x)-(\lambda+2)(\lambda\langle x,u\rangle u+x)+(\lambda+1)x\\ &= \lambda\langle x,u\rangle f_\lambda(u)+f_\lambda(x)-\lambda(\lambda+2)\langle x,u\rangle u-(\lambda+2)x+(\lambda+1)x\\ &= \lambda\langle x,u\rangle(\lambda+1)u+\lambda\langle x,u\rangle u+x-\lambda(\lambda+2)\langle x,u\rangle u-(\lambda+2)x+(\lambda+1)x\\ &= \left[\lambda(\lambda+1)+\lambda-\lambda(\lambda+2)\right]\langle x,u\rangle u+\left[1-(\lambda+2)+(\lambda+1)\right]x=0\end{aligned}$$
Ainsi $\boxed{P=X^2-(\lambda+2)X+(\lambda+1) \text{ est un polynôme annulateur de } f_\lambda.}$

4. (a) Pour tout $(x,y)\in E^2$:
$$\begin{aligned} (f_\lambda(x)/y) &= (\lambda(x/u)u+x/y)=\lambda(x/u)(u/y)+(x/y)\\ &= (x/\lambda(u/y)u)+(x/y)=(x/\lambda(y/u)+u)=(x/f_\lambda(y))\end{aligned}$$
Ainsi f_λ est un endomorphisme symétrique de E.

(b) On a $\boxed{f_\lambda(u)=(\lambda+1)u}$ (fait en 3.), ce qui se récrit $u\in E_{\lambda+1}(f_\lambda)$.

Soit $v\in(\text{Vect}(u))^{\perp}$. Calculons :
$$f_\lambda(v)=\lambda\langle v,u\rangle u+v=\lambda\times 0\times u+v\boxed{=v.}$$
Ainsi $v\in E_1(f_\lambda)$. Ceci étant vrai pour tout $v\in(\text{Vect}(u))^{\perp}$, il suit que $(\text{Vect}(u))^{\perp}\subset E_1(f_\lambda)$.

(c) On obtient avec la question précédente que :
- $\text{Vect}(u)\subset E_{\lambda+1}$, sous-espace propre de f_λ associé à la valeur propre $\lambda+1$;
- $(\text{Vect}(u))^{\perp}\subset E_1$, sous-espace propre de f_λ associé à la propre 1.

On en déduit que $\dim E_{\lambda+1}\geq\dim(\text{Vect}(u))=1$ et $\dim E_1\geq\dim(\text{Vect}(u)^{\perp})=n-1$ (en notant que $\lambda+1\neq 1$ car $\lambda\neq 0$). D'où les inégalités :
$$n=1+(n-1)\leq\dim E_{\lambda+1}+\dim E_1\underbrace{\leq}_{\text{cours}}n.$$
Donc $\dim E_{\lambda+1}+\dim E_1=n$. Par conséquent, $\boxed{\text{Sp}(f)=\{\lambda+1,1\}}$ et $\dim E_{\lambda+1}=1$, $\dim E_1=n-1$. Comme on avait déjà $\text{Vect}(u)\subset E_{\lambda+1}$ et que ces espaces sont de même dimension, on obtient $\boxed{E_{\lambda+1}=\text{Vect}(u)}$. De même, $\boxed{E_1=\text{Vect}(u)^{\perp}.}$

Remarque. On peut même en déduire que f_λ est diagonalisable (non demandé mais conséquence directe de ce qu'on a obtenu).

5. (a) D'après la question 3, $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de f_{-1}. Ainsi $\boxed{f_{-1}^2 = f_{-1}, \text{ et } f_{-1} \text{ est donc un projecteur.}}$

   (b) f_{-1} est un projecteur et un endomorphisme symétrique. C'est donc par le cours un projecteur orthogonal sur $F = \mathrm{Im}(f_{-1}) = \mathrm{Ker}(f_{-1} - \mathrm{Id}_E) = E_1(f_{-1}) = \mathrm{Vect}(u)^\perp$.

Exercice 2 (Edhec 2022)

1. 1. On commence par montrer que g est bien définie. Il s'agit de prouver que $F(a) \neq 0$. La fonction de répartition F est dérivable, de dérivée f strictement positive. Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0.$$

Ceci prouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) > 0$. En particulier, $F(a) > 0$ et la fonction g est $\boxed{bien définie}$. On montre maintenant que g est une densité de probabilité :

- Comme la fonction f est continue en tout point, la fonction g est continue sur $\mathbb{R} \backslash \{a\}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  - si $x \leq a$, $f(x) > 0$ et $F(a) > 0$, donc $g(x) = \dfrac{f(x)}{F(a)} > 0$.
  - si $x > a$, $g(x) = 0$.

