DS15

Correction du devoir surveillé type Maths 3

Exercice 1 (Ecricome 2005)

1. Tout d'abord, on montre par récurrence que la suite est bien définie (il se pourrait en effet qu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $u_{n-1} < n$ et que $u_n = \sqrt{u_{n-1} + n}$ ne soit pas défini) et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

   Init. u_0 est bien définie et $u_0 \geq 0$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

   Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$, et montrons la propriété au rang n.

   On a $u_{n-1} \geq 0$ par hypothèse de récurrence, donc $n + u_{n-1} \geq 0$. Ainsi $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ est bien défini, et positif. D'où la propriété au rang n.

   Concl. Par principe de récurrence, u_n est bien défini et positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Vérifions à présent l'inégalité demandée. On a $u_0 \geq 0 = \sqrt{0}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$n \leq n + u_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} \leq \sqrt{n + u_{n-1}} = u_n$$

   par croissance de la fonction racine carrée. Ainsi, on a bien $\boxed{u_n \geq \sqrt{n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

   On a $\sqrt{n} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Par théorème de comparaison, on en déduit que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n \text{ existe et vaut } +\infty.}$

2. (a) Pour tout $x \geq 0$, on a :

   $$\frac{1+x}{2} - \sqrt{x} = \frac{1 + x - 2\sqrt{x}}{2} = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2} \boxed{\geq 0.}$$

   D'où l'inégalité souhaitée.

   (b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}$.

   Init. On a $u_0 \leq 0 + \dfrac{u_0}{2^0}$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

   Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$. Montrons qu'elle est vraie au rang n.

   On applique l'inégalité de la question précédente à $x = n + u_{n-1}$:

   $$u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \leq \frac{1 + n + u_{n-1}}{2} = \frac{1+n}{2} + \frac{u_{n-1}}{2}.$$

   Or par hypothèse de récurrence, on a :

   $$u_{n-1} \leq n - 1 + \frac{u_0}{2^{n-1}}.$$

   En remplaçant dans l'expression précédente, on obtient :

   $$u_n \leq \frac{1+n}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{u_0}{2^n} = n + \frac{u_0}{2^n}.$$

   D'où la propriété au rang n.

   Concl. Par principe de récurrence, on a $\boxed{u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n-1} \leq n - 1 + \frac{u_0}{2^{n-1}} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{u_{n-1}}{n^2} \leq \frac{n-1}{n^2} + \frac{u_0}{n^2 2^{n-1}}$$

Puisque $\frac{n-1}{n^2} + \frac{u_0}{n^2 2^{n-1}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{u_0}{n^2 2^{n-1}}$ converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{n^2} \text{ existe et vaut } 0.}$

(c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_n}{n} = \frac{\sqrt{n + u_{n-1}}}{n} = \sqrt{\frac{n + u_{n-1}}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2}}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2} = 0$ par la question précédente. Donc $\boxed{(\frac{u_n}{n})_{n\geq 1} \text{ converge bien vers } 0.}$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sqrt{n} \leq u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$$

d'où :

$$1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n + u_{n-1}}{n}}$$

On a donc bien que, pour tout entier n non nul, $1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$.

On a :

$$\frac{u_{n-1}}{n} = \frac{u_{n-1}}{n-1}\frac{n-1}{n}.$$

Or, on a par la question précédente que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{n-1} = 0$, et puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1$, on obtient par produit des limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{n} = 0.$$

Ainsi on a $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} = 1$. Par le théorème des gendarmes, la limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ existe et vaut 1. Ainsi on a l'équivalent $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}.}$

3. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$.

(a) On a le développement limité usuel suivant en 0 :

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x).$$

On en déduit en particulier l'équivalent suivant :

$$\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} w_n &= u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n + u_{n-1}} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - 1\right) \end{aligned}$$

Or on a montré que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{n} = 0$, donc :

$$\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{u_{n-1}}{n}.$$

Enfin on a vu que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$, donc que $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n-1}$. On obtient donc :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{u_{n-1}}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{\sqrt{n-1}}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2}.$$

La suite $\boxed{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet bien la limite } \ell = \frac{1}{2} \text{ lorsque } n \to +\infty.}$

(b) On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}.$$

On en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) = 0.}$

On a $u_n = w_n + \sqrt{n}$ pour tout n, d'où en remplaçant :

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= (w_n + \sqrt{n}) - (w_{n-1} + \sqrt{n-1}) \\ &= (w_n - w_{n-1}) + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \end{aligned}$$

Or on a $\lim w_n = \frac{1}{2}$, donc $\lim w_{n-1} = \frac{1}{2}$, et par différence $\lim w_n - w_{n-1} = 0$. On peut donc conclure avec le calcul de la limite à la question précédente que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(u_n - u_{n-1}) = 0.}$$

(c) Puisque $\lim_{n\to+\infty}(u_n - u_{n-1}) = 0$, on a $u_n - u_{n-1} \geq -\frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout entier n :

$$\boxed{n \geq N_0 \quad \Rightarrow \quad u_n \geq u_{n-1} - \frac{1}{2}.}$$

(d) On a en utilisant la définition de la suite (u_n) que :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+u_n} - \sqrt{n-1+u_{n-1}}$$

