Un corrigé

Partie I - Une application linéaire de $\mathcal{H}_n$ dans $\mathcal{S}_n$

1. a) La vérification est immédiate pour établir que $\mathcal{H}_n$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{S}_n$.

De plus, si $A \in \mathcal{S}_n$, alors en notant D la matrice diagonale ayant la même diagonale que A et B la matrice identique à A sauf pour ses éléments diagonaux qui sont tous nuls, alors $A = B + D$ et cette écriture est unique.

En effet si $A = B' + D'$ avec D' diagonale et $B' \in \mathcal{H}_n$ alors $D - D' = B' - B$, donc $B' - B = 0$ car elle est diagonale à diagonale nulle, et ainsi $D - D' = 0$. Finalement $B = B'$ et $D = D'$.

b) On a alors : $\dim(\mathcal{H}_n) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ d'où $\boxed{\dim(\mathcal{H}_n) = \dfrac{n(n+1)}{2} - n = \dfrac{n(n-1)}{2}}$.

2. a) Déterminons la matrice du projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(U_n)$.

Puisque $V = \frac{1}{\sqrt{n}}U_n$ est une base orthonormée de $\text{Vect}(U_n)$, alors on sait d'après le cours que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, la projection orthogonale de X sur $\text{Vect}(U_n)$ vaut : $({}^tVX)V = V({}^tVX) = \frac{1}{n}U_n{}^tU_nX$.

D'où la matrice dans la base canonique de ce projeteur est $\frac{1}{n}U_n{}^tU_n$.

b) On sait alors que $\boxed{H_n = \mathrm{I}_n - \frac{1}{n}U_n{}^tU_n \text{ est la matrice du projecteur orthogonal sur } \text{Vect}(U_n)^\perp}$.

c) On a $\ker(H_n) = \text{Vect}(U_n)$ qui est de dimension 1, d'où $\boxed{H_n \text{ n'est pas inversible}}$. $\text{Im}(H_n) = \text{Vect}(U_n)^\perp$ d'où $\boxed{\text{rg}(H_n) = n-1}$.

3. La linéarité est immédiate. D'autre part, ${}^t\Phi(A) = -\frac{1}{2}{}^t(H_nAH_n) = -\frac{1}{2}{}^tH_n{}^tA{}^tH_n = -\frac{1}{2}H_nAH_n$ car A et H_n sont symétriques.

4.
```
def phi(A):
    n=np.shape(A)[0]
    Un=np.ones((n,1))
    Vn=np.dot(Un,np.transpose(Un))
    In=np.eye(n,n)
    Hn=In+(-1/n)*Vn
    return (-1/2)*np.dot(Hn,np.dot(A,Hn))
```
un calcul rapide montre que `Phi(np.array([[0,2],[2,0]]))` renvoie `array([[0.5,-0.5],[-0.5,0.5]])`.

5. a) La matrice $U_n{}^tU_n$ a tous ses coefficients qui valent 1 d'où on en déduit que

$\boxed{\text{les éléments diagonaux de } H_n \text{ valent tous } 1 - \tfrac{1}{n} \text{ et les non diagonaux } -\tfrac{1}{n}}$.

b) Si l'on note $h_{i,j}$ l'élément générique de H_n, alors on a : $a'_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}h_{k,j} = a_{i,j}\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=1,k\neq j}^{n} a_{i,k}$,

i.e. $\boxed{a'_{i,j} = a_{i,j} - a_i}$

c) En réutilisant les notations précédentes, on a : $b_{i,j} = -\frac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} h_{i,k}a'_{k,j} = -\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})a'_{i,j} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1,k\neq i}^{n} a'_{k,j}$.

Ainsi on a :

$$b_{i,j} = -\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})(a_{i,j} - a_i) + \frac{1}{2n}\sum_{k=1,k\neq i}^{n}(a_{k,j} - a_k) = \frac{1}{2}(a_i - a_{i,j}) + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(a_{k,j} - a_k)$$

Or $\frac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k,j} - a_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,j} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a_j - a$. D'où finalement :

$$\boxed{b_{i,j} = \frac{1}{2}(a_i + a_j - a_{i,j} - a)}$$

d) Dans cet exemple : $a_1 = 1, a_2 = \frac{4}{3}, a_3 = \frac{5}{3}$ et $a = \frac{4}{3}$.