  Dans tous les cas, $g(x) \geq 0$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} \frac{f(x)}{F(a)}\mathrm{d}x$ converge par linéarité de l'intégrale, et vaut $\displaystyle\frac{1}{F(a)} \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \frac{F(a)}{F(a)} = 1$.

Donc $\boxed{g \text{ est une densité de probabilité.}}$

2. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)\mathrm{d}t$. On distingue deux cas :

   - Si $x \leq a$:
$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{F(a)}\mathrm{d}t = \frac{1}{F(a)} \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{F(a)}F(x).$$
   - Si $x > a$:
$$G(x) = \int_{-\infty}^{a} \frac{f(t)}{F(a)}\mathrm{d}t + \int_{a}^{x} 0 \ \mathrm{d}t = \frac{1}{F(a)}F(a) + 0 = 1.$$

   Ainsi, la fonction de répartition de Y est $\boxed{G : x \mapsto \begin{cases} \frac{F(x)}{F(a)} & \text{si } x \leq a, \\ 1 & \text{si } x > a. \end{cases}}$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons que $P(X \leq a) = F(a) > 0$, de sorte que la probabilité conditionnelle $P_{[X \leq a]}(X \leq x)$ est bien définie, donnée par :

$$P_{[X \leq a]}(X \leq x) = \frac{P([X \leq a] \cap [X \leq x])}{P(X \leq a)} = \frac{P([X \leq a] \cap [X \leq x])}{F(a)}.$$

   On distingue alors deux cas :

   - si $x \leq a$, on a l'égalité d'événements $[X \leq a] \cap [X \leq x] = [X \leq x]$, et donc :
$$P_{[X \leq a]}(X \leq x) = \frac{P(X \leq x)}{F(a)} = \frac{F(x)}{F(a)} = G(x).$$
   - si $x > a$, on a l'égalité d'événements $[X \leq a] \cap [X \leq x] = [X \leq a]$, et donc :
$$P_{[X \leq a]}(X \leq x) = \frac{P(X \leq a)}{F(a)} = \frac{F(a)}{F(a)} = 1 = G(x).$$

Dans tous les cas, $\boxed{P_{[X\leq a]}(X \leq x) = G(x).}$

3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G_n(x) &= P\left(M_n \leq x\right) = P\left(\max\left(Y_1, \ldots, Y_n\right) \leq x\right) \\ &= P\left(\left[Y_1 \leq x\right] \cap \cdots \cap \left[Y_n \leq x\right]\right) \\ &= P\left(Y_1 \leq x\right) \times \cdots \times P\left(Y_n \leq x\right) \quad (\text{ par mutuelle indépendance de } Y_1, \ldots, Y_n) \\ &= G(x) \times \cdots \times G(x) = G(x)^n \end{aligned}$$

D'après l'expression de G trouvée à la question 2.(a), on en déduit :

$$\boxed{G_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{F(x)}{F(a)}\right)^n & \text{si } x \leq a, \\ 1 & \text{si } x > a. \end{cases}}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On cherche la limite de $G_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$. Pour ce faire, on distingue trois cas :

- Si $x < a$, alors $G_n(x) = \left(\frac{F(x)}{F(a)}\right)^n$. Par stricte croissance de la fonction F, $0 < F(x) < F(a)$, et donc : $0 < \frac{F(x)}{F(a)} < 1$. D'où :
$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 0.$$
- Si $x = a$, $G_n(x) = 1^n = 1$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 1$.
- Si $x > a$, on a encore $G_n(x) = 1$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 1$.

Ainsi,
$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ 1 & \text{si } x \geq a. \end{cases} = G(x).$$

La fonction G ainsi obtenue étant croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$, et satisfaisant $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$, c'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire M.