On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(\sqrt{n+u_n} - \sqrt{n-1+u_{n-1}})(\sqrt{n+u_n} + \sqrt{n-1+u_{n-1}})}{\sqrt{n+u_n} + \sqrt{n-1+u_{n-1}}} \\ &= \frac{(n+u_n) - (n-1+u_{n-1})}{\sqrt{n+u_n} + \sqrt{n-1+u_{n-1}}} = \frac{1+u_n-u_{n-1}}{\sqrt{n+u_n} + \sqrt{n-1+u_{n-1}}}. \end{aligned}$$

La quantité au dénominateur étant toujours positive, $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$. Or pour $n \geq N_0$, on a :

$$1 + u_n - u_{n-1} \geq 1 - 1/2 = 1/2 \geq 0$$

On a donc pour tout $n \geq N_0$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. En d'autres termes, la suite $\boxed{(u_n) \text{ est croissante à partir d'un certain rang}}$ (le rang N_0).

4. On peut proposer la fonction suivante :

```python
def suite(n):
    U = 1
    for k in range(n):
        U = np.sqrt(U+k) # sqrt est la fonction racine carré
    return(U)
```

Exercice 2 (Ecricome 2010)

1. **Étude de f.**

   (a) Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, alors $\deg P \leq n-1$ et $\deg P'' \leq n-2$, de sorte que $\deg(xP'(x)) \leq n$, et donc $\deg(f(P)) \leq n$. Ainsi, f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[x]$.
   Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

   $$\begin{aligned} f(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q)''(x) - 4x(\lambda P+Q)'(x) = \lambda P''(x) + Q''(x) - 4\lambda x P'(x) - 4xQ'(x) \\ &= \lambda\left(P''(x) - 4xP'(x)\right) + \left(Q''(x) - 4xQ'(x)\right) = \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

   Donc f est linéaire : $\boxed{\text{c'est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[x].}$

   (b) On a $f(e_0) = 0 - 4x \times 0 = 0$, $f(e_1) = 0 - 4x \times 1 = -4x$ et pour $k \geq 2$,

   $$f(e_k) = k(k-1)x^{k-2} - 4xkx^{k-1} = -4kx^k + k(k-1)x^{k-2}.$$

   Et donc

   $$A_n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} f(e_0) & f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & \ldots & f(e_{n-1}) & f(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 6 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & -8 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -3 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 & n(n-2) \\ \vdots & & & & & -4(n-1) & 0 \\ 0 & \cdots & \ldots & \cdots & \cdots & 0 & -4n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{n-2} \\ e_{n-1} \\ e_n \end{array} \end{array}$$

   On constate alors que $\boxed{\text{cette matrice est triangulaire supérieure.}}$

   (c) Les valeurs propres de A_n sont donc ses coefficients diagonaux, qui sont les $-4k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$, de sorte que $\mathrm{Spec}(f) = \mathrm{Spec}(A_n) = \{-4k, k \in [\![0, n]\!]\}$.
   En particulier, puisque f possède $n+1 = \dim E$ valeurs propres distinctes, $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$ et $\boxed{\text{tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.}}$

   (d) Soit $P = \sum\limits_{k=0} a_k X^k$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, avec $a_d \neq 0$, de sorte que $d = \deg P$. Alors

   $$f(P) = \sum_{k=2}^{d} k(k-1)a_k X^{k-2} - 4\sum_{k=1}^{d} k(k-1)a_k X^k$$

   En particulier, si $f(P) = \lambda P$, en identifiant les coefficients de degré d, il vient $-4da_d = \lambda a_d$, et puisque $a_d \neq 0$, on a donc $-4d = \lambda$, soit $\lambda = -4\deg P$.
   À présent, considérons P_n un vecteur propre de f associé à la valeur propre $-4n$.
   Puisque $E_{-4n}(f)$ est de dimension 1, nécessairement $E_{-4n}(f) = \mathrm{Vect}(P_n) = \{\mu P_n, \mu \in \mathbf{R}\}$.
   En particulier, il existe dans $E_{-4n}(f)$ un unique polynôme unitaire : celui pour lequel μ est l'inverse du coefficient dominant de P_n, qui sera nécessairement de degré n.
   Et donc $\boxed{\text{il existe bien un unique polynôme unitaire } H_n \text{ tel que } f(H_n) = -4nH_n}$, et ce polynôme est nécessairement de degré n.