D'où, $b_{1,1} = \frac{1}{2}(1+1-\frac{4}{3}) = \frac{1}{3}$, $b_{1,2} = \frac{1}{2}(1+\frac{4}{3}-1-\frac{4}{3}) = 0$, $b_{1,3} = \frac{1}{2}(1+\frac{5}{3}-2-\frac{4}{3}) = -\frac{1}{3}$, de même $b_{2,2} = \frac{2}{3}$, $b_{2,3} = -\frac{2}{3}$ et $b_{3,3} = 1$.

D'où $\Phi(A) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

6. a) Puisque $A \in \ker(\Phi)$, en reprenant les notations de la question précédente, on a en particulier $b_{i,i} = 0$, donc $2a_i - a = 0$ i.e. $\boxed{a_i = \frac{a}{2}}$.

b) Or $a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$, d'où $a = \frac{a}{2}$ i.e. $\boxed{a = 0}$. Sachant que les $b_{i,j}$ sont nuls, en reprenant la relation de la question précédente, puisque $a = 0$, les a_i sont aussi nuls, on en déduit que $a_{i,j}$ est nuls. Donc $\boxed{A \text{ est la matrice nulle}}$.

c) Le noyau de Φ est donc réduit à la matrice nulle, ceci prouve que $\boxed{\Phi \text{ est injective}}$.

7. a) Soit $B \in \mathrm{Im}(\Phi)$, il existe $A \in \mathcal{H}_n$ telle que $B = -\frac{1}{2}H_nAH_n$. D'où $BU_n = -\frac{1}{2}H_nAH_nU_n$. H_n étant le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(U_n)^\perp$, $H_nU_n = 0$ d'où $BU_n = 0$ i.e. $B \in \mathcal{K}_n$ d'où $\boxed{\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathcal{K}_n}$.

b) Si M est diagonale, d'éléments diagonaux $d_1, ..., d_n$, alors $MU_n = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$. D'où $M \in \mathcal{K}_n$ ssi $d_1 = ... = d_n = 0$ i.e. M est la matrice nulle. On a bien $\boxed{\mathcal{K}_n \cap \mathcal{D}_n = \{0\}}$ i.e. ces deux s.e.v. sont en somme directe.

c) Ainsi $\dim(\mathcal{K}_n \oplus \mathcal{D}_n) = \dim(\mathcal{K}_n) + n$ et $\mathcal{K}_n \oplus \mathcal{D}_n$ est un s.e.v. de $\mathcal{S}_n$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

D'où $\dim(\mathcal{K}_n) \leq \frac{n(n+1)}{2} - n$ i.e. $\dim(\mathcal{K}_n) \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Or par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = \frac{n(n-1)}{2}$, et $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathcal{K}_n$, donc $\dim(\mathcal{K}_n) \geq \frac{n(n-1)}{2}$, d'où le résultat.

On en déduit $\boxed{\text{l'égalité demandée puisque } \mathrm{Im}(\Phi) \text{ et } \mathcal{K}_n \text{ sont de même dimension et que } \mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathcal{K}_n.}$

Partie II - Propriétés des matrices euclidiennes

8. On trouve que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Phi(A) = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ -4 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

La méthode du pivot donne $\boxed{\text{le spectre de cette matrice : } \{1, \frac{1}{3}, 0\}}$.

9. a) Soit $E_1, ..., E_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\|E_i - E_j\|^2 = 2$ d'où en posant $X_i = \frac{1}{\sqrt{2}}E_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a bien pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\|X_i - X_j\|^2 = 1$. Donc $\boxed{A \in \mathcal{E}_{n,n}.}$

b) On a pour tout i, $a_i = \frac{n-1}{n} = a$.

D'où $\boxed{\text{si } i \neq j,\ b_{i,j} = -\frac{1}{2}(\frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n} - 1 - \frac{n-1}{n}) = -\frac{1}{2n} \text{ et } b_{i,i} = -\frac{1}{2}(\frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n} - \frac{n-1}{n}) = \frac{n-1}{2n}.}$

c) On a bien que $\Phi(A) = \frac{1}{2}H_n$, d'où $\boxed{\mathrm{rg}(\Phi(A)) = \mathrm{rg}(H_n) = n-1.}$ et H_n étant un projecteur non trivial, $\mathrm{Sp}(H_n) = \{0,1\}$ d'où $\boxed{\mathrm{Sp}(\Phi(A) = \{0, \frac{1}{2}\}}$.

