DS13

Devoir Surveillé type Maths 3 du 09/02/2024

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. On considère un vecteur u de E dont la norme est égale à 1, un réel λ non nul et on note f_λ l'application qui, à tout vecteur x de E, associe $f_\lambda(x) = \lambda\langle x, u\rangle u + x$.

1. Donner la dimension de $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$.
2. Montrer que f_λ est un endomorphisme de E.
3. Montrer que le polynôme $x^2 - (\lambda+2)x + (\lambda+1)$ est un polynôme annulateur de f_λ.
4. (a) Montrer que f_λ est un endomorphisme symétrique de E.
   (b) Déterminer $f_\lambda(u)$ et $f_\lambda(v)$ pour tout vecteur v de $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$.
   (c) Établir alors que f_λ possède deux valeurs propres distinctes et donner les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres.
5. Dans cette question, on suppose que $\lambda = -1$.
   (a) Vérifier que f_{-1} est un projecteur.
   (b) Montrer plus précisément que f_{-1} est le projecteur orthogonal sur $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$.

Exercice 2

On désigne par a un réel et on considère une variable aléatoire X, de densité f strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$, dont la fonction de répartition est notée F.
On pose :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{F(a)} & \text{si } x \leq a, \\ 0 & \text{si } x > a. \end{cases}$$

1. Montrer que g est bien définie et peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire Y.
2. On note G la fonction de répartition de Y.
   (a) Exprimer, pour tout réel x, $G(x)$ à l'aide de F.
   (b) Vérifier que l'on a, pour tout réel x :

$$G(x) = P_{[X\leq a]}(X \leq x).$$

Dans la suite, on considère une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité dont on note G_n la fonction de répartition.

   (a) Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de G, puis à l'aide de F.

   (b) Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire que l'on précisera.

4. On pose $Z_n = n(a - M_n)$ et on note H_n la fonction de répartition de Z_n.

   (a) Vérifier que l'on a :

$$H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \left[\dfrac{F\left(a - \dfrac{x}{n}\right)}{F(a)}\right]^n & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

   (b) Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{F\left(a - \dfrac{x}{n}\right)}{F(a)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{f(a)}{F(a)} \times \dfrac{x}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right).$

   (c) En déduire que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on reconnaîtra la loi.

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(y + xt + t^2\right)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

On considère, dans toute la suite, la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \int_0^{+\infty} \left(y + xt + t^2\right)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

2. (a) Vérifier que l'on a : $\quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24.$

   (b) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que f admet un unique point critique (a, b) que l'on déterminera.

4. (a) Compléter le membre de droite de l'égalité suivante :

$$2x^2 + 2xy + 12x = 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 - \ldots$$

   (b) En déduire une autre écriture de $f(x, y)$ montrant que f admet un minimum global en (a, b). f admet-elle un maximum global ?

5. (a) Déterminer le tableau de variations de la fonction $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto t^5 e^t$.
   En déduire qu'elle admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et que ce minimum est inférieur strictement à -4.

(b) En déduire que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$g(x,y) = 2x^{10}e^{2x} + y^{10}e^{2y} + 12x^5e^x + 4y^5e^y + 2(xy)^5e^{x+y}$$
possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, et préciser le nombre de points où ce minimum est atteint.

Problème

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geq 2$.
On confond polynôme de $\mathbb{R}[x]$ et fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ ou sur $[0, +\infty[$ ou sur $]0, +\infty[$.
On note $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ formé par les polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Partie I : Interpolation polynomiale

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On note :
$$\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad P \longmapsto \varphi(P) = (P(a_1), \ldots, P(a_n)).$$

1. Montrer que φ est un isomorphisme.
2. En déduire que, pour tout $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ unique tel que :
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad P(a_i) = b_i.$$
3. *Exemple.* Déterminer le polynôme P_0 de $\mathbb{R}_3[x]$ tel que :
$$P_0(0) = 1, \quad P_0(1) = 3, \quad P_0(2) = 11, \quad P_0(3) = 31.$$

Partie II : Polynômes spéciaux

On considère l'ensemble E des polynômes P de $\mathbb{R}[x]$ tels que :
$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad (P(x) > 0 \text{ et } P'(x) > 0).$$

4. Donner un exemple d'élément de E.
5. Montrer que E est stable par multiplication par un réel strictement positif, par addition et par multiplication, c'est-à-dire que, pour tout $\alpha \in]0, +\infty[$ et tous P, $Q \in E$, on a :
$$\alpha P \in E, \quad P + Q \in E, \quad PQ \in E.$$
Est-ce-que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$?
6. Soit $P \in E$. On note $P_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x P(t)\,dt$. Montrer que $P_1 \in E$.
7. Soit $P \in E$. Montrer que : $\quad \forall x \in [0, +\infty[, \quad P(x) \geq P(0)$.

   Pour tout $P \in E$, on note $\widetilde{P} : [0, +\infty[\to [P(0), +\infty[$, $x \mapsto \widetilde{P}(x) = P(x)$.
8. Montrer que l'application $\widetilde{P}$ est bijective.
9. Si, de plus, P est de degré au moins 2, est-ce que l'application réciproque $\widetilde{P}^{-1}$ de $\widetilde{P}$ est une application polynomiale ?

Partie III : Matrices symétriques positives

On note $\mathscr{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad {}^tUAU \geq 0.$$

Soit A une matrice symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

10. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$? Justifier.

11. (a) Montrer que si A est dans $\mathscr{S}_n^+$, alors toutes les valeurs propres de A sont dans $[0, +\infty[$.

    (b) Réciproquement, montrer que si toutes les valeurs propres de A sont dans $[0, +\infty[$, alors A est dans $\mathscr{S}_n^+$.

Partie IV : Matrice symétrique positive solution d'une équation polynomiale spéciale

Soit $P \in E$ de degré $n-1$ (l'ensemble E a été défini dans la partie II), et soit $A \in \mathscr{S}_n^+$ admettant n valeurs propres distinctes, notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, appartenant toutes à $[P(0), +\infty[$.

On note D la matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les termes diagonaux sont successivement $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et Q une matrice orthogonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QDQ^{-1}$.

On se propose de résoudre l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathscr{S}_n^+$.

12. On suppose que l'équation $P(S) = A$ a une solution dans $\mathscr{S}_n^+$.

    Soit S appartenant à $\mathscr{S}_n^+$ telle que $P(S) = A$. On note $\Delta = Q^{-1}SQ$.

    (a) Montrer que $SA = AS$ et en déduire que $\Delta D = D\Delta$.

    (b) Démontrer que Δ est diagonale et que les éléments diagonaux de Δ sont tous positifs ou nuls.

13. Établir que l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathscr{S}_n^+$, admet une solution et une seule, et que celle-ci est $Q\Delta Q^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale que l'on exprimera à l'aide de $\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)$, où $\widetilde{P}$ a été définie dans la partie II.

14. *Exemple.* On prend ici $n = 4$, $P = x^3 + x + 1$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 21 \end{pmatrix}$.

    (a) Vérifier que $P \in E$.

    (b) Déterminer les valeurs propres de A et montrer que $A \in \mathscr{S}_4^+$.

    (c) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale Q telles que $A = QDQ^{-1}$.

    (d) Résoudre l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathscr{S}_4^+$.