2. **Étude de la suite $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$.**

(a) On a $H_n'' - 4XH_n' = -4nH_n$ et donc en dérivant

$$H_n^{(3)} - 4XH_n'' - 4H_n' = -4nH_n' \Leftrightarrow (H_n')'' - 4X(H_n')' = -4(n-1)H_n' \Leftrightarrow \boxed{f(H_n') = -4(n-1)H_n'.}$$

Autrement dit, H_n' est dans $E_{-4(n-1)}(f)$.
Or nous savons que $E_{-4(n-1)}(f)$ est de dimension 1 et contient $H_{n-1} \neq 0$, de sorte que $E_{-4(n-1)}(f) = \text{Vect}(H_{n-1})$.
Et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $H_n' = \lambda H_{n-1}$.
Or H_{n-1} possède 1 comme coefficient dominant alors que H_n' possède n
Par identification des coefficients dominants, on a donc nécessairement $\boxed{H_n' = nH_{n-1}.}$
En particulier, $H_n'' = nH_{n-1}' = n(n-1)H_{n-2}$ et donc la relation $H_n'' - 4xH_n' = -4nH_n$ s'écrit

$$n(n-1)H_{n-2} - 4nxH_{n-1} + 4nH_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{H_n - xH_{n-1} + \frac{(n-1)H_{n-2}}{4} = 0.}$$

(b) Le polynôme constant égal à 1 est unitaire, de degré 0 et vérifie $f(1) = -4 \times 0 \times 1$.
Mais d'après la question 1.(d), il y a unicité d'un tel polynôme : $\boxed{H_0 = 1.}$
De même, $f(e_1) = -4e_1$ et $e_1 = x$ est unitaire et de degré 1, donc $\boxed{H_1 = e_1.}$
Et donc :

$$H_2 = xH_1 - \frac{H_0}{4}\boxed{= x^2 - \frac{1}{4}} \text{ et } H_3 = xH_2 - \frac{H_1}{2}\boxed{= x^3 - \frac{3x}{4}.}$$

(c) Une possibilité est de créer un tableau `U` stockant les termes successifs de la suite, et de calculer la valeur de ces termes à l'aide d'une boucle `for`.

```
u = np.zeros(2025)
u[0] = 1
u[1] = 1
for i in range(2,2025):
      u[i] = u[i-1]-(i-1)*u[i-2]/4
print(u[2024])
```

3. **Application aux points critiques d'une fonction à trois variables.**

(a) 3.a. Les fonctions $(x, y, z) \mapsto x - y$, $(x, y, z) \mapsto y - z$ et $(x, y, z) \mapsto z - x$ sont $\mathscr{C}^1$ sur U car polynomiales, et de plus prennent leurs valeurs dans $\mathbf{R}^*$, par définition de U.
Par composition avec la fonction $t \mapsto \ln|t|$, qui est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$, les fonctions $(x, y, z) \mapsto \ln|x - y|$, $(x, y, z) \mapsto \ln|y - z|$ et $(x, y, z) \mapsto \ln|z - x|$ sont $\mathscr{C}^1$ sur U.
Enfin, $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur U car polynomiale. Et donc V est $\mathscr{C}^1$ sur U car somme de fonctions $\mathscr{C}^1$.
On a alors, pour tout $(x, y, z) \in V$,

$$\partial_1 V(x, y, z) = 2x - \frac{1}{x-y} + \frac{1}{z-x},$$
$$\partial_2 V(x, y, z) = 2y - \frac{1}{y-z} + \frac{1}{x-y},$$
$$\partial_3 V(x, y, z) = 2z + \frac{1}{y-z} - \frac{1}{z-x}.$$

Et donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in U$ est un point critique de V si, et seulement si,

$$\begin{cases} 2\alpha - \dfrac{1}{\alpha-\beta} + \dfrac{1}{\gamma-\alpha} = 0 \\ 2\beta - \dfrac{1}{\beta-\gamma} + \dfrac{1}{\alpha-\beta} = 0 \\ 2\gamma - \dfrac{1}{\gamma-\beta} + \dfrac{1}{\alpha-\gamma} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha) = \gamma-\alpha+\beta-\alpha \\ 2\beta(\beta-\gamma)(\alpha-\beta) = \alpha-\beta+\gamma-\beta \\ 2\gamma(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) = \beta-\gamma+\alpha-\gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) = 2\alpha-\beta-\gamma \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) = 2\beta-\alpha-\gamma \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 2\gamma-\alpha-\beta \end{cases}}.$$

(b) On a $Q'(x) = (x-\alpha)(x-\beta) + (x-\alpha)(x-\gamma) + (x-\beta)(x-\gamma)$ et donc

$$Q''(x) = 2((x-\alpha)+(x-\beta)+(x-\gamma)) = 2(3x-\alpha-\beta-\gamma).$$

Et donc

$$Q''(\alpha) - 4\alpha Q'(\alpha) = 2(2\alpha-\beta-\gamma) - 4\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$$

est nul si, et seulement si, $2\alpha(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta) = 2\alpha-\beta-\gamma$, ce qui, ô miracle !, est la première équation de notre système de la question précédente.
On montre de la même manière que la seconde équation est satisfaite si et seulement si $Q''(\beta) - \beta Q'(\beta) = 0$ et que la dernière est satisfaite si et seulement si γ est racine de $Q'' - 4xQ'$.
Et donc (α,β,γ) est un point critique de V si et seulement si α,β,γ sont trois racines de $Q'' - xQ'$.