10. Si $k \geq p$, en ajoutant à chaque X_i $k-p$ composantes égales à 0, on obtient un vecteur de $\mathbb{R}^k$ et on a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\|X_i' - X_j'\|^2 = \|X_i - X_j\|^2$, ce qui prouve que $X_1', \ldots, X_n'$ est associée à A, d'où $A \in \mathcal{E}_{n,k}$.

11. a) Immédiat.

b) Il suffit de prendre $Y = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$.

c) On utilise les célèbres identités remarquables : $\boxed{a_{i,j} = \|X_i - X_j\|^2 = \|X_i\|^2 + \|X_j\|^2 - 2\,{}^tX_iX_j}$. D'où :

$$a_i = \frac{1}{n}\left(n\|X_i\|^2 + \sum_{j=1}^{n} \|X_j\|^2 - 2\sum_{j=1}^{n} {}^tX_iX_j\right)$$

Par linéarité du produit scalaire : $\sum_{j=1}^{n} {}^tX_iX_j = {}^tX_i\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = 0$. Ainsi $\boxed{a_i = \|X_i\|^2 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \|X_j\|^2}$.

De plus $a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\|X_i\|^2 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|X_j\|^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|X_i\|^2 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|X_j\|^2$, d'où $\boxed{a = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\|X_j\|^2}$.

d) On a vu dans la question 5.c) que : $b_{i,j} = \frac{1}{2}(a_i + a_j - a_{i,j} - a)$. D'où :

$$b_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\|X_i\|^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|X_k\|^2 + \|X_j\|^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|X_k\|^2 - \|X_i - X_j\|^2 - \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\|X_k\|^2\right)$$

Il reste : $b_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\|X_i\|^2 + \|X_j\|^2 - \|X_i - X_j\|^2\right)$. Une des non moins célèbres identités de polarisation donne le résultat : $\boxed{b_{i,j} = {}^tX_iX_j}$.

Les colonnes de X sont $X_1, \ldots, X_n$ alors les lignes de ${}^tX$ sont ${}^tX_1, \ldots, {}^tX_n$. Ainsi l'élément générique de ${}^tXX$ vaut ${}^tX_iX_j$ $\boxed{\text{ce qui prouve que } \Phi(A) = {}^tXX.}$

e) Montrons que $\ker(\Phi(A)) = \ker(X)$.

On a classiquement $\ker(X) \subset \ker(\Phi(A))$.

Réciproquement, si $V \in \ker(\Phi(A))$, alors ${}^tXXV = 0$ d'où ${}^tV\,{}^tXXV = 0$ ie $\|XV\|^2 = 0$ donc $XV = 0$ soit $V \in \ker(X)$. On a donc l'égalité par double inclusion.

D'après le théorème du rang, $\boxed{\mathrm{rg}(X) = n - \dim(\ker(X)) = n - \dim(\ker(\Phi(A)) = \mathrm{rg}(\Phi(A))}$, cdfd.

Les vecteurs $X_1, \ldots, X_n$ étant dans $\mathbb{R}^p$, le rang de $(X_1, \ldots, X_n)$ est inférieur à p d'où $\mathrm{rg}(X) \leq p$ i.e. $\boxed{\mathrm{rg}(\Phi(A)) \leq p.}$

12. On a vu que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathcal{K}_n$ d'où $\Phi(A)U_n = 0$ et ainsi 0 est bien une valeur de $\Phi(A)$.

De plus, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\Phi(A))$, il existe $V \in \mathbb{R}^n$ tel que $\Phi(A)V = \lambda V$, d'où ${}^tV\,{}^tXXV = \lambda\,{}^tVV = \lambda\|V\|^2$, i.e. $\|XV\|^2 = \lambda \underbrace{\|V\|^2}_{\neq 0}$ soit $\lambda = \frac{\|XV\|^2}{\|V\|^2}$. Ceci prouve bien que $\boxed{\lambda \geq 0.}$

Partie III - Caractérisation de Schönberg-Young-Householder des matrices euclidiennes

13. a) G étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée.

On construit une base orthonormée de vecteurs propres en plaçant les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles en premier et ensuite ceux associés à la valeur propre 0. Le noyau de G étant de dimension $n-p$, il y a p vecteurs associés aux valeurs propres non nulles et $n-p$ à la valeurs propre 0.

Soit la matrice P dont les colonnes sont formées de ces vecteurs propres.