La suite $\boxed{(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge donc en loi vers la variable aléatoire } M.}$

Enfin, G étant en escaliers avec pour seul point de discontinuité en a, M est la variable $\boxed{\text{certaine égale à } a.}$

4. (a) Calculons pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} H_n(x) &= P\left(Z_n \leq x\right) = P\left(n\left(a - M_n\right) \leq x\right) = P\left(a - M_n \leq \frac{x}{n}\right) \qquad \text{car } n > 0 \\ &= P\left(M_n \geq a - \frac{x}{n}\right) = 1 - P\left(M_n < a - \frac{x}{n}\right) \\ &= 1 - P\left(M_n \leq a - \frac{x}{n}\right) \qquad \text{car } M_n \text{ est une variable à densité (admis dans l'énoncé)} \\ &= 1 - G_n\left(a - \frac{x}{n}\right). \end{aligned}$$

Si $x < 0$, $a - \frac{x}{n} > a$ et donc $1 - G_n\left(a - \frac{x}{n}\right) = 1 - 1 = 0$. Si $x \geq 0$, $a - \frac{x}{n} \leq a$ et donc :

$$1 - G_n\left(a - \frac{x}{n}\right) = 1 - \left(\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right)^n$$

Ainsi,

$$\boxed{H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \left[\dfrac{F\left(a - \dfrac{x}{n}\right)}{F(a)}\right]^n & \text{si } x \geq 0. \end{cases}}$$

(b) On écrit le développement limité à l'ordre 1 de la fonction F au point a (licite car F est dérivable en a) :

$$F(a+t) \underset{t \to 0}{=} F(a) + F'(a)t + o(t) \quad \text{soit} \quad F(a+t) \underset{t \to 0}{=} F(a) + f(a)t + o(t)$$

On applique ce développement limité à $t = -\frac{x}{n}$ quand n tend vers $+\infty$. Ceci est licite car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-x}{n} = 0$. On obtient :

$$F\left(a - \frac{x}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} F(a) - f(a)\frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} F(a) - f(a)\frac{x}{n} + xo\left(\frac{1}{n}\right)$$

En divisant par $F(a) \neq 0$, on obtient :

$$\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} \underset{n \to +\infty}{=} 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + \frac{x}{F(a)} o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc :

$$\boxed{\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} \underset{n \to +\infty}{=} 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Il s'agit d'étudier la limite de $H_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On distingue trois cas :

- Si $x < 0$, $H_n(x) = 0$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n(x) = 0$.
- Si $x = 0$, $H_n(x) = 1 - 1^n = 0$, et de même $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n(x) = 0$.
- Si $x > 0$:

$$H_n(x) = 1 - \left(\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right)^n = 1 - \exp\left(n \ln\left(\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right)\right)$$

D'après la question précédente :

$$\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} - 1 \underset{n \to +\infty}{=} -\frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{donc} \quad \frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} \quad (*)$$

l'équivalent étant licite car $x \neq 0$. Or, on remarque que :

$$\ln\left(\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right) = \ln\left(1 + \left(\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} - 1\right)\right)$$

On utilise l'équivalent usuel : $\ln(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} u$. On l'applique à $u = \frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} - 1$ quand n tend vers $+\infty$. Ceci est licite car cette quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (d'après l'équivalent $(*)$). On obtient :

$$\ln\left(\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} - 1$$

En utilisant l'équivalent $(*)$, on obtient :

$$\ln\left(\frac{F\left(a-\frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{f(a)}{F(a)}\times\frac{x}{n}$$

et donc :

$$n\ln\left(\frac{F\left(a-\frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{f(a)}{F(a)}\times x$$

Ceci se récrit :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{F\left(a-\frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right) = -\frac{f(a)}{F(a)}\times x$$

Par composition de limite avec l'exponentielle (qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}$), on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(\frac{F\left(a-\frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right)\right) = \exp\left(-\frac{f(a)}{F(a)}\times x\right).$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0,\\ 1-e^{-xf(a)/F(a)} & \text{si } x>0.\end{cases}}$$

Autrement dit, la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la $\boxed{\text{loi exponentielle de paramètre } \dfrac{f(a)}{F(a)}.}$

Exercice 3 (Edhec 2015 voie ECE)

1. Pour x et y fixés, la fonction $t\mapsto \left(y+xt+t^2\right)^2 e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc le seul éventuel problème de convergence est au voisinage de $+\infty$.

   Or, $t\mapsto y+xt+t^2$ est une fonction polynomiale, donc équivalente en $+\infty$ à son terme de plus haut degré, qui est t^2.

   Donc $\left(y+xt+t^2\right)^2 e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^4e^{-t}$.