Remarque. On peut même affirmer que α,β,γ sont les trois racines de $Q'' - 4XQ'$. En effet, celui-ci est de degré 3 donc possède au maximum trois racines distinctes, et α,β,γ sont distincts par hypothèse.

(c) Si $Q''-4xQ'$ possède α,β,γ comme racines, alors il est divisible par $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = Q$.
Donc il existe $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $Q''-4xQ' = PQ$. Or Q est de degré 3, tout comme $Q''-4xQ'$, de sorte que P est nécessairement de degré 0, donc une constante λ.
On a donc $Q'' - 4xQ' = \lambda Q$.
Le coefficient en x^3 de Q est clairement égal à 1.
Puisque Q'' est de degré 1 , il ne possède pas de terme de degré 3 , et donc le coefficient en x^3 de $Q'' - 4xQ'$ est celui de $-4xQ'$, qui est -12.
Et donc par identification des coefficients de degré 3 dans la relation $Q'' - 4xQ' = \lambda Q$, il vient $\lambda = -12$.
Ainsi, on a bien $\boxed{Q'' - 4xQ' = -12Q.}$
Autrement dit, Q est un vecteur propre de f, pour la valeur propre -12 . Comme de plus, il est unitaire, c'est forcément :

$$H_3 = x^3 - \frac{3x}{4} = x\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) = x\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Les racines de $H_3'' - 4xH_3' = -12H_3$ sont alors $0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Donc les points critiques de V sont parmi
$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.
Inversement, si (α,β,γ) est l'un des six points précédemment évoqués, alors

$$Q = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = H_3.$$

Et donc $Q'' - 4xQ' = -12H_3$, qui possède bien α, β et γ comme racines. Donc par la question 3.(a), (α, β, γ) est un point critique de V.
Et donc $\boxed{V \text{ possède six points critiques, qui ont été listés ci-dessus.}}$

Problème. (Ecricome 2008)

I. Méthode de Monte-Carlo

1. (a) Une densité de U est :

$$\boxed{f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(b) Par le théorème de transfert, la variable $g(U)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Or ceci est bien le cas puisqu'il s'agit d'une intégrale d'une fonction continue sur un segment. On peut donc conclure que $\boxed{g(U) \text{ admet une espérance égale à } J = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.}$

2. (a) Par lemme de coalition, les variables $g(U_i)$ sont mutuellement indépendantes. Elles suivent également toutes la même loi, et admettent donc une même espérance, qui vaut J par la question précédente, et une même variance σ^2 (sous réserve d'existence).

Justifions que la variable $g(U)$ admet une variance, ou de manière équivalente, un moment d'ordre 2. Toujours par le théorème de transfert, $g(U)$ admet un moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Ce qui est bien le cas, toujours parce qu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Ainsi $V(g(U))$ existe, et on supposera dans la suite que $V(g(U)) = \sigma^2 =\neq 0$.

On peut donc appliquer la loi faible des grands nombres : $\boxed{\left(\dfrac{S_n}{n}\right) \text{ converge en probabilité vers } J.}$

(b) i. Les variables $g(U_i)$ sont indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance commune J et d'écart-type commun $\sigma \neq 0$. De plus, on a :

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) \underset{\text{lin. de l'esp.}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(g(U_i)) = J$$

et :

$$V\left(\frac{S_n}{n}\right) \underset{\text{indép. des } g(U_i)}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(g(U_i)) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Par le théorème limite central, $\boxed{\left(\dfrac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers } X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$

ii. **Étape 1 : fixer le niveau de confiance.** Soient $a < b$. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a < \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq b\right) = P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Fixons $a = -b$. On a :

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(b) - \Phi(-b) = \Phi(b) - (1 - \Phi(b)) = 2\Phi(b) - 1.$$

On cherche $b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$2\Phi(b) - 1 = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(b) = 0.975 = \Phi(1.96).$$

Puisque Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$, donc on a (par injectivité de Φ) que $b = 1.96$.

Étape 2 : expliciter l'intervalle de confiance. On résout l'inéquation :

$$-b < \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq b \Leftrightarrow -b \leq \frac{J - \frac{S_n}{n}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < b \Leftrightarrow -b\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq J - \frac{S_n}{n} < b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{S_n}{n} - b\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq J < \frac{S_n}{n} + b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Un intervalle de confiance asymptotique pour J, au niveau de confiance 95%, est donc $\boxed{\left[\frac{S_n}{n} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \frac{S_n}{n} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]}$.