Alors $P^{-1}GP$ est diagonale avec ses p premiers coefficients qui sont strictement positifs, donc que l'on peut noter $\alpha_1^2,...,\alpha_p^2$ et les autres qui sont nuls. En posant $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha_p & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien ${}^tPGP = \Delta^2$ d'où $G = P\Delta^2({}^tP)$.

b) La ligne numéro i de $\Delta({}^tP)$ est égale à la ligne i de Δ multipliée par ${}^tP$. Or les $n-p$ dernières lignes de Δ sont nulles, d'où $\boxed{\text{les } n-p \text{ dernière lignes de } \Delta({}^tP) \text{ sont nulles.}}$

c) Notons $m_{i,j}$ les coefficients de $\Delta({}^tP)$. L'élément générique de G égal à $\sum_{k=1}^{n} m_{k,i}m_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} m_{k,i}m_{k,j} = (m_{1,i}...m_{p,i})\begin{pmatrix} m_{1,j} \\ \vdots \\ m_{p,j} \end{pmatrix}$ ce qui correspond à bien l'élément générique de ${}^tXX$, d'où l'égalité annoncée.

14. a) Sans difficulté.

b) On remarque que $\sum_{k=1}^{n} X_k = XU_n$. D'où $\|\sum_{k=1}^{n} X_k\|^2 = {}^t(XU_n)XU_n = {}^tU_n{}^tXXU_n = {}^tU_nGU_n = 0$, d'où $\boxed{\sum_{k=1}^{n} X_k = 0}$.

c) Si l'on note A' la matrice euclidienne associée à $X_1, ..., X_n$, on a puisque $\sum_{k=1}^{n} X_k = 0$, d'après la partie 2, $\Phi(A')$ est d'élément générique ${}^tX_iX_j$. Ainsi $\Phi(A') = G$ et Φ étant injective $A' = A$. cqfd.

15. a) • On a vu dans la partie 2, question 12, que si $A \in \mathcal{E}_n$ alors $\mathrm{Sp}(\Phi(A)) \subset \mathbb{R}^+$.

• Dans les questions 13 et 14 que si A n'est pas la matrice nulle et $\mathrm{Sp}(\Phi(A)) \subset \mathbb{R}^+$ alors $A \in \mathcal{E}_n$. Si A est la matrice nulle, elle appartient bien à $\mathcal{E}_n$.

On a bien l'équivalence.

Si $A \in \mathcal{E}_n$ n'est pas la matrice nulle et $p = \mathrm{rg}(\Phi(A))$ alors on a vu que que $A \in \mathcal{E}_{n,p}$ dans les questions 13 et 14.

Et on a vu dans la partie 2, que si $A \in \mathcal{E}_{n,k}$ alors $k \geq \mathrm{rg}(\Phi(A))$. D'où $\boxed{\mathrm{rg}(\Phi(A)) = \min\{k \in \mathbb{N}^*/A \in \mathcal{E}_{n,k}\}.}$

b) Trivialement la matrice nulle appartient à $\mathcal{E}_{n,n-1}$.

Si $A \in \mathcal{E}_n$ et n'est pas la matrice nulle alors, d'après les questions précédentes, $A \in \mathcal{E}_{n,\mathrm{rg}(\Phi(A))}$ et $\mathrm{rg}(\Phi(A)) \leq n-1$, d'où $A \in \mathcal{E}_{n,n-1}$ d'après la question 10. D'où l'égalité.

c) D'après la question 9, la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients valent 1, sauf les coefficients diagonaux qui sont nuls, appartient à $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_{n,n-1}$.

Donc il existe n vecteurs $X_1, ..., X_n$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ tel que pour $i \neq j$, $\|X_i - X_j\|^2 = 1$.

S'il existe m vecteurs de $\mathbb{R}^{n-1}$ vérifiant cette propriété, alors la matrice A associée est euclidienne de type $(m, n-1)$, d'où $\mathrm{rg}(\Phi(A)) \leq n-1$ i.e. $m-1 \leq n-1$ d'où $m \leq n$, ce qui prouve le résultat annoncé.

16. L'expression est la suivante : `min(al.eig(Phi(A))[0])>=0`.

17. Un grand classique :

• Montrons que la condition est nécessaire. Si $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^+$, alors il existe une matrice orthogonale P

et une matrice diagonale D à coefficients positifs telles que $M = PD\,{}^tP$. D'où ${}^tXMX = {}^tXPD\,{}^tPX$. On pose $Y = {}^tPX$ et on note $y_1, ..., y_n$ les coefficients de Y et $\alpha_1, ..., \alpha_n$ les éléments diagonaux de D, ${}^tXMX = {}^tYDY = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k^2$. D'où ${}^tXMX \geq 0$.