   Mais $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^4e^{-t}\mathrm{d}t = \Gamma(5)$ est une intégrale convergente, donc par critère de comparaison pour les fonctions positives, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(y+xt+t^2\right)^2 e^{-t}dt \text{ converge.}}$

2. (a) Pour tout $t\geq 0$:

   $$\left(y+xt+t^2\right)^2 = y^2+x^2t^2+t^4+2xyt+2yt^2+2xt^3$$

   et donc, par linéarité de l'intégrale :

   $$\begin{aligned} f(x,y) &= y^2\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t + x^2\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} t^4e^{-t}\mathrm{d}t + 2xy\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t + 2y\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\mathrm{d}t \\ &\quad + 2x\int_0^{+\infty} t^3e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= y^2\Gamma(1)+x^2\Gamma(3)+\Gamma(5)+2xy\Gamma(2)+2y\Gamma(3)+2x\Gamma(4) \\ &\boxed{= y^2+2x^2+24+2xy+4y+12x.} \end{aligned}$$

   (b) La fonction f est polynomiale sur $\mathbb{R}^2$, donc elle y est de $\boxed{\text{classe } \mathscr{C}^1.}$

3. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on détermine $\nabla f(x,y) = (4x+12+2y, 2y+4+2x)$.

   Et donc (x,y) est un point critique de f si, et seulement si :

   $$\left\{\begin{array}{l} 4x+12+2y=0 \\ 2y+4+2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x-6 \\ y=-x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-4 \\ y=2 \end{array}\right.$$

   Et donc $\boxed{f \text{ possède un unique point critique qui est } (-4,2).}$

4. (a) Calculons :

$$2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2 = 2\left(x^2+\frac{y^2}{4}+9+xy+3y+6x\right) = 2x^2+2xy+12x+6y+\frac{y^2}{2}+18$$

et donc $\boxed{2x^2+2xy+12x = 2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2-6y-\frac{y^2}{2}-18.}$

(b) Pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2-6y-\frac{y^2}{2}-18+y^2+4y+24 \\ &= 2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2+\frac{1}{2}\left(y^2-4y+12\right) \\ &= 2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2+\frac{1}{2}(y-2)^2+4. \end{aligned}$$

De plus, on a $f(-4,2)=4$ et donc pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$,

$$f(x,y)-f(-4,2) = 2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2+\frac{1}{2}(y-2)^2 \geq 0$$

de sorte que $f(x,y)\geq f(-4,2)$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ admet un minimum en } (-4,2)\text{, et ce minimum vaut } 4.}$

Remarque. Ce minimum aurait en fait pu se trouver à l'aide de l'écriture précédente : on a $f(x,y)\geq 4$ et $f(x,y)=4$ si, et seulement si, les deux carrés sont nuls, c'est-à-dire si on a simultanément :

$$\begin{cases} y-2=0 \\ x+\frac{y}{2}+3=0 \end{cases}$$

soit $x=-4$ et $y=2$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,0)=+\infty$, et donc f prend des valeurs arbitrairement grandes : $\boxed{\text{elle n'admet pas de maximum.}}$

5. (a) φ est dérivable, de dérivée égale à $\varphi'(x)=5x^4e^x+x^5e^x=x^4e^x(5+x)$.
Ainsi, le tableau de variation de φ est le suivant :

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	0	$\searrow$	$\varphi(-5)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $\varphi(-5)=-5e^{-5}=-\left(\frac{5}{e}\right)^5$. Or, $e<3$, donc $\frac{5}{e}>\frac{5}{3}>\frac{3}{2}$. Et donc $\left(\frac{5}{e}\right)^5>\left(\frac{3}{2}\right)^5=\frac{234}{64}>4$, de sorte que $\varphi(t)\geq 4$.

(b) On a $g(x,y)=f\left(x^5e^x,y^5e^y\right)-24\geqslant 4-24=-20$.

De plus, d'après la question 4, $f\left(x^5e^x,y^5e^y\right)=-4$ si, et seulement si, $\begin{cases} x^5e^x=-4 \\ y^5e^y=2 \end{cases}$.

Mais d'après le théorème de la bijection (qui s'applique sur chacun des intervalles où φ est strictement monotone, car elle y est continue), $x^5e^x=-4$ possède une unique solution α sur $]-\infty,-5[$ et une unique solution β sur $]-5,+\infty[$.
Et de même, l'équation $x^5e^x=2$ possède une unique solution γ sur $]-5,+\infty[$ et aucune sur $]-\infty,-5]$.