3. (a) Éffectuons le changement de variable $t = \sin(u)$ dans l'intégrale proposée. On a $u : 0 \to \frac{\pi}{2}$ lorsque $t : 0 \to 1$. La fonction $\varphi : u \mapsto \sin(u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et on a $\varphi'(u) = \cos(u)$ pour tout $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi, on a $\mathrm{d}t = \cos(u)\mathrm{d}u$. Le changement de variable est licite car il se fait sur un segment et φ étant $\mathscr{C}^1$ (inutile de se préoccuper de la stricte monotonie de φ ici, nous ne sommes pas dans le cas d'une intégrale généralisée). On obtient donc par théorème de changement de variable :

$$\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin(u)^2}\cos(u)\mathrm{d}u = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{cos(u)^2}\cos(u)\mathrm{d}u = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |cos(u)|\cos(u)\mathrm{d}u$$
$$\underset{\cos(u)\geq 0 \text{ sur } [0,\pi/2]}{=} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2\mathrm{d}u$$

Reste à linéariser $\cos(u)^2$ afin de calculer cette intégrale :

$$\cos(u)^2 = \left(\frac{e^{iu}+e^{-iu}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2iu}+2+e^{-2iu}}{4} = \frac{2\cos(2u)+2}{4} = \frac{\cos(2u)+1}{2}.$$

On en déduit que :

$$\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2u)+1}{2}\mathrm{d}u = 2\left[\frac{\sin(2u)}{2}+u\right]_0^{\pi/2} \boxed{= \pi.}$$

(b) i. On propose la fonction suivante.

```python
def G(t):
    return 4*np.sqrt(1-t**2)
```

ii. On suppose que n est « grand », de sorte que par la question 2.(a), $\frac{S_n}{n}$ est « probablement » proche de J.

```python
J = 0
for i in range(n):
    J = J + G(rd.random())
J = J/n
```

Remarque. La convergence en probabilité ne nous met pas totalement à l'abri d'un « mauvais » tirage, et il se peut donc que le programme retourne une valeur totalement fantaisiste de J.

> **Déjà vu ?**
> On reconnait ici la méthode de Monte Carlo de calcul approché d'une intégrale qui a été mise en oeuvre dans le **TP9. Méthode de Monte Carlo**

II. Réduction de la variance par variables antithétiques.

4. $V = 1 - U$ est une transformation affine de la variable à densité U. V est donc à densité également, et une densité de V est donnée par la fonction :

$$g : t \mapsto \frac{1}{|-1|} f\left(\frac{t-1}{-1}\right) = f(1-t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1-t \in [0,1] \Leftrightarrow t \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{1 - U \text{ suit une loi } \mathscr{U}([0,1]).}$

Puisque U et $1-U$ suivent la même loi, il en est de même de $g(U)$ et de $g(1-U)$. En particulier, on a $E(g(U)) = E(g(1-U)) = J$, et par linéarité de l'espérance :

$$E(Y) = \frac{1}{2}(E(g(U)) + E(g(1-U))) = \frac{1}{2}(2J) \boxed{= J.}$$

5. (a) Supposons $u \leq w$. On a $1 - u \geq 1 - w$, et par croissance de g :

$$g(u) \leq g(w) \text{ et } g(1-u) \geq g(1-w) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(g(u) - g(w))}_{\leq 0} \underbrace{(g(1-u) - g(1-w))}_{\geq 0} \leq 0.$$

L'autre cas $u > w$ se fait de même. Ainsi, on a bien pour tout $(u, w) \in [0,1]^2$ que :

$$\boxed{(g(u) - g(w))(g(1-u) - g(1-w)) \leq 0.}$$

(b) D'après la question précédente, la variable aléatoire $(g(U) - g(W))(g(1-U) - g(1-W))$ est négative ou nulle. Par croissance de l'espérance, son espérance est donc aussi négative ou nulle. Ainsi on a :

$$\boxed{E[(g(U) - g(W))(g(1-U) - g(1-W))] \leq 0.}$$

Développons $E[(g(U) - g(W))(g(1-U) - g(1-W))]$. On obtient :

$$E[g(U)g(1-U) - g(U)g(1-W) - g(W)g(1-U) + g(W)g(1-W)]$$

$$= E(g(U)g(1-U)) - E(g(U)g(1-W)) - E(g(W)g(1-U)) + E(g(W)g(1-W))$$

Or les variables U et $1 - W$ sont indépendantes et de même loi (par la question 1.), donc $g(U)$ et $g(1-W)$ le sont également, et on a :

$$E(g(U)g(1-W)) = E(g(U))E(g(1-W)) = E(g(U))^2$$

et de même $E(g(W)g(1-U)) = E(g(U))^2$. Enfin, comme indiqué dans l'énoncé, les variables $g(U)g(1-U)$ et $g(W)g(1-W)$ sont de même loi et ont donc même espérance. On obtient finalement que :

$$\begin{aligned} E[(g(U) - g(W))(g(1-U) - g(1-W))] &= E(g(U)g(1-U)) - E(g(U))^2 - E(g(U))^2 + E(g(U)g(1-U)) \\ &= 2E(g(U)g(1-U)) - 2E(g(U))^2. \end{aligned}$$

Il vient donc que :

$$E[(g(U) - g(W))(g(1-U) - g(1-W))] \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E[g(U)g(1-U)] \leq (E[g(U)])^2.}$$