- Réciproquement, si α est une valeur propre de M et X un vecteur propre, ${}^tXMX = {}^tX(\alpha X) = \alpha \|X\|^2$. D'où $\alpha = \dfrac{{}^tXMX}{\|X\|^2}$, et ainsi $\alpha \geq 0$.

La suite s'en déduit facilement.

18. a) D'après la question 5.d), $\Phi(A) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. D'où ${}^tX\Phi(A)X = \frac{1}{3}(x\ y\ z)\begin{pmatrix} x-z \\ 2y-2z \\ -x-2y+3z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(x^2 - xz + 2y^2 - 2yz - zx - 2zy + 3z^2) = \frac{1}{3}(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz - 4zy)$.

b) On a alors ${}^tX\Phi(A)X = \frac{1}{3}(x^2 - 2xz + z^2 + 2(y^2 - 2yz + z^2)) = \frac{1}{3}((x-z)^2 + 2(y-z)^2)$, d'où ${}^tX\Phi(A)X \geq 0$ pour tout X. $\boxed{A \text{ est bien euclidienne.}}$

Partie IV - Une condition nécessaire et une condition suffisante utilisant la trace

19. a) On a $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = {}^tU_r\Lambda$, d'où $m = \frac{1}{r}\,{}^tU_r\Lambda$.

M^2 est semblable à la matrice diagonale dont les valeurs non nulles sont $\lambda_1^2, ..., \lambda_r^2$. Ainsi $\mathrm{Tr}(M^2) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^2$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^r$ aux vecteurs Λ et U_r, on a ainsi :

$$\boxed{({}^tU_r\Lambda)^2 \leq \|U_r\|^2\|\Lambda\|^2 = r\left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k^2\right) \quad \text{d'où } m^2 \leq \frac{\mathrm{Tr}(M^2)}{r}}$$

Ainsi $\dfrac{\mathrm{Tr}(M^2)}{r} - m^2 \geq 0$ ce qui justifie la définition de s.

b) On a, ${}^t\Lambda H_r \Lambda = \|\Lambda\|^2 - \dfrac{1}{r}({}^t\Lambda U_r)^2 = \mathrm{Tr}(M^2) - \dfrac{1}{r}({}^t\Lambda U_r)^2$, d'où

$$\boxed{\tfrac{1}{r}\,{}^t\Lambda H_r\Lambda = \frac{1}{r}\mathrm{Tr}(M^2) - \left(\frac{{}^t\Lambda U_r}{r}\right)^2 = \frac{1}{r}\mathrm{Tr}(M^2) - m^2 = s^2.}$$

c) On applique Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^r$ aux vecteurs H_rY et $H_r\Lambda$:

$$\left|{}^t(H_rY)H_r\Lambda\right| \leq \|H_rY\|\|H_r\Lambda\|$$

Or ${}^t(H_rY)H_r\Lambda = {}^tY\,{}^tH_rH_r\Lambda = {}^tY\,H_r^2\Lambda = {}^tY\,H_r\Lambda$.

De même, $\|H_rY\| = \sqrt{{}^t(H_rY)H_rY} = \sqrt{{}^tYH_rY}$ et $\|H_r\Lambda\| = \sqrt{{}^t(H_r\Lambda)H_r\Lambda} = \sqrt{{}^t\Lambda H_r\Lambda}$ ce qui permet de conclure.

Ainsi $-\sqrt{{}^tYH_rY}\sqrt{{}^t\Lambda H_r\Lambda} \leq {}^tY\,H_r\Lambda \leq \sqrt{{}^tYH_rY}\sqrt{{}^t\Lambda H_r\Lambda}$, d'où

$$\boxed{-\sqrt{{}^tYH_rY}\sqrt{rs^2} \leq {}^tY\,H_r\Lambda \leq \sqrt{{}^tYH_rY}\sqrt{rs^2} \text{ d'où } -s\sqrt{r}\sqrt{{}^tYH_rY} \leq {}^tY\,H_r\Lambda \leq s\sqrt{r}\sqrt{{}^tYH_rY}.}$$

d) H_rY est la dernière colonne de H_r soit $\begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \\ \vdots \\ -\frac{1}{r} \\ 1-\frac{1}{r} \end{pmatrix}$ d'où $\boxed{{}^tYH_rY = 1 - \frac{1}{r} = \frac{r-1}{r}.}$