Et donc $g(x,y) = -20$ si, et seulement si, $(x,y) = (\alpha,\gamma)$ ou $(x,y) = (\beta,\gamma)$.
Donc $\boxed{\text{le minimum de } g \text{ vaut -20 et est atteint en deux points.}}$

Problème

Partie I : Interpolation polynomiale

1. Montrons tout d'abord que φ est linéaire. Soit pour cela $(P,Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(P+\lambda Q) &= ((P+\lambda Q)(a_1), \cdots, (P+\lambda Q)(a_n)) \\ &= (P(a_1), \cdots, P(a_n)) + \lambda\,(Q(a_1), \cdots, Q(a_n)) \\ &= \varphi(P) + \lambda\varphi(Q). \end{aligned}$$

   Montrons que φ est injective. Soit $P \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. On a $P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$, de sorte que P admet n racines distinctes $a_1, \ldots, a_n$. Comme P est de degré plus $n-1$, cela implique que P est le polynôme nul. Ainsi, on a $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et φ est injective.

   Comme de plus $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$, $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ sur } \mathbb{R}^n.}$

2. Il résulte de la bijectivité de φ que, pour tout $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\varphi(P) = (b_1, \cdots, b_n)$, c'est-à-dire tel que :

$$\boxed{\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad P(a_i) = b_i.}$$

> **Déjà vu ?**
> Ce résultat a déjà été démontré à de multiples reprises en TD et en DS, par diverses méthodes et notamment celle ci-dessus. Voir par exemple le TD0a et le TD6. Pour rappel, ce résultat est lié aux polynômes de Lagrange associés aux réels distincts $a_1, \ldots, a_n$.

3. Puisque $P_0 \in \mathbb{R}_3[X]$, cherchons-le sous la forme : $P_0(X) = a + bX + cX^2 + dX^3$.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} P_0(0) = 1 \\ P_0(1) = 3 \\ P_0(2) = 11 \\ P_0(3) = 31 \end{cases}
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a+b+c+d = 3 \\ a+2b+4c+8d = 11 \\ a+3b+9c+27d = 31 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 & \\ b + c + d = 2 & (L_2) \leftarrow (L_2)-(L_1) \\ 2b + 4c + 8d = 10 & (L_3) \leftarrow (L_3)-(L_1) \\ 3b + 9c + 27d = 30 & (L_4) \leftarrow (L_4)-(L_1) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 & \\ b + c + d = 2 & \\ 2c + 6d = 6 & (L_3) \leftarrow (L_3)-2(L_2) \\ 6c + 24d = 24 & (L_4) \leftarrow (L_4)-3(L_2) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 & \\ b + c + d = 2 & \\ c + 3d = 3 & (L_3) \leftarrow (L_3)/2 \\ c + 4d = 4 & (L_4) \leftarrow (L_4)/6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 & \\ b + c + d = 2 & \\ c + 3d = 2 & (L_3) \leftarrow (L_3)/2 \\ d = 1 & (L_4) \leftarrow (L_4)-(L_3) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow d = 1,\ c = 3-3 = 0,\ b = 2-0-1 = 1,\ a = 1
\end{aligned}$$

   Ainsi, on a $\boxed{P_0(X) = 1 + X + X^3.}$

Partie II : Polynômes spéciaux

4. Le polynôme $P = X$ est un élément de E.

5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $(P, Q) \in E^2$. Pour tout $x > 0$, on a :

   - $\alpha P(x) > 0$ et $\alpha P'(x) > 0$ comme produits de nombres positifs, donc on a $\boxed{\alpha P \in E}$;
   - $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) > 0$ et $(P+Q)'(x) = P'(x) + Q'(x) > 0$ comme sommes de termes positifs, donc on a $\boxed{P + Q \in E}$;
   - $(PQ)(x) = P(x)Q(x) > 0$ et $(PQ)'(x) = P'(x)Q(x) + P(x)Q'(x) > 0$ comme somme et produit de termes positifs, donc on a $\boxed{PQ \in E}$.

   Cependant E ne contient pas le polynôme nul, et n'est pas stable par produit par un scalaire négatif. $\boxed{\text{Ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X].}$

6. Notons déjà que P_1 est un polynôme en tant que primitive du polynôme P qui s'annule en 0.

   Soit $x > 0$. On a $P_1(x) = \displaystyle\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$. Or $t \mapsto P_1(t)$ est une fonction **continue**, **positive** sur $[0, x]$, et non identiquement nulle sur cet intervalle (puisqu'elle est strictement positive sur $]0, x]$). Par strict positivité de l'intégrale, on a bien $P_1(x) > 0$.