(c) On a par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}E(Y^2) &= \frac{1}{4}E\left((g(U)+g(1-U))^2\right) = \frac{1}{4}\left[E(g(U)^2)+E(g(1-U)^2)+2E(g(U)g(1-U))\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[E(g(U)^2)+E(g(U)g(1-U))\right]\end{aligned}$$

en notant pour la dernière égalité que $E(g(U)^2) = E(g(1-U)^2)$ puisque U et $1-U$ sont de même loi. Par la formule de Huygens, on obtient :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{2}\left[E(g(U)^2)+E(g(U)g(1-U)) - 2(E(g(U))^2\right].$$

D'autre part, on a $V(g(U)) = E(g(U)^2) - E(g(U))^2$, et donc avec la question précédente :

$$V(Y) \leq \frac{1}{2}\left[E(g(U)^2)+E(g(U))^2 - 2(E(g(U))^2\right] = \frac{1}{2}\left[E(g(U)^2) - E(g(U))^2\right] \boxed{= \frac{1}{2}V(g(U)).}$$

6. On reprend le raisonnement effectué à la question 2.(b).ii. en remplaçant S_n par :

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n}(g(U_i)+g(1-U_i))$$

et donc les σ par $\sigma' = \sqrt{V(Y)}$. On obtient alors comme intervalle de confiance de J au niveau de confiance 95% l'intervalle :

$$\boxed{\left[\frac{S'_n}{n} - 1.96\times\frac{\sigma'}{\sqrt{n}} ; \frac{S'_n}{n} + 1.96\times\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}\right].}$$

Pour un échantillon de taille n, la longueur de cet intervalle est $\ell'_n = 2\times 1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, alors qu'elle est égale à $\ell_n = 2\times 1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ pour l'intervalle obtenu à la question 2.(b).ii.

La question posée alors est la suivante : à n fixé, combien doit valoir N pour que $\ell'_N \leq \ell_n$? On est amené à résoudre l'inéquation suivante :

$$\ell'_N \leq \ell_n \Leftrightarrow \frac{\sigma'}{\sqrt{N}} \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{N} \leq \sqrt{n}\frac{\sigma'}{\sigma}.$$

En utilisant le résultat de la question 5.(c), on a $\sigma'^2 \leq \dfrac{\sigma^2}{2}$, et donc $\dfrac{\sigma'}{\sigma} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi, si on a $\sqrt{N} \geq \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$, on a bien $\sqrt{N} \geq \sqrt{n}\dfrac{\sigma'}{\sigma}$, et donc $\ell'_N \leq \ell_n$. Il suffit donc de prendre $\boxed{N \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1.}$

III. Réduction de la variance par stratification.

7. (a) Les fonctions :

$$(x_1,x_2,x_3)\mapsto 4x_1, \quad (x_1,x_2,x_3)\mapsto x_2, \quad (x_1,x_2,x_3)\mapsto 9x_3$$

sont polynomiales donc $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[^3$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction inverse étant $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit par composition et par somme de fonctions $\mathscr{C}^2$ que f est $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[^3$. De plus, on a :

$$\boxed{\nabla f(x_1,x_2,x_3) = \left(-\frac{1}{4x_1^2}, -\frac{1}{x_2^2}, -\frac{1}{9x_3^2}\right).}$$

On a de plus :

$$\boxed{\partial^2_{1,1}f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2x_1^3}, \quad \partial^2_{2,2}f(x_1,x_2,x_3) = \frac{2}{x_2^3}, \quad \partial^2_{3,3}f(x_1,x_2,x_3) = \frac{2}{9x_3^3}}$$

et $\boxed{\partial^2_{i,j}f(x_1,x_2,x_3) = 0 \text{ pour tout } i\neq j.}$

(b) D'après les calculs précédents, on a :

$$\nabla^2 f(a_1,a_2,a_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a_2^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9a_3^3} \end{pmatrix}.$$

Pour tout $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ non nul, on a :

$$^tH\nabla^2(f)(A)H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{h_1}{2a_1^3} \\ \dfrac{2h_2}{a_2^3} \\ \dfrac{2h_3}{9a_3^3} \end{pmatrix} = \frac{h_1^2}{2a_1^3} + \frac{2h_2^2}{a_2^3} + \frac{2h_3^2}{9a_3^3} \boxed{> 0.}$$

Autre méthode. $\nabla^2 f(a_1,a_2,a_3)$ étant triangulaire supérieure (même diagonale), ses valeurs propres sont sur sa diagonale. Elles sont en l'occurrence toutes strictement positives. Par le cours, on a donc que pour tout $h \neq 0$, $q_A(h) > 0$.