${}^tYH_r$ est la dernière ligne de H_r soit $\left(-\frac{1}{r} \quad \ldots -\frac{1}{r} \quad 1-\frac{1}{r}\right)$ d'où $\boxed{{}^tYH_r\Lambda = -\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r-1}\lambda_k + (1-\frac{1}{r})\lambda_r = \lambda_r - m.}$

On a donc : $-s\sqrt{r}\sqrt{\dfrac{r-1}{r}} \leq \lambda_r - m \leq s\sqrt{r}\sqrt{\dfrac{r-1}{r}}$ d'où $\boxed{\lambda_r \geq m - s\sqrt{r-1}.}$

e) On a $r^2(m-\lambda_r)^2 = \left(\sum_{k=1}^r \lambda_k - r\lambda_r\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^r (\lambda_k - \lambda_r)\right)^2$. Or pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, $\lambda_k - \lambda_r \geq 0$ et $\left(\sum_{k=1}^r (\lambda_k-\lambda_r)\right)^2 = \sum_{k=1}^r(\lambda_k-\lambda_r)^2 + 2\underbrace{\sum_{1\leq i<j\leq r}(\lambda_i-\lambda_r)(\lambda_j-\lambda_r)}_{\geq 0}$, d'où $\left(\sum_{k=1}^r(\lambda_k-\lambda_r)\right)^2 \geq \sum_{k=1}^r(\lambda_k-\lambda_r)^2$ et ainsi

$$\boxed{r^2(m-\lambda_r)^2 \geq \sum_{k=1}^r(\lambda_k-\lambda_r)^2}$$

De plus, $\sum_{k=1}^r(\lambda_k-\lambda_r)^2 = \sum_{k=1}^r \lambda_k^2 - 2\lambda_r\left(\sum_{k=1}^r \lambda_k\right) + r\lambda_r^2 = \mathrm{Tr}(M^2) - 2r\lambda_r m + r\lambda_r^2$, d'où :

$$\boxed{\sum_{k=1}^r(\lambda_k-\lambda_r)^2 = r\left(\frac{\mathrm{Tr}(M^2)}{r} - 2\lambda_r m + \lambda_r^2\right) = r\left(s^2+m^2-2\lambda_r m+\lambda_r^2\right) = rs^2 + r(m-\lambda_r)^2}$$

On a alors $r^2(m-\lambda_r)^2 \geq rs^2 + r(m-\lambda_r)^2$, d'où $(r-1)(m-\lambda_r)^2 \geq s^2$.

$m \geq \lambda_r$, en prenant la racine carrée de l'inégalité précédente :

$$\boxed{\sqrt{r-1}(m-\lambda_r) \geq s \text{ d'où } m - \tfrac{s}{\sqrt{r-1}} \geq \lambda_r}$$

20. a) D'après les propriétés de la trace et le fait que $H_n^2 = H_n$, $m = \dfrac{1}{r}\mathrm{Tr}(-H_nAH_n) = \dfrac{1}{r}(-\mathrm{Tr}(AH_n)) = \dfrac{1}{r}\left(-\underbrace{\mathrm{Tr}(A)}_{=0} + \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(AU_n{}^tU_n)\right) = \dfrac{1}{nr}\mathrm{Tr}(\underbrace{{}^tU_nAU_n}_{\in\mathbb{R}})$. Donc $\boxed{m = \dfrac{1}{nr}{}^tU_nAU_n.}$

De même :

$$s^2 = \frac{1}{r}\mathrm{Tr}(H_nAH_nAH_n) - m^2 = \frac{1}{r}\mathrm{Tr}((AH_n)^2) - m^2$$

Or $(AH_n)^2 = (A - \dfrac{1}{n}AU_n{}^tU_n)^2 = A^2 - \dfrac{1}{n}A^2U_n{}^tU_n - \dfrac{1}{n}AU_n{}^tU_nA + \dfrac{1}{n^2}AU_n{}^tU_nAU_n{}^tU_n$.