   D'autre part, on a $P_1'(x) = P(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Ainsi, on a bien que $\boxed{P_1 \in E.}$

7. Soit $P \in E$. Sa dérivée étant strictement positive sur $]0, +\infty[$, P est une fonction strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Par conséquent, on a $\boxed{P(x) \geq P(0) \text{ pour tout } x \geq 0.}$

8. $\widetilde{P}$ est **continue** et **strictement croissante** sur $[0, +\infty[$.

   De plus, on a $\widetilde{P}(0) = P(0)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \widetilde{P}(x) = +\infty$. En effet, $\widetilde{P}$ est polynomiale et non constante (car P' est non nulle). Si on note $d = \deg(P)$ et a_d son coefficient dominant, on a donc $d \geq 1$ et $\widetilde{P}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_d x^d$, de sorte que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \widetilde{P}(x) = \pm\infty$. Mais $\widetilde{P}$ étant strictement croissant, il tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

   Par le théorème de la bijection, $\boxed{\widetilde{P} \text{ réalise une bijection de } [0, +\infty[\text{ sur } [P(0), +\infty[.}$

9. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\widetilde{P}^{-1}$ soit une application polynomiale, et notons $\ell = \deg(\widehat{P}^{-1})$ et $d = \deg(\widehat{P}) \geq 2$. Puisque $\widetilde{P}^{-1}$ est bijective, elle n'est pas constante, et on a $\ell \geq 1$.

   On a :
   $$\forall x \in]\widetilde{P}(0), +\infty[, \quad \widetilde{P}(\widetilde{P}^{-1}(x)) = x.$$
   Donc $\widetilde{P} \circ \widetilde{P}^{-1}$ est un polynôme de degré 1. Or par propriété sur les degrés, on a $\deg(\widetilde{P} \circ \widetilde{P}^{-1}) = \deg(\widetilde{P}) \times \deg(\widetilde{P}^{-1}) = d \times \ell \geq 2$. D'où une contradiction.

   Ainsi $\boxed{\widetilde{P}^{-1} \text{ n'est pas une application polynomiale.}}$

Partie III : Matrices symétriques positives

10. La matrice A est une matrice symétrique réelle, $\boxed{\text{elle est donc diagonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

11. (a) Soit λ une valeur propre de A et U un vecteur propre associé. On a :
    $${}^t\!UAU = {}^t\!U(\lambda U) = \lambda\, {}^t\!UU = \lambda \|U\|^2.$$
    Puisque U est un vecteur propre, U est en particulier non nul et on a $\|U\|^2 > 0$. Ainsi, on a $\lambda = \dfrac{{}^t\!UAU}{\|U\|^2} \geq 0$ car ${}^t\!UAU \geq 0$ puisque $A \in \mathscr{S}_n^+$.

    On a donc bien que $\boxed{\text{si } A \in \mathscr{S}_n^+, \text{ alors } \mathrm{Sp}(A) \subset [0, +\infty[.}$

(b) Supposons réciproquement que toutes les valeurs propres de A sont dans $[0, +\infty[$, et notons q_A la forme quadratique associée à A. Par le cours, on sait alors que q_A est positive, c'est-à-dire que :

$$\forall U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad q_A(U) = {}^tUAU \geq 0.$$

Ainsi, $\boxed{A \text{ est dans } \mathscr{S}_n^+.}$

Autre méthode. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Puisque A est symétrique réelle, elle diagonalise dans une base orthonormée de vecteurs propres $(U_1, \ldots, U_n)$ de $(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, notons λ_i la valeur propre associée au vecteur propre U_i.

Soit $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $U = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i$. On a :

$$\begin{aligned} {}^tUAU = \langle U, AU \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j AU_j \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle U_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j AU_j \rangle \quad \text{par lin. à gauche} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle U_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j U_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \lambda_j \langle U_i, U_j \rangle \quad \text{par lin. à droite} \end{aligned}$$

Mais $(U_1, \ldots, U_n)$ étant une base orthonormée de $(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, on a :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \langle U_i, U_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, on a :

$$ {}^tUAU = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0 \text{ par hyp.}} \geq 0.$$

Ainsi, on a bien que $\boxed{A \in \mathscr{S}_n^+.}$

Partie IV : Matrice symétrique positive solution d'une équation polynomiale spéciale

Mise en garde.