(c) (a_1,a_2,a_3) est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(a_1,a_2,a_3) = (0,0,0)$. Or nous avons calculé précédemment le gradient de f, qui ne peut s'annuler sur $]0,+\infty[^3$. Donc f n'admet aucun point critique sur $]0,+\infty[^3$, et donc n'admet $\boxed{\text{pas d'extremum locaux.}}$

(d) i. (a_1,a_2,a_3) est un point critique de f sous la contrainte (linéaire) $x_1+x_2+x_3 = 110$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3 = 110 \\ \nabla f(a_1,a_2,a_3) = \lambda(1,1,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+a_2+a_3 = 110 \\ -\dfrac{1}{4a_1^2} = \lambda \\ -\dfrac{1}{a_2^2} = \lambda \\ -\dfrac{1}{9a_3^2} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+a_2+a_3 = 110 \\ 4a_1^2 = a_2^2 = 9a_3^2 = -\dfrac{1}{\lambda} \end{cases}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{a_1,a_2,a_3>0} \begin{cases} a_1+a_2+a_3 = 110 \\ 2a_1 = a_2 = 3a_3 \left(= \sqrt{-\dfrac{1}{\lambda}}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 60 \\ a_1 = 30 \\ a_3 = 20 \\ \left(\sqrt{-\dfrac{1}{\lambda}} = 60\right) \end{cases}$$

$\boxed{f \text{ admet un unique point critique sous la contrainte } \mathscr{C}\text{, qui est } (30,60,20).}$

ii. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^2$, on sait par le cours que g est de classe $\mathscr{C}^2$ entre 0 et 1, et on a :

$$\forall t \in [0,1], \quad g'(t) = \langle \nabla f(a+th), h\rangle \quad \text{et} \quad g''(t) = q_{a+th}(h).$$

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction g entre 0 et 1, on a :

$$g(1) = g(0) + g'(0)\frac{(1-0)^1}{1!} + \int_0^1 g''(t)\frac{(1-t)}{1!}\mathrm{d}t.$$

soit :

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \int_0^1 q_{a+uh}(h)(1-t)\mathrm{d}t.$$

Or, a est un point critique sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$, donc $\nabla f(a)$ est orthogonal à $\mathscr{H} = \{(h_1, h_2, h_3),\ h_1+h_2+h_3 = 0\}$. Puisque $h = x - a \in \mathscr{H}$, on obtient :

$$f(x) - f(a) = \underbrace{\langle \nabla f(a), h\rangle}_{=0} + \int_0^1 q_{a+uh}(h)(1-t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \underbrace{q_{a+uh}(h)(1-t)}_{\geq 0 \text{ d'après 7.}(b)}\mathrm{d}t \geq 0.$$

Ainsi, on a $\boxed{f(x) \geq f(a)}$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathscr{C}$, f admet un minimum global en a sous la contrainte $\mathscr{C}$.

8. **Méthode de stratification.**

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$. On définit les trois intervalles I_1, I_2 et I_3 par

$$I_1 = [0, a[, \quad I_2 = [a, b[, \quad I_3 = [b, 1],$$

et on considère quatre variables aléatoires indépendantes U_1, U_2, U_3 et T, de lois uniformes respectivement sur I_1, I_2, I_3 et $[0,1]$.

On définit la variable aléatoire $\tilde{U}$ par $\tilde{U} = U_1\mathbb{1}_{[T\in I_1]} + U_2\mathbb{1}_{[T\in I_2]} + U_3\mathbb{1}_{[T\in I_3]}$ où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice d'un événement A. U est donc la variable aléatoire définie, pour tout élément ω de l'univers Ω par :

$$\tilde{U}(\omega) = \begin{cases} U_1(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_1 \\ U_2(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_2 \\ U_3(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_3 \end{cases}$$

(a) $([T \in I_i])_{i=1,2,3}$ est un système complet d'évènements (car les intervalles I_1, I_2, I_3 forment une partition de $[0,1]$ et que $T(\Omega) = [0,1]$). À l'aide de la formule des probabilités totales, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(g(\tilde{U}) \leq x) = \sum_{i=1}^{3} P(T \in I_i)P_{[T\in I_i]}(g(\tilde{U}) \leq x)$$

Or T suit une loi uniforme sur $[0,1]$, de sorte que :

$$P(T \in I_1) = P(0 \leq T < a) = a, \quad P(T \in I_2) = b - a, \quad P(T \in I_3) = 1 - b.$$

De plus pour $i = 1, 2, 3$, la loi de $g(\tilde{U})$ sachant $[T \in I_i]$ est la loi de $g(U_i)$, donc on a $P_{[T\in I_i]}(g(\tilde{U}) \leq x) = P = (g(U_i) \leq x)$. On obtient donc :

$$\boxed{P(g(\tilde{U}) \leq x) = aP(g(U_1) \leq x) + (b-a)P(g(U_2) \leq x) + (1-b)P(g(U_3) \leq x).}$$

Si $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$ sont des variables à densité, alors leurs fonctions de répartition sont continues sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Et donc :

$$x \mapsto F_{g(\tilde{U})}(x) = aF_{g(U_1)}(x) + (b-a)F_{g(U_2)}(x) + (1-b)F_{g(U_3)}(x)$$

est également continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points. On en déduit que $\boxed{g(\tilde{U}) \text{ est une variable à densité.}}$