De plus,

- $\mathrm{Tr}(A^2U_n{}^tU_n) = \mathrm{Tr}({}^tU_nA^2U_n) = {}^tU_nA^2U_n$ et $\mathrm{Tr}(AU_n{}^tU_nA) = \mathrm{Tr}(A^2U_n{}^tU_n) = {}^tU_nA^2U_n$.
- $\mathrm{Tr}(AU_n{}^tU_nAU_n{}^tU_n) = \mathrm{Tr}(({}^tU_nAU_n)^2) = ({}^tU_nAU_n)^2 = n^2r^2m^2$.

D'où $\boxed{s^2 = \frac{1}{r}(\mathrm{Tr}(A^2) - \frac{2}{n}\,{}^tU_nA^2U_n + r^2m^2) - m^2 = \frac{1}{r}\mathrm{Tr}(A^2) - \frac{2}{nr}\,{}^tU_nA^2U_n + (r-1)m^2.}$

b) On a $(r-1)(m-\lambda_r)^2 \leq (r-1)m^2$ d'où d'après la question 19.e), $s^2 \leq (r-1)m^2$ d'où $\frac{1}{r}(\mathrm{Tr}(A^2) - \frac{2}{nr}\,{}^tU_nA^2U_n \leq 0$ donc $\boxed{\mathrm{Tr}(A^2) \leq \frac{2}{n}\,{}^tU_nA^2U_n}$.

c) Si l'inégalité est vérifiée, $s^2 \leq -\frac{n-3}{rn^2(n-2)}({}^tU_nAU_n)^2+(r-1)m^2$, d'où $s^2 \leq \left(\frac{n-3}{rn^2(n-2)}r^2n^2 + (r-1)\right)m^2$, donc $s^2 \leq \left(-\frac{n-3}{n-2}r + (r-1)\right)m^2$ puis $(r-1)s^2 \leq \left(-\frac{(n-3)(r-1)}{n-2}r + (r-1)^2\right)m^2$.

Or on sait que $r \leq n-1$, d'où on en déduit que $\frac{(n-3)(r-1)}{n-2} \geq r-2$ car $(n-3)(r-1)-(n-2)(r-2) = n-1-r$ et ainsi $-\frac{(n-3)(r-1)}{n-2}r + (r-1)^2 \leq -(r-2)r + (r-1)^2$ qui vaut 1.

Donc $(r-1)s^2 \leq m^2$ i.e. $\sqrt{r-1}s \leq m$. L'inégalité de la question 19.d) montre que $\boxed{\lambda_r \geq 0}$ ce qui prouve que A est euclidienne.

21. a) D'après la question 20.b), cette condition est nécessaire si A n'est pas la matrice nulle et est vérifiée par la matrice nulle. Elle est suffisante d'après la question 20.c) pour $n=3$ puisque $n-3=0$.

$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+1 & 1 & a \\ 1 & a^2+1 & a \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Tr}(A^2) = 2a^2+4$, $\frac{2}{3}\,{}^tU_3A^2U_3 = \frac{2}{3}(2a^2+4a+6) = \frac{4}{3}a^2 + \frac{8}{3}a + 4$.

D'où A est euclidienne ssi $-\frac{2}{3}a^2 + \frac{8}{3}a \geq 0$ i.e $a(4-a) \geq 0$ i.e. $\boxed{a \in [0,4]}$.

b) Un calcul rapide montre que ${}^tU_nAU_n = n(n-1)$. $A^2 = \begin{pmatrix} (n-1) & (n-2) & \dots & \dots & (n-2) \\ (n-2) & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & (n-2) \\ (n-2) & \dots & \dots & (n-2) & (n-1) \end{pmatrix}$ d'où

$\mathrm{Tr}(A^2) = n(n-1)$ et ${}^tU_nA^2U_n = n(n-1) + n(n-1)(n-2) = n(n-1)^2$. D'où :

$$\frac{2}{n}\,{}^tU_nA^2U_n - \frac{n-3}{n^2(n-2)}({}^tU_nAU_n)^2 = 2(n-1)^2 - \frac{n-3}{n^2(n-2)}n^2(n-1)^2 = (n-1)^2\frac{n-1}{n-2}$$

On vérifie que l'on a bien $\frac{(n-1)^3}{n-2} \geq n(n-1)$ ce qui prouve le résultat attendu.

22. Le script :

```
def CsEuclidinne(A):
    n=np.shape(A)[0]
    A2=np.dot(A,A)
    return 2/n*np.sum(A2)-(n-3)/(n**2*(n-2))*(np.sum(A)**2)-np.trace(A2)>=0
```