Une erreur s'était glissée dans l'énoncé d'origine : on supposera dans la suite que Q est une matrice **orthogonale**. Rappelons qu'il est tout à fait possible de faire une telle supposition, puisque la matrice A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, et que la matrice de passage peut être prise orthogonale. Cette hypothèse supplémentaire sera particulièrement utile pour la résolution de la question 13.

12. (a) On a :

$$SA = SP(S) = P(S)S \boxed{= AS}$$

car $P(S)$ est un polynôme en la matrice S, et commute donc avec S.

D'autre part, on a $\Delta = Q^{-1}SQ$ et $D = Q^{-1}AQ$, d'où :

$$\Delta D = (Q^{-1}SQ)(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}SAQ = Q^{-1}ASQ = (Q^{-1}AQ)(Q^{-1}SQ) \boxed{= D\Delta.}$$

(b) Notons $\Delta = (\delta_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. On a :

$$\Delta D = \begin{pmatrix} \lambda_1\delta_{1,1} & \lambda_2\delta_{1,2} & \cdots & \lambda_n\delta_{1,n} \\ \lambda_1\delta_{2,1} & \lambda_2\delta_{2,2} & \cdots & \lambda_n\delta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1\delta_{n,1} & \lambda_2\delta_{n,2} & \cdots & \lambda_n\delta_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1\delta_{1,1} & \lambda_1\delta_{1,2} & \cdots & \lambda_1\delta_{1,n} \\ \lambda_2\delta_{2,1} & \lambda_2\delta_{2,2} & \cdots & \lambda_2\delta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n\delta_{n,1} & \lambda_n\delta_{n,2} & \cdots & \lambda_n\delta_{n,n} \end{pmatrix}$$

Puisque $D\Delta = \Delta D$, on a donc en identifiant les coefficients $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ pour $i \neq j$ que :

$$\lambda_i\delta_{i,j} = (D\Delta)_{i,j} = (\Delta D)_{i,j} = \lambda_j\delta_{i,j} \quad \Rightarrow \quad (\lambda_i - \lambda_j)\delta_{i,j} = 0.$$

Puisque $\lambda_i \neq \lambda_j$, on en déduit donc que $\delta_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j$. Ainsi, la matrice $\boxed{\Delta \text{ est diagonale.}}$

De plus, puisque $\Delta = QSQ^{-1}$, alors on a $S = Q\Delta Q^{-1}$. Donc les matrices S et Δ ont les mêmes valeurs propres. Or Δ étant diagonale, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Ainsi, on a :

$$\{\delta_{1,1}, \ldots, \delta_{n,n}\} = \mathrm{Sp}(\Delta) = \mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$$

d'après la question 11.(a). Ainsi, $\boxed{\text{tous les éléments diagonaux de } \Delta \text{ sont bien positifs ou nuls.}}$

13. *Analyse.* Supposons qu'une telle solution $S \in \mathscr{S}_n^+$ de l'équation $P(S) = A$ existe. D'après la question précédente, la matrice $\Delta = Q^{-1}SQ$ est diagonale et ses éléments diagonaux sont tous positifs ou nuls. Notons $\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n)$. On a :

$$\begin{aligned} P(S) = A &\Leftrightarrow P(Q\Delta Q^{-1}) = QDQ^{-1} \Leftrightarrow QP(\Delta)Q^{-1} = QDQ^{-1} \Leftrightarrow P(\Delta) = D \\ &\Leftrightarrow \mathrm{diag}(P(\delta_1), \ldots, P(\delta_n)) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \Leftrightarrow P(\delta_i) = \lambda_i \quad \text{pour tout } i \text{ entre 1 et } n. \end{aligned}$$

Puisque les λ_i sont dans $[P(0), +\infty[$ par hypothèse et que $\widetilde{P}$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[P(0), +\infty[$, on en déduit que $\delta_i = \widetilde{P}^{-1}(\lambda_i)$.

Ainsi, si l'équation $P(S) = A$ admet une solution dans $\mathscr{S}_n^+$, c'est nécessairement :

$$S = Q\mathrm{diag}(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n))Q^{-1}.$$

Synthèse. Vérifions réciproquement que $S = Q\Delta Q^{-1}$ est bien solution du problème posé, où $\Delta = \mathrm{diag}(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n))$.