Si on dérive cette expression là où elle est dérivable (c'est-à-dire sauf éventuellement en un nombre fini de points), il vient :

$$F'_{g(\tilde{U})}(x) = af_{g(U_1)}(x) + (b-a)f_{g(U_2)}(x) + (1-b)f_{g(U_3)}(x).$$

Puisqu'il est toujours possible de choisir arbitrairement la valeur d'une densité de $g(\tilde{U})$ là où $F_{g(\tilde{U})}$ n'est pas dérivable, on peut prendre pour densité de $g(\tilde{U})$ la fonction :

$$\boxed{f_{g(\tilde{U})}(t) = af_{g(U_1)}(t) + (b-a)f_{g(U_2)}(t) + (1-b)f_{g(U_3)}(t).}$$

En particulier, si g est la fonction identité, alors les variables $g(U_1)$, $g(U_2)$ et $g(U_3)$ suivent des lois uniformes sur respectivement $[0,a[$, $[a,b[$ et $[b,1[$. On peut alors prendre comme densités respectives de U_1, U_2, U_3 les fonctions :

$$f_{U_1} : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } t \in [0,a[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad f_{U_2} : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a,b[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad f_{U_3} : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{1-b} & \text{si } t \in [b,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Dans ce cas, on a :

$$f_{\tilde{U}} : t \mapsto \begin{cases} a\frac{1}{a} & \text{si } 0 \leq t < a \\ (b-a)\frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t < b \\ (1-b)\frac{1}{1-b} & \text{si } b \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On reconnait la densité d'une loi uniforme sur $[0,1]$, donc $\boxed{\tilde{U} \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1]).}$

(b) Les variables $g(U_i)$ possèdent une espérance pour les mêmes raisons qu'à la question 1.a., donc les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_i)}(t)\,\mathrm{d}t$ convergent absolument et valent $E(g(U_i))$ pour $i = 1,2,3$. Par inégalité triangulaire, on a que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| t f_{g(\tilde{U})}(t) \right| \leq a|t| f_{g(U_1)}(t) + (b-a)|t| f_{g(U_2)}(t) + (1-b)|t| f_{g(U_3)}(t).$$

Par théorème de comparaison, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(\tilde{U})}(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Donc $E(g(\tilde{U})$ existe bien et on a (par linéarité de l'intégrale, puisque tout converge) :

$$\begin{aligned} E(g(\tilde{U}) &= a\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_1)}(t)\,\mathrm{d}t + (b-a)\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_2)}(t)\,\mathrm{d}t + (1-b)\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_3)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &\boxed{= aE(g(U_1)) + (b-a)E(g(U_2)) + (1-b)E(g(U_3)).} \end{aligned}$$

(c) Les $U_{i,j}$ étant mutuellement indépendantes, il en est de même des $g(U_{i,j})$ par lemme de coalition. Et donc :

$$V(Z) = a^2\frac{1}{n_1^2}\sum_{j=1}^{n_1} V(g(U_{1,j})) + (b-a)^2\frac{1}{n_2^2}\sum_{j=1}^{n_2} V(g(U_{2,j})) + (1-b)^2\frac{1}{n_3^2}\sum_{j=1}^{n_3} V(g(U_{3,j})).$$

Mais pour tout $i = 1,2,3$ et $j \in [\![1,n_i]\!]$, $g(U_{i,j})$ a même loi que $g(U_i)$ et donc :

$$\sum_{j=1}^{n_i} V(g(U_{i,j})) = n_i V(g(U_i)).$$

On obtient donc :

$$\boxed{V(Z) = a^2\frac{1}{n_1}V\big(g(U_1)\big) + (b-a)^2\frac{1}{n_2}V\big(g(U_2)\big) + (1-b)^2\frac{1}{n_3}V\big(g(U_3)\big)}$$

(d) On cherche n_1, n_2, n_3 minimisant le risque quadratique de Z (afin qu'une valeur prise par Z fournisse une estimation de J avec le plus petit risque d'erreur possible). Notons pour cela que :

$$\begin{aligned} E(Z) &= a\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} E(g(U_{1,j})) + (b-a)\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} E(g(U_{2,j})) + (1-b)\frac{1}{n_3}\sum_{j=1}^{n_3} E(g(U_{3,j})) \\ &= aE(g(U_1)) + (b-a)E(g(U_2) + (1-b)E(g(U_3)) \overset{8.(b)}{=} E(g(\tilde{U}) \overset{1.(b)}{=} J \end{aligned}$$

car $\tilde{U}$ suit une loi $\mathscr{U}([0,1])$ d'après la question 8.(a). Ainsi, Z est un estimateur sans biais de J, de sorte que son risque quadratique est égal à sa variance.

Cette variance vaut donc ici $V(Z) = \dfrac{1}{4n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{9n_3}$. Puisque l'on tire 110 points, il faut donc avoir $n_1 + n_2 + n_3 = 110$. Par le résultat de la question 7.(d), la valeur de $V(Z)$ est alors minimale pour $\boxed{n_1 = 30,\ n_2 = 60 \text{ et } n_3 = 20.}$