Tout d'abord, S est bien une matrice symétrique car :

$${}^tS = {}^t(Q\Delta Q^{-1}) \underset{Q \text{ orthog}}{=} {}^t(Q\Delta\, {}^tQ) = {}^t({}^tQ)\, {}^t\Delta\, {}^tQ = Q\Delta Q^{-1} = S.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} P(S) = P(Q\Delta Q^{-1}) = QP(\Delta)Q^{-1} &= Q\mathrm{diag}(P(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1)), \ldots, P(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)))Q^{-1} \\ &= Q\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)Q^{-1} = QDQ^{-1} = A. \end{aligned}$$

Ainsi l'équation $P(S) = A$ d'inconnue $S \in \mathscr{S}_n^+$ admet bien pour solution la matrice $S = Q\Delta Q^{-1}$.

Conclusion. L'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathscr{S}_n^+$, admet pour unique solution $\boxed{Q\mathrm{diag}(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n))Q^{-1}.}$

14. (a) Pour tout $x > 0$, on a $P(x) \geq x^3 + x + 1 > 0$ et $P'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc $\boxed{P \text{ appartient à } E.}$

(b) On utilise la méthode du pivot de Gauss. On a :

$$A-\lambda I_4=\begin{pmatrix}2-\lambda & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 21-\lambda & 10\\ 0 & 0 & 10 & 21-\lambda\end{pmatrix} \underset{\substack{L_1\leftrightarrow L_2\\ L_3\leftrightarrow L_4}}{\sim} \begin{pmatrix}-1 & 2-\lambda & 0 & 0\\ 2-\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 10 & 21-\lambda\\ 0 & 0 & 21-\lambda & 10\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+(2-\lambda)L_1\\ L_4\leftarrow 10L_4-(21-\lambda)L_3}}{\sim} \begin{pmatrix}-1 & 2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2-4\lambda+3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 10 & 21-\lambda\\ 0 & 0 & 0 & -341+42\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}$$

λ est valeur propre de A si et seulement si $\mathrm{rg}(A-\lambda I_4)<4$, soit si et seulement si $\lambda^2-4\lambda+3=0$ ou $\lambda^2-42\lambda+341=0$. Et donc après résolution de ces deux équations, on obtient $\lambda\in\{1,3,11,31\}$. Ainsi, on a $\boxed{\mathrm{Spec}(A)=\{1,3,11,31\}.}$

Puisque A est symétrique réelle et que $\mathrm{Spec}(A)\subset\mathbb{R}_+$, on a bien $\boxed{A\in\mathscr{S}_4^+.}$

(c) Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

- $$X\in E_1(A)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 10 & 20\\ 0 & 0 & 0 & -300\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y=0\\ 10z+20t=0\\ -300z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ z=t=0\end{cases}$$

  Ainsi, on a $E_1(A)=\left\{\begin{pmatrix}x\\x\\0\\0\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$

- De même, en résolvant les trois autres systèmes, on obtient :

$$E_3(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right),\quad E_{11}(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right),\quad E_{31}(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons que chacun des vecteurs propres obtenu est de norme $\sqrt{2}$, et donc, pour chaque sous-espace propre, une base orthonormée est obtenue en divisant le vecteur propre calculé par $\sqrt{2}$.

Et en concaténant ces bases orthonormées des sous-espaces propres, on obtient une base orthonormée de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. On a alors en posant :

$$\boxed{Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\text{ et }D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 11 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 31\end{pmatrix}}$$

que Q est orthogonale, car matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, qui est orthonormée, à la base de vecteurs propres de A, et par formule de changement de bases que :

$$\boxed{A=QDQ^{-1}}$$

(d) D'après la question 13, l'unique solution de $\mathscr{S}_n^+$ à l'équation $P(S)=A$ est :

$$S=Q\begin{pmatrix}\widetilde{P}^{-1}(1) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \widetilde{P}^{-1}(3) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \widetilde{P}^{-1}(11) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{P}^{-1}(31)\end{pmatrix}Q^{-1}.$$

Mais ici, P est le polynôme obtenu à la question 3, de sorte que nous savons que :

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 3, \quad P(2) = 11 \quad \text{et} \quad P(3) = 31.$$

Autrement dit, nous connaissons $\widetilde{P}^{-1}(1)$ (qui vaut 0), $\widetilde{P}^{-1}(3)$ (qui vaut 1), etc. Et donc l'unique solution $S \in \mathscr{S}_4^+$ à l'équation $P(S) = A$ est :

$$S = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} Q^{-1} \boxed{= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}}.$$
